Chuyên đề 2. TÌM CÁC SỐ VÀ CÁC CHỮ SỐ TỰ NHIÊN THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

1. Phương pháp giải toán qua các bài toán.

Ví dụ 1. Tìm một số là bội của 2010 có dạng $\overline{1a07b0}$

Hướng dẫn

Vì $a,b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ nên suy ra $100700 \le \overline{1a07b0} \le 190790$

Đặt $\overline{1a07b0} = 2010k\ (k \in \mathbb{N})$ ta có: $100700 \le 2010k \le 190790 \Rightarrow 51 \le k \le 94$

Khi đó bằng cách thử trực tiếp trên máy tính điện tử bằng thuật toán sau:
$2010 * A : A = A + 1$. Bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 51$, sau đó bấm liên tục dấu $'='$ cho đến khi nào $A = 95$ thì dừng, nếu có số tự nhiên nào để tích $2010 * A$ có dạng $\overline{1a07b0}$ thì khi đó ta được một số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán. Với thuật toán và ý tưởng trên ta tìm được hai số thỏa yêu cầu bài toán là 140700 và 150750.

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất có 10 chữ số sao cho khi chia n cho 2009; 2011 thì có số dư lần lượt là 1228;913

Hướng dẫn

Vì n khi chia cho 2009; 2011 thì có số dư lần lượt là 1228;913 nên tồn tại các số tự nhiên l,k sao cho $n = 2009k + 1228 = 2011l + 913 \quad (1)$

$\Rightarrow k = \dfrac{2011l + 913 - 1228}{2009} \in \mathbb{N} \quad (2)$

Vì số tự nhiên n cần tìm là số nhỏ nhất có 10 chữ số nên suy ra $n \ge 10^9 \quad (3)$

Từ $(1),(3)$ suy ra $2011l + 913 \ge 10^9 \Rightarrow l \ge 497264,5883 \Rightarrow l \ge 497265 \quad (4)$

Từ $(2),(4)$ ta có thuật toán thử trực tiếp trên máy tính điện tử như sau:
$(2011 * A + 913 - 1228) \div 2009 : A = A + 1$
Bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 497265$, sau đó bấm liên tục dấu $'='$ cho đến khi nào giá trị của biểu thức $(2011 * A + 913 - 1228) \div 2009$ là số tự nhiên thì dừng, và đó chính là số tự nhiên cần tìm. Với thuật toán và ý tưởng trên ta tìm được số thỏa yêu cầu bài toán là $n = 1000242148$.

Ví dụ 3. Tìm các chữ số a,b sao cho số $\overline{917a30b4}$ chia hết cho 2009 và 4

Hướng dẫn

Cách 1:

Vì số $\overline{917a30b4}$ chia hết cho 2009 nên tồn tại số tự nhiên k sao cho $\overline{917a30b4} = 2009k$
Mặt khác vì $a,b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ nên suy ra $91703004 \le 2009k \le 91793094$
$\Rightarrow 45647 \le k \le 45690$
Ta có thuật toán sau để tìm các chữ số a,b thỏa yêu cầu bài toán: $2009 * A : A = A + 1$
Bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 45647$, sau đó bấm liên tục dấu $'='$ cho đến khi $A = 45690$ thì dừng, nếu có giá trị nào của A để giá trị của $2009 * A$ có dạng $\overline{917a30b4}$ thì từ đó viết lại vào giấy nháp, sau đó kiểm tra các giá trị trong giấy nháp đã tìm được xem có giá trị nào chia hết cho 4 thì suy ra một cặp giá trị a,b thỏa yêu cầu bài toán. Với thuật toán và ý tưởng trên ta tìm được $a = 6; b = 8$ là các chữ số cần tìm.

Cách 2:

Vì số $\overline{917a30b4}$ chia hết cho 4 nên suy ra hai chữ số tận cùng phải chia hết cho 4, tức là $\overline{b4} \vdots 4 \Leftrightarrow b \in \{0;2;4;6;8\}$
Với $b = 0$ ta có thuật toán sau để tìm các chữ số a,b thỏa yêu cầu bài toán:
$(91703004 + A) \div 2009 : A = A + 10000$
Bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 10000$, sau đó bấm liên tục dấu $'='$ cho đến khi $A = 100000$ thì dừng, nếu có giá trị nào của A để giá trị của $(91703004 + A) \div 2009$ là một số tự nhiên thì từ đó suy ra các giá trị a,b. Sau đó lặp lại các bước trên với b lần lượt là $2;4;6;8$.
Với thuật toán và ý tưởng trên ta tìm được $a = 6; b = 8$ là các chữ số cần tìm.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các số có dạng $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36
Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT tỉnh Phú Thọ, 2004-2005

Hướng dẫn:

Vì số $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36 nên số $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4, suy ra $\overline{5y}$ chia hết cho 4. Do đó suy ra $y = 2$ hoặc $y = 6$.

