

Chuyên đề 4

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. Các điều kiện và tính chất cơ bản :

- * $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$
- * $\sqrt{A} \geq 0$ với $A \geq 0$
- * $\sqrt{A^2} = |A|$ & $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
- * $(\sqrt{A})^2 = A$ với $A \geq 0$
- * $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ khi $A, B \geq 0$
- * $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{-A} \cdot \sqrt{-B}$ khi $A, B \leq 0$

II. Các định lý cơ bản : (quan trọng)

- | | |
|--|------------------------|
| a) Định lý 1 : Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì | $A = B \iff A^2 = B^2$ |
| b) Định lý 2 : Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì | $A > B \iff A^2 > B^2$ |
| c) Định lý 3 : Với A và B bất kỳ thì | $A = B \iff A^2 = B^2$ |

III. Các phương trình và bất phương trình căn thức cơ bản & cách giải :

Phương pháp chung để giải loại này là **KHỬ CĂN THỨC** bằng **phép nâng lũy thừa**.

- * **Dạng 1 :** $\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ (hoặc $B \geq 0$)
- * **Dạng 2 :** $\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- * **Dạng 3 :** $\sqrt{A} < B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$
- * **Dạng 4 :** $\sqrt{A} > B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$

IV. Các cách giải phương trình căn thức thường sử dụng :

* Phương pháp 1 : **Biến đổi về dạng cơ bản**

Ví dụ 1 : Giải phương trình sau : $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} + x - 2 = 0$

Ví dụ 2 :

Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 3 :

Giải phương trình sau: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$.

* Phương pháp 2 : **Đặt điều kiện (nếu có) và nâng lũy thừa để khử căn thức**

Ví dụ : Giải phương trình sau : $\sqrt{2x+9} - \sqrt{4-x} = \sqrt{3x+1} \quad (1)$

* Phương pháp 3 : **Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình hoặc hệ pt đại số**

Phương pháp:

Bước 1: Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có).

Bước 2: Chuyển PT đã cho về PT chứa ẩn phụ. Giải PT chứa ẩn phụ. Đối chiếu với điều kiện ẩn phụ đã nêu để tìm nghiệm thích hợp của PT này.

Bước 3: Tìm nghiệm của PT ban đầu theo hệ thức khi đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1 :

Giải các phương trình sau :

$$1) (x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$$

$$2) \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$$

Ví dụ 2 :

Giải phương trình $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 3 :

Giải phương trình $(x+4)^2 - 6\sqrt{x^3+3x} = 13$.

* Phương pháp 4 : **Biến đổi phương trình về dạng tích số : $A.B = 0$ hoặc $A.B.C = 0$**

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

$$1) \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$$

$$2) x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$$

Ví dụ 2 : Giải các phương trình sau :

$$1) \sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$$

$$2) \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$3) \sqrt{x^2 + 2x + 22} + \sqrt{x} = x^2 + 2x + 3$$

$$4) x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x + 10}$$

$$5) 2x^2 - 11x + 21 = \sqrt[3]{4x - 4}$$

V. Các cách giải bất phương trình căn thức thường sử dụng :

* Phương pháp 1 : Biến đổi về dạng cơ bản

Ví dụ 1:

Giải các bất phương trình sau :

$$1) \sqrt{x^2 - 4x + 3} < x + 1$$

$$2) \sqrt{(x+1)(4-x)} > x - 2$$

Ví dụ 2:

Giải bất phương trình $2(x-2)(\sqrt{x+1}+1) < 5x-x^2$.

* Phương pháp 2 : Đặt điều kiện (nếu có) và nâng lũy thừa để khử căn thức

Ví dụ : Giải bất phương trình sau :

$$\sqrt{x+11} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-4} \quad (1)$$

* Phương pháp 3 : Đặt ẩn phụ chuyển về bất phương trình đại số (hoặc bpt căn cơ bản)

Ví dụ 1: (B-2012)

Giải bất phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1} \geq 3\sqrt{x}$.

Ví dụ 2:

Giải bất phương trình $x\sqrt{x} + \frac{7-2x}{\sqrt{x}} > 4\sqrt{x+\frac{4}{x}-2}$.

* Phương pháp 4 : Biến đổi phương trình về dạng tích số hoặc thương

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

$$1) (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$$

$$2) \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} < 1$$

VI. Hệ phương trình có chứa căn thức :

Các phương pháp thường sử dụng:

1. Sử dụng phép thế

2. Sử dụng phép cộng

4. Biến đổi về dạng tích số

5. Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{5x+4y} = 5 \\ 12\sqrt{5x+4y} + x - 2y = 35 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5xy - 7x + 3y + 2 = 0 \\ x^3 + \sqrt{x-1} = y^3 + \sqrt{y-1} \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16} = 2 + \sqrt{y-3x} \end{cases}$$

CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-6} = \sqrt{x-9}$

Kết quả: $x = 10$

2) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2(x + 1)$

Kết quả: $x = \pm 1$

3) $\sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} + \sqrt{(2+x)(6-x)} = 8$

Kết quả: $x = 2$

4) $\frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}$

Kết quả: $x = 1 \text{ Ú } x = \frac{9}{16}$

5) $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

Kết quả: $x = -1$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

1) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-6} \leq \sqrt{x-9}$

Kết quả: $9 \leq x \leq 10$

2) $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

Kết quả: $x^3 \geq 10 - \sqrt{34}$

3) $\frac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1-x} < 1$

Kết quả: $\frac{9}{16} - \sqrt{52} \leq x < -5$
 $\frac{9}{16} > 1$

4) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$

Kết quả: $1 \leq x \leq 2 \text{ Ú } x^3 \geq 10$

5) $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} > \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$

Kết quả: $x > \frac{17}{3}$

-----Hết-----