

Về một số dạng phương trình hàm đa thức

Phương trình hàm đa thức là một dạng toán khó, để giải được các phương trình hàm loại này, chúng ta cần nắm rõ không những các kỹ thuật giải phương trình hàm mà còn các tính chất và các đặc trưng cơ bản của đa thức (nghiệm, hệ số, bậc, tính liên tục, tính hữu hạn nghiệm, tính khả vi ...). Trong bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một số dạng phương trình đa thức có sơ đồ lời giải tương tự nhau: xây dựng nghiệm và chứng minh các nghiệm đó vét hết tập hợp nghiệm.

1. Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$.

Bài toán tổng quát: Giả sử $f(x), g(x)$ và $h(x)$ là các đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ đã cho thoả mãn điều kiện: $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thuộc $\mathbb{R}[x]$ sao cho:

$$P[f(x)].P[g(x)] = P[h(x)] \quad (1), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nghiệm của phương trình hàm (1) có nhiều tính chất đặc biệt giúp chúng ta có thể xây dựng được tất cả các nghiệm của nó từ các nghiệm bậc nhỏ:

Tính chất 1.1. Nếu P, Q là nghiệm của (1) thì $P.Q$ cũng là nghiệm của (1).

Chứng minh:

$$(P.Q)[h(x)] =$$

$$\begin{aligned} (P.Q)(h(x)) &= (P)(h(x)).Q(h(x)) = P(f(x)).P(g(x)).Q(f(x)).Q(g(x)) \\ &= (P.Q)(f(x)).(P.Q)(g(x)). \end{aligned}$$

Hệ quả 1.2. Nếu $P(x)$ là nghiệm của (1) thì $P^n(x)$ cũng là nghiệm của (1).

Trong khá nhiều trường hợp, hệ quả 1.2 cho phép chúng ta mô tả hết các nghiệm của (1). Để làm điều này, ta có định lý quan trọng sau đây:

Định lý 1.3. Nếu f, g, h là các đa thức với hệ số thực thoả mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$ và thoả mãn một trong hai điều kiện sau:

(i) $\deg(f) \neq \deg(g)$

(ii) $\deg(f) = \deg(g)$ và $f^* + g^* \neq 0$, trong đó f^*, g^* là hệ số cao nhất của các đa thức f và g tương ứng.

Khi đó với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ có bậc n và thoả mãn phương trình (1).

Chứng minh:

Giả sử P là đa thức bậc n thoả mãn phương trình (1), $\deg(f) = f, \deg(g) = g, \deg(h) = h$, các hệ số cao nhất của P, f, g, h tương ứng là P^*, f^*, g^*, h^* . So sánh hệ số cao nhất hai vế của các đa thức trong phương trình

$$P(f(x))P(g(x)) = P(h(x))$$

$$\text{Ta có } P^*(f^*)^n \cdot P^*(g^*)^n = P^*(h^*)^n \text{ từ đó suy ra } P^* = (h^*/f^*g^*)^n.$$

Như vậy, nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q bậc n (khác P) cũng thoả mãn phương trình (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x) \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất 0 bằng $-\infty$, do đó $\deg(R) \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất 0)

Thay vào phương trình (1), ta được

$$(P(f) + R(f))(P(g) + R(g)) = P(h) + R(h)$$

$$\Leftrightarrow P(f)P(g) + P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = P(h) + R(h)$$

$$\Leftrightarrow P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h) \quad (2)$$

Bây giờ ta xét các trường hợp

- i) $\deg(f) \neq \deg(g)$. Giả sử $f > g$. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái (2) lần lượt là $nf + rg$, $rf + ng$, $rf + rg$, và do $nf + rg > rf + ng > rf + rg$ nên vế trái có bậc là $nf + rg$. Trong khi đó vế phải có bậc là $rh = r(f+g) < nf + rg$. Mâu thuẫn.
- ii) $\deg(f) = \deg(g)$. Khi đó, hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) cùng có bậc là $nf + rg = ng + rf$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của x^{nf+rg} trong đa thức thứ nhất và thứ hai lần lượt bằng $P^*(f^*)^n R^*(g^*)^r$, $R^*(f^*)^r P^*(g^*)^n$. Như thế, bậc của x^{nf+rg} trong tổng hai đa thức bằng $P^* R^* f^{*r} g^{*r} (f^{*(n-r)} + g^{*(n-r)}) \neq 0$ do $f^* + g^* \neq 0$. Như vậy, bậc của vế trái của (2) vẫn là $nf + rg$, trong khi đó bậc của vế phải là $rh = rf + rg < nf + rg$. Mâu thuẫn.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Áp dụng định lý 1.3 và hệ quả 1.2, ta thấy rằng nếu $P_0(x)$ là một đa thức bậc nhất thoả mãn phương trình (1) với f, g, h là các đa thức thoả mãn điều kiện của định lý 1.3 thì tất cả các nghiệm của (1) sẽ có dạng: $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) = (P_0(x))^n$.