- Trường hợp $y = 2$: ta được $\overline{34x52}$

Ta có bảng giá trị sau:

y	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{34x52}$	34052	34152	34252	34352	34452	34552	34652	34752	34852	34952

Thử trực tiếp trên máy tính điện tử thì chỉ có duy nhất số 34452 chia hết cho 36.
Do số $\overline{34x52}$ chia hết cho 36 nên số $\overline{34x52}$ chia hết cho 3, suy ra tổng các chữ số của số $\overline{34x52}$ chia hết cho 3. Do đó suy ra $x = 4$ là giá trị duy nhất thỏa.

- Trường hợp $y = 6$: ta được $\overline{34x56}$

Ta có bảng giá trị sau:

y	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\overline{34x56}$	34056	34156	34256	34356	34456	34556	34656	34756	34856	34956

Thử trực tiếp trên máy tính điện tử thì có hai số 34056 và 34956 chia hết cho 36.
Vậy các số thỏa yêu cầu bài toán là 34056; 34452 và 34956
Nhận xét: có thể lập luận dựa vào tính chất chia hết của một số tự nhiên để suy luận các số thỏa yêu cầu bài toán như sau (không phải thử sai nhiều lần trên máy tính điện tử như cách làm trên):
Vì số $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36 nên số $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4, suy ra $\overline{5y}$ chia hết cho 4. Do đó suy ra $y = 2$ hoặc $y = 6$.

- Trường hợp $y = 2$:

Khi đó số M có dạng $M = \overline{34x52}$
Do số $\overline{34x52}$ chia hết cho 36 nên số $\overline{34x52}$ chia hết cho 3, suy ra tổng các chữ số của số $\overline{34x52}$ chia hết cho 3. Do đó suy ra $x = 4$ là giá trị duy nhất thỏa.

- Trường hợp $y = 6$:

Khi đó số M có dạng $M = \overline{34x56}$
Do số $\overline{34x56}$ chia hết cho 36 nên số $\overline{34x56}$ chia hết cho 3, suy ra tổng các chữ số của số $\overline{34x56}$ chia hết cho 3. Do đó suy ra $x = 0$ hoặc $x = 9$ là các giá trị để M chia hết cho 36
Vậy các số thỏa yêu cầu bài toán là 34056; 34452 và 34956

Ví dụ 5. Tìm số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ biết rằng $\overline{abc} = c^5 + ab$
Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của TP.HCM, 2008-2009

Hướng dẫn

Vì $\begin{cases} \overline{abc} \le 999 \\ a \ne 0 \end{cases}$ nên suy ra $c^5 < 999 \Rightarrow c < 3,980275173 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \\ c = 2 \\ c = 3 \end{array}\right.$

- Trường hợp $c = 0$: vì $\overline{ab0} \ge 100 > 99 \ge \overline{ab}$ nên không xảy ra.
- Trường hợp $c = 1$: vì $\overline{ab1} \ge 101 > 1 + 99 \ge 1 + \overline{ab}$ nên không xảy ra.
- Trường hợp $c = 2$: ta có $\overline{ab2} = 32 + \overline{ab}$. Nhận xét về giá trị ở hàng đơn vị, suy ra $b = 0$.
  Khi đó ta được: $100a + 2 = 32 + 10a \Leftrightarrow 90a = 30 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ nên không xảy ra.
- Trường hợp $c = 3$: ta có $\overline{ab3} = 243 + \overline{ab}$. Nhận xét về giá trị ở hàng đơn vị, suy ra $b = 0$.
  Khi đó ta được: $100a + 3 = 243 + 10a \Leftrightarrow 90a = 240 \Leftrightarrow a = \dfrac{8}{3} \notin \mathbb{N}$ nên không xảy ra.

