

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

LÊ TRUNG TÍN

Email: letrungtin87@gmail.com

Mục lục

1. Phương pháp Nâng lũy thừa	1
2. Phương pháp đưa về phương trình tích	4
3. Phương pháp trục căn thức	7
4. Phương pháp đặt ẩn phụ	10
4.1. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình một biến	10
4.2. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp	13
4.3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình	17
5. Phương pháp Hằng số biến thiên, tham số biến thiên	25
6. Phương pháp đánh giá	26
7. Phương pháp hàm số	30
8. Phương pháp lượng giác hóa	35

1. Phương pháp Nâng lũy thừa

1 Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{7}$.

Với điều kiện, phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} &= x - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} \\ \Rightarrow x^2 - \frac{7}{x^2} &= x^2 + \left(x - \frac{7}{x^2}\right) - 2x\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} \\ \Leftrightarrow x \left(1 - 2\sqrt{x - \frac{7}{x^2}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} &= 0 \quad (\text{Do } x > 0) \\ \Leftrightarrow (x - 2)(4x^2 + 7x + 14) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2\end{aligned}$$

Thử lại nghiệm ta được $x = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{2\}$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x+3}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1$

Với điều kiện, phương trình tương đương ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+3} &= \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x+3} + x+3 &= x^2-x+1 + x+1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x+3} &= x^2-x-1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases} & \text{(thỏa điều kiện)}\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$$

3 Giải phương trình:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} &= \sqrt{4x} - \sqrt{x+3} \\ \Rightarrow \sqrt{6x^2+8x+2} &= \sqrt{4x^2+12x} \\ \Rightarrow x &= 1\end{aligned}$$

Thử lại nghiệm ta được $x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1\}$$

4 Giải phương trình:

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{2(x^3 + 1)}$$

Nhận xét: Việc tìm điều kiện của phương trình này không dễ. Do đó, ta chỉ cần bình phương 2 vế của phương trình ta nhận được phương trình hệ quả. Tìm nghiệm của phương trình hệ rồi thử lại nghiệm ta sẽ được nghiệm của phương trình đã cho.

Lời giải

Bình phương 2 vế của phương trình, ta được:

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{x^2 - 1}) + (x + \sqrt{x^2 - 1}) + 2 &= 2(x^3 + 1) \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Thử lại nghiệm, ta được $x = 1$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1\}$$

5 Giải phương trình:

$$x + 1 = \sqrt[3]{4x^2 + 5x}$$

Lời giải

Lập phương hai vế của phương trình đã cho và biến đổi, ta được:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0(1)$$

Đặt $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, do đó ta được:

$$\begin{cases} f(-2) = -7 \\ f(-1) = 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

Ta suy ra được:

$$\begin{cases} f(-2) \cdot f(-1) < 0 \\ f(-1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(2) < 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2; 2)$.

Đặt $x = 2 \cos \alpha$ với $\alpha \in (0; \pi)$

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$\begin{aligned} 8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) &= 4(1 - \sin^2\alpha) - 1 \\ \Leftrightarrow 4\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha &= 3 - 4\sin^2\alpha \\ \Leftrightarrow 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad (\text{do } \sin\alpha > 0) \\ \Leftrightarrow \sin 4\alpha &= \sin 3\alpha \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k2\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{7} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases} & \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vì $\alpha \in (0; \pi)$ nên $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} \right\}$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{7}; 2 \cos \frac{3\pi}{7}; 2 \cos \frac{5\pi}{7} \right\}$$

6 Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})^3 \\ \Leftrightarrow 3x+1 &= 3x-2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) \\ \Leftrightarrow 1 &= \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình ban đầu ta được

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x+1)} &= 1 \\ \Leftrightarrow 6x^3 - 7x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{7}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại, ta được $x = \frac{7}{6}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{7}{6} \right\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $\sqrt{2x^2 + 16x + 18} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4$

5. $\sqrt{3x+19} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{7x+11} + \sqrt{2x}$