Sau đây, chúng ta sẽ xem xét một số ví dụ áp dụng của các tính chất nói trên.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn phương trình

$$P(x^2) = P^2(x) \quad (3)$$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải: Ta có các hàm $f(x) = x$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ thoả mãn các điều kiện của định lý 1.3, và hàm $P(x) = x$ là hàm bậc nhất thoả mãn (3) do đó các hàm $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ là tất cả các nghiệm của (3).

Ví dụ 2. (Vietnam 2006) Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thoả mãn hệ thức sau:

$$P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2 \quad (4)$$

với mọi số thực x .

Lời giải: Thay $x \rightarrow -x$ vào (4), ta được

$$P(x^2) - x(3P(-x) + P(x)) = (P(-x))^2 + 2x^2 \quad (5)$$

Trừ (4) cho (5), ta được

$$4x(P(x) + P(-x)) = P^2(x) - P^2(-x)$$

$$\Leftrightarrow (P(x) + P(-x))(P(x) - P(-x) - 4x) = 0 \quad (6)$$

(6) đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, do đó ta phải có

+ Hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với vô số các giá trị x

+ Hoặc $(P(x) - P(-x) - 4x) = 0$ đúng với vô số các giá trị x

Do P là đa thức nên từ đây ta suy ra

+ Hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với mọi x

+ Hoặc $(P(x) - P(-x) - 4x) = 0$ đúng với mọi x

Ta xét các trường hợp:

$$+ P(x) + P(-x) = 0$$

Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + 2xP(x) = (P(x))^2 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x^2) - x^2 = (P(x) - x)^2$$

Đặt $Q(x) = P(x) - x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$. Theo ví dụ 1 thì $Q(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 1$, $Q(x) = x^n$. Từ đó $P(x) = x$, $P(x) = x+1$, $P(x) = x^n + x$. So sánh với điều kiện $P(x) + P(-x) = 0$, ta chỉ nhận các nghiệm: $P(x) = x$ và $P(x) = x^{2k+1} + x$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$+ P(x) - P(-x) - 4x = 0$$

Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + x(4P(x) - 4x) = P^2(x) + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x^2) - 2x^2 = (P(x) - 2x)^2$$

Đặt $Q(x) = P(x) - 2x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$ và như thế $Q(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 1$, $Q(x) = x^n$. Từ đó $P(x) = 2x$, $P(x) = 2x+1$, $P(x) = x^n + 2x$. So sánh với điều kiện $P(x) - P(-x) - 4x = 0$, ta chỉ nhận các nghiệm: $P(x) = 2x$, $P(x) = 2x+1$ và $P(x) = x^{2k} + 2x$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Tổng hợp hai trường hợp, ta có tất cả nghiệm của (4) là các đa thức

$P(x) = x$, $P(x) = 2x$, $P(x) = 2x+1$, $P(x) = x^{2k+1} + x$, $P(x) = x^{2k} + 2x$ với $k = 2, 3, \dots$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau với mọi số thực x

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x) \quad (7)$$

Lời giải: Các đa thức x , $2x^2$, $2x^3+x$ thỏa mãn điều kiện định lý 1.3, do đó ta sẽ đi tìm nghiệm không đồng nhất hằng số với bậc nhỏ nhất của (7).

Xét trường hợp $P(x)$ có bậc nhất, $P(x) = ax + b$. Thay vào (7), ta có

$$(ax + b)(2ax^2 + b) = a(2x^3 + x) + b$$

So sánh hệ số của các đơn thức ở hai vế, ta được hệ

$$a^3 = 2a, 2ba^2 = 0, ab = a, b^2 = b$$

Hệ này vô nghiệm (do $a \neq 0$) nên ta có thể kết luận: không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn (7).

Tiếp tục xét trường hợp $P(x)$ có bậc 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Thay vào (7), ta có

$$(ax^2 + bx + c)(4ax^4 + 2bx^2 + c) = a(2x^3 + x)^2 + b(2x^3 + x) + c$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^6 + 4abx^5 + (4ac + 2ab)x^4 + 2b^2x^3 + (ac + 2bc)x^2 + bcx + c^2 = 4ax^6 + 4ax^4 + 2bx^3 + ax^2 + bx + c$$

So sánh hệ số các đơn thức ở hai vế, ta được hệ

$$4a^2 = 4a, 4ab = 0, 4ac + 2ab = 4a, 2b^2 = 2b, ac + 2bc = a, bc = b, c^2 = c.$$

Hệ này có nghiệm $a = c = 1$, $b = 0$. Như vậy, $P(x) = x^2 + 1$ là đa thức bậc 2 thỏa mãn (7). Từ hệ quả 1.2 và định lý 1.3, ta suy ra $(x^2+1)^k$ là tất cả các đa thức bậc chẵn (không đồng nhất hằng số) thỏa mãn (7).