Vậy không có số tự nhiên nào thỏa yêu cầu bài toán.
Nhận xét: nếu đánh giá như sau thì chỉ xét hai giá trị của chữ số c:
Vì $\begin{cases} 100 \le \overline{abc} \le 999 \\ 10 \le \overline{ab} \le 99 \end{cases}$ nên suy ra $11 \le c^5 \le 989 \Rightarrow 1,61539426 \le c \le 3,97227455$

Do $c \in \mathbb{N}$ nên suy ra $2 \le c \le 3$ hay $\left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = 3 \end{array}\right.$.

Khi đó có thể xét 2 trường hợp như trên.

Ví dụ 6. Tìm các số tự nhiên a và b sao cho $7^a + b^7 + 2009a = 1978172385$

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của TP.HCM, 2009-2010

Hướng dẫn

Ta có: $b = \sqrt[7]{1978172385 - 7^a - 2009a} \quad (*)$

Vì $a, b \in \mathbb{N}$ nên suy ra

$7^a + 2009a \ge 1 \Rightarrow b^7 \le 1978172384 \Rightarrow b \le 21{,}28323957 \Rightarrow b \le 20 \quad (1)$

Mặt khác ta có $\begin{cases} 1978172385 \vdots 7 \\ 7^a \vdots 7 \\ 2009a \vdots 7 \end{cases}$ nên suy ra $b^7 \vdots 7 \Rightarrow b \vdots 7 \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $b = 7$ hoặc $b = 14$

- **Trường hợp** $b = 7$**:** từ $(*)$ ta có thuật toán để tìm a như sau:

  $\sqrt[7]{1978172385 - 7^A - 2009A} : A = A + 1$, bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 0$. Nếu sau một số lần bấm phím $'='$ mà giá trị của biểu thức $\sqrt[7]{1978172385 - 7^A - 2009A}$ có giá trị bằng 7 thì bấm phím $'='$ một lần nữa rồi lấy giá trị hiển thị trên màn hình trừ đi 1 ta được giá trị của a cần tìm, nếu sau một số lần bấm phím $'='$ mà giá trị của biểu thức $\sqrt[7]{1978172385 - 7^A - 2009A}$ lớn hơn 7 thì dừng, tức là khi đó không tìm được giá trị nào của a thỏa bài toán. Với thuật toán và ý tưởng trên ta tìm được $a = 11; b = 7$ thỏa yêu cầu bài toán.

- **Trường hợp** $b = 14$**:** từ $(*)$ ta có thuật toán để tìm a như sau:

  $\sqrt[7]{1978172385 - 7^A - 2009A} : A = A + 1$, bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 0$. Nếu sau một số lần bấm phím $'='$ mà giá trị của biểu thức $\sqrt[7]{1978172385 - 7^A - 2009A}$ có giá trị bằng 14 thì bấm phím $'='$ một lần nữa rồi lấy giá trị hiển thị trên màn hình trừ đi 1 ta được giá trị của a cần tìm, nếu sau một số lần bấm phím $'='$ mà giá trị của biểu thức $\sqrt[7]{1978172385 - 7^A - 2009A}$ lớn hơn 14 thì dừng, tức là khi đó không tìm được giá trị nào của a thỏa bài toán. Với thuật toán và ý tưởng trên thì trường hợp này ta không tìm được giá trị nào của a, b thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số thỏa yêu cầu bài toán là $a = 11; b = 7$

Ví dụ 7. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất có 6 chữ số biết rằng khi chia n cho 15 và 17 thì các số dư lần lượt là 7 và 5.

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của TP.HCM, 2009-2010

Hướng dẫn

Vì khi chia n cho 15 và 17 thì các số dư lần lượt là 7 và 5 nên tồn tại các số tự nhiên k,l sao cho

$$n = 15k + 7 = 17l + 5 \Rightarrow k = \frac{17l - 2}{15} \quad (1)$$

Vì số n thỏa yêu cầu bài toán là số tự nhiên nhỏ nhất có 6 chữ số nên suy ra

$$n \geq 10^6 \Rightarrow 17l + 5 \geq 10^6 \Rightarrow l \geq 58823,23529 \Rightarrow l \geq 58824 \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ ta có thuật toán để tìm k,l như sau: $(17A - 2) \div 15 : A = A + 1$. Bấm phím CALC để nhập giá trị $A = 58824$, sau đó bấm phím $'='$ cho đến khi nào giá trị của biểu thức $(17A - 2) \div 15$ là số tự nhiên thì bấm thêm phím $'='$ một lần nữa rồi lấy giá trị hiển thị trên màn hình máy tính điện tử trừ đi 1 thì ta được giá trị của l, khi đó tìm được giá trị của n thỏa yêu cầu bài toán. Với ý tưởng và thuật toán trên ta tìm được giá trị $l = 5896$, suy ra giá trị cần tìm là $n = 100237$