2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$

6. $2\sqrt{(2-x)(5-x)} = x + \sqrt{(2-x)(10-x)}$

3. $\sqrt{1+x^2} - x = \frac{5}{2\sqrt{1+x^2}}$

7. $3x^2 + 2\sqrt{x+3}(2-x) = 5x + 3$

4. $\sqrt{1+x^2} = \frac{3x}{1-x}$

2. Phương pháp đưa về phương trình tích

1 Giải phương trình:

$$2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 + \sqrt{1 - x^2}$$

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} 2x + 4x^2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2} &= 4x^3 + \sqrt{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow 2(x - \sqrt{1 - x^2}) + 4x^2(\sqrt{1 - x^2} - x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - 4x^2)(x - \sqrt{1 - x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ x - \sqrt{1 - x^2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 1 - x^2 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ thỏa điều kiện} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{x} = \frac{3}{8} + 2x$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$ Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} 16\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} + 1 &= 16x + 16\sqrt{x} + 4 \\ \Leftrightarrow (4\sqrt[4]{x} + 1)^2 - (4\sqrt{x} + 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 1)(4\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 1 = 0 \\ 4\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (2\sqrt[4]{x} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{1}{16} \right\}$$

3 Giải phương trình:

$$2x - 3\sqrt[3]{4x^2 + 4x + 1} = x^3 - 3\sqrt[3]{2x + 1}$$

Lời giải

Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(2x+1)^3} - 3\sqrt[3]{(2x+1)^2} + 3\sqrt[3]{2x+1} - 1 = x^3 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt[3]{2x+1} - 1)^3 = x^3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{2x+1} = x+1 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 3x^2 + x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm:

$$S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 0 \right\}$$

4 Giải phương trình:

$$x^4 + 18x^3 + 88x^2 + 197x + 163 = \sqrt{x+9}(x^3 + 16x^2 + 55x + 84)$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -9$

Với điều kiện, phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} & (x+2)(x^3 + 16x^2 + 55x + 84) + (x+2)^2 = \sqrt{x+9}(x^3 + 16x^2 + 55x + 84) + (\sqrt{x+9})^2 \\ \Leftrightarrow & (x^3 + 16x^2 + 55x + 84)(x+2 - \sqrt{x+9}) + (x+2 - \sqrt{x+9})(x+2 + \sqrt{x+9}) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+2 - \sqrt{x+9})((x+9)(x+2)^2 + 3(x+9) + 3(x+2)^2 + x+11 + \sqrt{x+9}) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $x \geq -9$ nên $(x+9)(x+2)^2 + 3(x+9) + 3(x+2)^2 + x+11 + \sqrt{x+9} > 0$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow x+2 - \sqrt{x+9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{29} - 3}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{29} - 3}{2} \right\}$$

5 Giải phương trình:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left(\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$.

Bình phương 2 vế phương trình ta có:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{1 - x^2})(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})^2(2 + \sqrt{1 - x^2})^2 &= (2 + \sqrt{1 - x^2})^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \sqrt{1 - x^2})^2 = 0 \\ (1 + \sqrt{1 - x^2})(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $(2 + \sqrt{1 - x^2})^2 = 0$ vô nghiệm

Trường hợp 2: $(1 + \sqrt{1 - x^2})(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})^2 - 1 = 0$

Đặt $t = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$

Ta có $t^2 = 2 - 2\sqrt{1 - x^2}$ (*), suy ra $\sqrt{1 - x^2} = \frac{2 - t^2}{2}$, ta có: $t^2 \leq 2$

Thay vào phương trình ta được:

$$(4 - t^2)t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -t^4 + 4t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 2 + \sqrt{2} \text{ (loại vì } t^2 \leq 2) \\ t^2 = 2 - \sqrt{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Thay $t^2 = 2 - \sqrt{2}$ vào (*) ta có:

$$-\sqrt{2} = -2\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow 4(1 - x^2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Thử lại chỉ có nghiệm $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} + 2x = \sqrt{4x^4 - 16x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$
2. $x^2 + 22x + 5 = 16\sqrt{2x + 51}$
3. $x + \frac{4x}{x + 4\sqrt{x} + 4} = 12$
4. $\sqrt[4]{x} = \frac{3}{8} + 2x$
5. $9x^2 + 3\sqrt{9 - x}(2x - 1) - 10x + 11 = 0$
6. $(\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3})(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 15}) = 8$