Thế còn các nghiệm của (7) có bậc lẻ? Rõ ràng đa thức $x^2 + 1$ không “sinh” ra được các nghiệm bậc lẻ. Rất may mắn, ta có thể chứng minh các đa thức bậc lẻ không thể là nghiệm của (7). Để chứng minh điều này, dựa vào tính chất mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm thực, ta chỉ cần chứng minh nếu $P(x)$ là một đa thức không đồng nhất hằng số thỏa mãn (7) thì $P(x)$ không có nghiệm thực (đây chính là nội dung bài Vietnam MO 1990).

Thật vậy, giả sử α là nghiệm thực của $P(x)$, khi đó $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Nếu $\alpha > 0$ thì ta có α , $\alpha + 2\alpha^3$, $\alpha + 2\alpha^3 + 2(\alpha + 2\alpha^3)^3$, ... là dãy tăng và tất cả đều là nghiệm của $P(x)$, mâu thuẫn.

Tương tự, nếu $\alpha < 0$ thì dãy nói trên là dãy giảm và ta cũng có $P(x)$ có vô số nghiệm. Nếu $\alpha = 0$, đặt $P(x) = x^k Q(x)$ với $Q(0) \neq 0$, thay vào phương trình, ta có

$$x^k Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^3 + x)^k Q(2x^3 + x)$$

$$\Rightarrow Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^2 + 1)^k Q(2x^3 + x)$$

Thay $x = 0$ vào ta được $0 = Q(0)$, mâu thuẫn.

Vậy $P(x)$ không có nghiệm thực, có nghĩa là $P(x)$ không thể có bậc lẻ. Nói cách khác, bài toán đã được giải quyết hoàn toàn.

Như đã nói ở phần cuối của bài trước, phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$ còn có thể giải bằng cách xét các nghiệm (có thể là phức) của đa thức $P(x) = 0$. Sau đây chúng ta xét một ví dụ như vậy:

Ví dụ 4: Tìm tất cả các đa thức không hằng số $P(x)$ sao cho

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1) \quad (8)$$

Lời giải: Giả sử a là một nghiệm của $P(x) = 0$. Khi đó $a^2 + a + 1$ cũng là nghiệm. Thay x bằng $x - 1$, ta có $P(x)P(x-1) = P(x^2 - x + 1)$

Vì $P(a) = 0$ nên ta cũng suy ra $a^2 - a + 1$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$.

Chọn a là nghiệm có modul lớn nhất (nếu có một vài nghiệm như thế thì ta chọn 1 trong chúng). Từ cách chọn ta suy ra $|a^2 + a + 1| \leq |a|$ và $|a^2 - a + 1| \leq |a|$

Áp dụng bất đẳng thức về modul, ta có

$$|2a| \leq |a^2 + a + 1| + |-a^2 + a - 1| \leq |a| + |a| = |2a|.$$

Như vậy dấu bằng phải xảy ra ở các đẳng thức trên, suy ra với

$(a^2 + a + 1) = s(-a^2 + a - 1)$ với s là một số dương nào đó.

Nếu $|a^2 + a + 1| < |a^2 - a + 1|$ thì $2|a^2 - a + 1| > |a^2 - a + 1| + |a^2 + a + 1| \geq |2a|$, suy ra $|a^2 - a + 1| > |a|$. Tương tự từ $|a^2 + a + 1| > |a^2 - a + 1|$, cũng suy ra $|a^2 + a + 1| > |a|$, mâu thuẫn với cách chọn a .

Vậy $|a^2 + a + 1| = |a^2 - a + 1|$. Từ đó $s = 1$ và ta có $(a^2 + a + 1) = (-a^2 + a - 1)$

suy ra $a^2 + 1 = 0$, suy ra $a = \pm i$ và như vậy $x^2 + 1$ là thừa số của $P(x)$. Từ đây $P(x) = (x^2 + 1)^m Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho $x^2 + 1$. Thay vào (8), ta có $Q(x)$ cũng thỏa mãn (8).

Nếu như phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm thì làm tương tự như trên, nghiệm có modul lớn nhất phải là $\pm i$. Nhưng điều này không thể vì $x^2 + 1$ không chia hết $Q(x)$. Ta đi đến kết luận rằng $Q(x)$ là hằng số, giả sử đó là c . Thay vào phương trình, ta được $c = 1$.