Nhận xét về phương pháp giải toán:

Qua các ví dụ đã trình bày ở phần trên, ý tưởng tiếp cận chủ đạo cho dạng bài toán này là: *định hướng chuyển từ miền giá trị của số cần tìm (thường có miền giá trị rất rộng nên không khả thi khi thử đúng sai trực tiếp trên máy tính điện tử) qua miền giá trị của số phụ ta đưa vào (thường có miền giá trị nhỏ), để từ đó thử đúng sai trực tiếp trên máy tính điện tử để đi đến đáp số cuối cùng*. Thao tác này chúng tôi tạm gọi là thao tác "*co hẹp miền giá trị của biến*" – thao tác mang tính quyết định của ý tưởng tìm tòi lời giải cho dạng bài toán này.

Những kĩ năng cần rèn luyện để tiếp cận và giải quyết dạng toán này là: kĩ năng giới hạn miền giá trị của số cần tìm, kĩ năng lập trình trên máy tính điện tử, kĩ năng giải phương trình và hệ phương trình nghiệm nguyên…

2. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Số chính phương M có dạng $M = \overline{1mn399025}$ chia hết cho 9. Tìm các chữ số m,n

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT cấp khu vực, 2008-2009

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n + 1930 và n + 2539 đều là số chính phương

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của TP.HCM, 2010-2011

Bài 3. Tìm số tự nhiên x lớn nhất có 10 chữ số biết x chia cho 11 dư 2, chia cho 17 dư 3 và chia cho 23 dư 4

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của TP.HCM, 2011-2012

Bài 4. Số chính phương P có dạng $P = \overline{3a01b6c29}$. Tìm các chữ số a,b,c biết rằng

$a^3 + b^3 + c^3 = 349$

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của Thừa Thiên Huế, 2009-2010

Bài 5. Số chính phương Q có dạng $Q = \overline{65c3596d4}$. Tìm các chữ số c,d biết rằng tổng các chữ số của Q chia hết cho 5

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của Thừa Thiên Huế, 2009-2010

Bài 6. Tìm các số $\overline{aabb}$ sao cho $\overline{aabb} = \overline{(a+1)(a+1)} \times \overline{(b-1)(b-1)}$

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của Thừa Thiên Huế, 2008-2009

Bài 7. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho khi lập phương số đó ta được số tự nhiên có 3 chữ số cuối đều là chữ số 7 và 3 chữ số đầu cũng đều là chữ số 7: $n^3 = \overline{777.....777}$.

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của Thừa Thiên Huế, 2008-2009

Bài 8. Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất và số tự nhiên M lớn nhất gồm 12 chữ số, biết rằng M và N chia cho các số 1256; 3568 và 4184 đều cho số dư là 973.

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của Thừa Thiên Huế, 2008-2009

Bài 9. Tìm số tự nhiên bé nhất mà lập phương số đó có 4 chữ số cuối bên phải đều là chữ số 3.

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của Thừa Thiên Huế, 2007-2008

Bài 10. Tìm số chính phương A = $\overline{1mn399025}$ chia hết cho 9

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của huyện Tuy Phước - Bình Định, 2010-2011

Bài 11. Tìm các chữ số a , b và số tự nhiên n biết: $\overline{a7b}$. n = 28159

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của tỉnh Yên Bái, 2005-2006

Nguyễn Văn Chạy
Giáo viên trường THCS&THPT Bàu Hàm, xã Bàu Hàm, huyện Trảng Bom, tỉnh Đồng Nai
Số nhà: 21/5, khu 4, ấp Hưng Bình, xã Hưng Thịnh, huyện Trảng Bom, tỉnh Đồng Nai.
Email: vanchaybauham@gmail.com
Điện thoại: 0935.237.247