3. Phương pháp trực căn thức

1 Giải phương trình:

$$\sqrt{x} = 1 - \sqrt[3]{3x^2 + x - 1} + \sqrt[3]{2x + 1}$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} - 1 + \sqrt[3]{3x^2 + x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{(x-1)(3x+2)}{\sqrt[3]{(3x^2+x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x^2+x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{3x+2}{\sqrt[3]{(3x^2+x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x^2+x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 & (\text{thỏa điều kiện}) \\ \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{3x+2}{\sqrt[3]{(3x^2+x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x^2+x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = 0 & (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Do $x \geq 0$ nên vế trái của phương trình trên luôn lớn hơn 0, suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1\}$$

Nhận xét: Để chứng minh phương trình (*) vô nghiệm ta đã sử dụng $x \geq 0$ để chứng minh $3x+2 > 0$ và sử dụng kết quả $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ để chứng minh

$$\sqrt[3]{(3x^2+x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x^2+x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2} > 0$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} - \sqrt{3x} = x - 6$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Nhân liên hợp lần đầu cho vế phải phương trình tương đương:

$$\frac{\sqrt{7x^2 + 11x + 6} - 3x}{\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} + \sqrt{3x}} = x - 6$$

Tiếp tục nhân liên hợp ta lại được phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} & \frac{-2x^2 + 11x + 6}{(\sqrt{7x^2 + 11x + 6} + 3x)(\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} + \sqrt{3x})} = x - 6 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-6)(2x+1)}{(\sqrt{7x^2 + 11x + 6} + 3x)(\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} + \sqrt{3x})} + x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-6) \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{7x^2 + 11x + 6} + 3x)(\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} + \sqrt{3x})} + 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=6 & (\text{thỏa điều kiện}) \\ \frac{2x+1}{(\sqrt{7x^2 + 11x + 6} + 3x)(\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} + \sqrt{3x})} + 1 = 0 & (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Do $x \geq 0$ nên vế trái của phương trình trên luôn lớn hơn 0, suy ra phương trình (*) vô nghiệm.
 Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{6\}$$

3 Giải phương trình:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$ hoặc $x \leq -2$.

Với điều kiện phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4 \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}} (\sqrt{2x-1} - 3) = 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-1} - \sqrt{x+6} = 3 - \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow & \frac{x-7}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+6}} = \frac{7-x}{\sqrt{x+2} + 3} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 7 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+6}} = \frac{-1}{\sqrt{x+2} + 3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 7 \end{aligned}$$

Thử lại, ta nhận $x = 7$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{7\}$$

4 Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$$

Lời giải

Điều kiện $x > -4$

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1}} = x+4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1} = 2 \end{aligned}$$

Kết hợp phương trình trên và phương trình đã cho, ta được hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1} = 2 \\ \sqrt{2x^2+x+9} + \sqrt{2x^2-x+1} = x+4 \end{cases}$$

Suy ra:

$$2\sqrt{2x^2+x+9} = x+6 \Leftrightarrow 7x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện, ta được $x = 0; x = \frac{8}{7}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ 0; \frac{8}{7} \right\}$$

5 Giải phương trình:

$$3x^2 - 4x - 15 = 2\sqrt{2x^2 - 2x - 5}$$

Lời giải

Điều kiện $x \leq -\frac{5}{3}$ hoặc $x \geq 3$

Nếu $\sqrt{2x^2 - 2x - 5} + x = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{6}$ thì không thỏa phương trình

Nếu $\sqrt{2x^2 - 2x - 5} + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 - \sqrt{6}$ thì phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - 15 - 2x &= 2\sqrt{2x^2 - 2x - 5} - 2x \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 15 &= \frac{2(x^2 - 2x - 5)}{\sqrt{2x^2 - 2x - 5} + x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 5 = 0 \\ 3 = \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 2x - 5} + x} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{6} & (\text{không thỏa điều kiện}) \\ x = 1 + \sqrt{6} & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

$$\text{Với } 3 = \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 2x - 5} + x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - 5\sqrt{2}}{3} & (\text{thỏa điều kiện}) \\ x = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{3} & (\text{không thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ 1 + \sqrt{6}, \frac{1 - 5\sqrt{2}}{3} \right\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $\sqrt[3]{15 - x^3} + 3x^2 - 3x = 2\sqrt{x^2 - 4x + 2} + 3 - x$

2. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - 11x + 33} + \sqrt{3x - 5}$

3. $2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 14} = x - 2$

4. $\sqrt{(4 - x)(x - 2)} + 3\sqrt{x - 2} - 12\sqrt{4 - x} + 21x - 82 = 0$

5. $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$

6. $x^2 + 4x = \sqrt{x + 6}$

7. $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

4.1. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình một biến

1 Giải phương trình:

$$\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = 7 - x^2 - 2x$$

Lời giải

Điều kiện $-1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq -1 + 2\sqrt{2}$

Đặt $t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1}$, điều kiện $t \geq 0$, suy ra: $t^2 = 5(x^2 + 2x) + 1$

Phương trình trở thành

$$t^2 + 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 & (\text{không thỏa điều kiện}) \\ t = 4 & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

Với $t = 4$, ta được:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{-3; 1\}$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1$

Ta thấy: $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 1$

Đặt $t = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

Phương trình trở thành

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} &= x - 1 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \quad (\text{thỏa điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1\}$$

3 Giải phương trình:

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$$

Lời giải

Đk $x > 1$ hoặc $x < -1$.

Với điều kiện, phương trình tương đương:

$$x^2 + \frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left(\frac{35}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2 - 1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left(\frac{35}{12}\right)^2$$

Đặt $t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, điều kiện $t > 0$

Phương trình trở thành:

$$t^2 + 2t - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{12} \quad (\text{Do } t > 0)$$

Với $t = \frac{25}{12}$, ta được

$$144x^4 - 625x^2 + 625 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5}{3} \\ x = \pm \frac{5}{4} \end{cases}$$

Thử nghiệm, ta được $x = \frac{5}{3}; x = \frac{5}{4}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{5}{3}; \frac{5}{4} \right\}$$

4 Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(x+1)(8-x)} = 3$$

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 8$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(x+1)(8-x)}$, điều kiện $t \in [3; 3\sqrt{2}]$

Phương trình trở thành

$$t + \frac{t^2 - 9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 & (\text{không thỏa điều kiện}) \\ t = 3 & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

Với $t = 3$, ta được

$$\sqrt{(x+1)(8-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 8 \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{-1; 8\}$$

5 Giải phương trình:

$$x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$$

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq x < 0$ hoặc $x \geq 1$

Với điều kiện, phương trình tương đương

$$x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$, điều kiện $t \geq 0$

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t^2 + 2t - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{thỏa điều kiện}) \\ t = -3 & (\text{không thỏa điều kiện}) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 1$, ta được

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại, ta được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

6 Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{x+2}{2}} - 1 = \sqrt[3]{3(x-3)^2} + \sqrt[3]{9(x-3)}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -2$

Đặt: $t = \sqrt[3]{\frac{x-3}{3}}$

Suy ra:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3(x-3)^2} = 3t^2 \\ \sqrt[3]{9(x-3)} = 3t \\ \sqrt{\frac{x+2}{2}} - 1 = \sqrt{\frac{3t^3+5}{2}} - 1 \end{cases}$$

Do đó, phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3t^3+5}{2}} &= 3t^2 + 3t + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3t^3+5}{2} &= (3t^2 + 3t + 1)^2 \\ \Leftrightarrow -3(t+1)(6t-1)(t^2+t+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = -1$, ta được: $\sqrt[3]{\frac{x-3}{3}} = -1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = \frac{1}{6}$, ta được $\sqrt[3]{\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{217}{72}$

Thử lại, ta được $x = 0; x = \frac{217}{72}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{ 0; \frac{217}{72} \right\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

$$1. 16x^2 \sqrt{\frac{1}{2x^2} - 1} + \sqrt{(8x^2 + 9)(13 - 8x^2)} = 15$$

$$5. x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$$

$$2. (x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$$

$$6. x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$$

$$3. x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$$

$$7. x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$$

$$4. (\sqrt{x^2+1} - x)^5 + (\sqrt{x^2+1} + x)^5 = 2$$

$$8. \sqrt{3\sqrt[3]{x}+1} = \sqrt[3]{2\sqrt{x+1}-1}$$

4.2. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

1 Giải phương trình:

$$3\sqrt{x^2+4x-5} + \sqrt{x-3} - \sqrt{11x^2+25x+2} = 0$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 3$ Bình phương hai vế ta được:

$$-2x^2 + 12x - 50 + 6\sqrt{x^2+4x-5} \cdot \sqrt{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x^2+4x-5) + 20(x-3) + 6\sqrt{x^2+4x-5} \cdot \sqrt{x-3} = 0$$