Như vậy tất cả các nghiệm không hằng của phương trình (8) có dạng $(x^2 + 1)^m$ với m là số nguyên dương.

Chú ý rằng kết luận của định lý không còn đúng nếu f và g là hai đa thức cùng bậc và có hệ số cao nhất đối nhau.

Ví dụ với phương trình hàm đa thức $P(x)P(-x) = P(x^2 - 1)$ (9) có thể tìm được rằng có 2 đa thức bậc nhất, 4 đa thức bậc 2 thỏa mãn phương trình. **Bài toán mô tả tất cả các nghiệm của (9) hiện nay, theo chúng tôi, vẫn còn là một bài toán mở.**

Bài tập:

1. (Bulgaria 1976) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2 - 2x) = (P(x-2))^2$$
với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
2. (TH&TT 7/2006) Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+2)$$
với mọi $x \in \mathbb{R}$.
3. (Bulgaria 1988) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ không phải hằng số sao cho $P(x^3+1) = P^3(x+1)$ với mọi x .
4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ chỉ có nghiệm thực thỏa mãn phương trình (9).
5. Tìm ít nhất một đa thức không có nghiệm thực thỏa mãn phương trình ở bài toán (9).

Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h) + Q$.

Bây giờ chúng ta xét đến phương trình dạng

$$P(f)P(g) = P(h) + Q \quad (1)$$

(Để tiện theo dõi và không quá rắc rối trong ký hiệu, ta đánh số lại các công thức từ 1) trong đó f, g, h, Q là các đa thức đã cho, $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$).

Với phương trình (1), nếu Q không đồng nhất 0 thì ta sẽ không còn tính chất "nhân tính" như dạng 1. Vì thế, việc xây dựng nghiệm trở nên khó khăn. Đây chính là khác biệt cơ bản của dạng 2 với dạng 1.

Tuy nhiên, ta vẫn có thể chứng minh được định lý duy nhất, được phát biểu như sau:

Định lý: Cho f, g, h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$, Q là một đa thức cho trước. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a , tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
i) $\deg(P) = n$, ii) $P^* = a$ iii) $P(f)P(g) = P(h) + Q$

Phép chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự với phép chứng minh định lý đã được chứng minh ở phần 1.

1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P^2(x) - P(x^2) = 2x^4$$
2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P(x^2-1) = P^2(x) - 1$$
3. Tìm tất cả các bộ (a, P, Q) trong đó a là hằng số thực, P, Q là các đa thức sao cho:

$$P^2(x)/Q^2(x) = a + P(x^2)/Q(x^2)$$

3. Một số bài tập tổng hợp

1. $P(3x) = P'(x)P''(x)P'''(x)$
2. $P(x)$ thuộc $R[x]$: $P(x^2) = P(x)P(x-1)$ (Ireland 1994)
3. $P(x^2) = P(x)P(x+1)$
4. $P(x)$ thuộc $Z[x]$ $16P(x^2) = [P(2x)]^2$ (Nam Tư 1982)
5. Tìm các đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(f(x)) = f(x)^m$ với $m > 1$ nguyên cho trước (Hồng Công 1999)
6. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Chứng minh rằng với số n thuộc N tùy ý không tồn tại nhiều hơn một đa thức $Q(x)$ thỏa mãn đồng nhất:
 $Q(P(x)) = P(Q(x))$ với mọi x thuộc R (Hungary 1979)
7. $(x-1)P(x-1) = (x+2)P(x)$ (New York 1976)
8. $2P(x) = P(x+1) + P(x-1)$ (New York 1975)
9. $P(u^2 - v^2) = P(u+v)P(u-v)$
10. Những đa thức hệ số thực nào có P' là ước của P ?
11. $P(x^2) = P(x)P(x+1)$
12. Tìm P và Q trong $R[x]$ sao cho: $P^2 = 1 + (x^2-1)Q^2$.
13. $P(x+P(x)) = P(x) + P(P(x))$

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo dục 2002.
2. Lê Hoàng Phò, *Chuyên khảo về đa thức*, Nhà xuất bản ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, 2003.
3. B.J. Venkatachala, *Functional Equations - A problem Solving Approach*, PRISM 2002.
4. Christian Leboeuf, Jean Guegand, *Algebre*, Ellipses 1992.
5. Shkliarsky D.O, Chentsov N.N., Yaglom I.M., *Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics*, Mir Publishers, Moscow 1979.
6. Conhiagghin ..., *Các đề vô địch Toán các nước*, Nhà xuất bản Hải phòng 1993.
7. Prasolov V.V, *Polynomials*, MCCME, Moscow 2003.
8. Các tạp chí Kvant, Toán học và tuổi trẻ, tư liệu Internet.