Đặt $u = \sqrt{x-3}, v = \sqrt{x^2+4x-5}$, điều kiện $u, v \geq 0$ Phương trình trở thành

$$-2v^2 + 6uv + 20u^2 = 0 \quad (1)$$

Với $u = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $u \neq 0$, phương trình (1) tương đương:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 3\left(\frac{v}{u}\right) + 10 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{v}{u} = 5 \\ \frac{v}{u} = -2 \end{cases} \quad (\text{Không thỏa điều kiện của } u \text{ và } v) \\ \Leftrightarrow & v = 5u \end{aligned}$$

Với $v = 5u$, ta được:

$$x^2 - 21x + 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21 + \sqrt{161}}{2} \\ x = \frac{21 - \sqrt{161}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{21 - \sqrt{161}}{2}; \frac{21 + \sqrt{161}}{2} \right\}$$

2 Giải phương trình:

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$$

Nhận xét: Ta thấy $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ và $x^2 + 2 = (x + 1) + (x^2 - x + 1)$. Từ đó ta có cách giải sau:

Lời giải

Điều kiện $x \geq -1$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{x^2-x+1} \end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0$

Phương trình trở thành

$$2(u^2 + v^2) = 5uv \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u = \frac{v}{2} \end{cases}$$

Với $u = 2v$, ta được $4x^2 - 5x + 3 = 0$ (vô nghiệm)

Với $u = \frac{v}{2}$, ta được $x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \right\}$$

3 Giải phương trình:

$$x^2 - 7x + 1 = 4\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

Nhận xét: Do $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ nên ta tìm cách biến đổi

$$x^2 - 7x + 1 = a(x^2 - x + 1) + b(x^2 + x + 1)$$

Dễ dàng tìm được $a = 4$ và $b = -3$. Từ đó, ta có cách giải sau:

Lời giải

Điều kiện $x \leq \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x \geq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - x + 1} \\ v = \sqrt{x^2 + x + 1} \end{cases}$, điều kiện $u, v > 0$

Phương trình trở thành

$$4u^2 - 4uv - 3v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3v}{2} & (\text{thỏa điều kiện}) \\ u = -\frac{v}{2} & (\text{không thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

Với $u = \frac{3v}{2}$, ta được

$$5x^2 + 13x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-13 + \sqrt{69}}{10} \\ x = \frac{-13 - \sqrt{69}}{10} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{-13 - \sqrt{69}}{10}; \frac{-13 + \sqrt{69}}{10} \right\}$$

4 Giải phương trình:

$$2x^2 - 5x + 22 = 5\sqrt{x^3 - 11x + 20}$$

Nhận xét: Do $x^3 - 11x + 20 = (x + 4)(x^2 - 4x + 5)$ nên ta tìm cách biến đổi

$$2x^2 - 5x + 22 = a(x + 4) + b(x^2 - 4x + 5)$$

Dễ dàng tìm được $a = 3$ và $b = 2$. Từ đó, ta có cách giải sau:

Lời giải

Điều kiện $x \geq -4$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ v = \sqrt{x + 4} \end{cases}, \text{ điều kiện } u > 0, v \geq 0$$

Phương trình trở thành

$$3v^2 - 5uv + 2u^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{2u}{3} \\ v = u \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Với $v = u$, ta được

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Với $v = \frac{2u}{3}$, ta được

$$4x^2 - 25x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25 - \sqrt{881}}{8} \\ x = \frac{25 + \sqrt{881}}{8} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{25 - \sqrt{881}}{8}; \frac{5 + \sqrt{21}}{2}; \frac{25 + \sqrt{881}}{8} \right\}$$

5 Giải phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} = 6x$$

Lời giải Điều kiện: $x \geq -2$

Phương trình được viết lại như sau:

$$x^3 - 3x(x+2) + 2(x+2)\sqrt{x+2} = 0$$

Đặt $y = \sqrt{x+2}$ điều kiện $y \geq 0$.

Ta có:

$$x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \end{cases}$$

Với $x = y$, ta có:

$$x = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Với $x = -2y$ ta có:

$$\frac{-x}{2} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - 2\sqrt{3}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{2; 2 - 2\sqrt{3}\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$

2. $x^2 + 2 = 2\sqrt{x^3 + 1}$

3. $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

4. $\sqrt{x(x+1)(x+2)} = x^2 - x - 4$

5. $\sqrt{x^8 - 14x^4 + 1} = x^4 - 12x^2 + 1$

6. $\frac{x - 3x^2}{2} + \sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 2$

7. $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

8. $x^2 + 5x + 2 = 4\sqrt{x^3 + 3x^2 + x - 1}$

9. $x\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 4x^2 - 5x - 3$

10. $\frac{x + 17\sqrt{x} + 17}{17\sqrt{x} + 8} = \frac{34\sqrt{x} + 16}{x + 9}$

11. $x\sqrt{x^2 + 2x + 2} = -3(x + 1)$

12. $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = \sqrt{x^5 + x^4 + 1}$

4.3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

1 Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt[3]{x-1} = a$; $\sqrt[3]{x-2} = b$; $\sqrt[3]{2x-3} = c$

Khi đó, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a + b = c \\ a^3 + b^3 = c^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = c^3 & (1) \\ a^3 + b^3 = c^3 & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được

$$3abc = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Thử lại nghiệm, ta được $x = 1, x = 2, x = \frac{3}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ 1; \frac{3}{2}; 2 \right\}$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt{\sqrt{2}-1-x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq \sqrt{2}-1$

Đặt $\sqrt{\sqrt{2}-1-x} = a$ và $\sqrt[4]{x} = b$, điều kiện $a, b \geq 0$ ta được hệ

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ a^2 + b^4 = \sqrt{2}-1 \end{cases}$$

Thế vào ta được:

$$\begin{aligned} & b^4 + b^2 - \frac{2b}{\sqrt[4]{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - (b^4 + b^2 + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = -b - b^2 - 1 & (\text{vô nghiệm}) \\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = -b + b^2 + 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow b^2 - b + 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt[4]{8}-3}}{2} \\ b = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt[4]{8}-3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $b = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt[4]{8} - 3}}{2}$, ta có $x = \left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt[4]{8} - 3}}{2}\right)^4$ (thỏa điều kiện).

Với $b = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt[4]{8} - 3}}{2}$, ta có $x = \left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt[4]{8} - 3}}{2}\right)^4$ (thỏa điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt[4]{8} - 3}}{2}\right)^4; \left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt[4]{8} - 3}}{2}\right)^4 \right\}$$

3 Giải phương trình:

$$\frac{6 - 2x}{\sqrt{5 - x}} + \frac{6 + 2x}{\sqrt{5 + x}} = \frac{8}{3}$$

Lời giải

Điều kiện: $-5 < x < 5$.

Đặt $a = \sqrt{5 + x}$; $b = \sqrt{5 - x}$, điều kiện $a, b > 0$.

Khi đó ta có:

$$6 - 2x = 2b^2 - 4; \quad 6 + 2x = 2a^2 - 4$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2ab(a + b) - 4(a + b) = \frac{8}{3}ab \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab(a + b) - 4(a + b) = \frac{8}{3}ab \\ (a + b)^2 - 2ab = 10 \end{cases}$$

Đặt: $S = a + b$; $P = ab$, ta có: $S \leq \sqrt{10}$.

Hệ phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} 2SP - 4S = \frac{8}{3}P \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $S = 4$ và $P = 3$.

Với $P = 3$, ta được

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4 \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{-4; 4\}$$

4 Giải phương trình:

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = 3$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^3 + x^2 + 2} \\ v = \sqrt{x^3 + x^2 - 1} \end{cases}$, điều kiện: $u, v \geq 0$

Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 - v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Với $v = 1$, ta được $(x - 1)(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại, ta nhận $x = 1$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1\}$$

5 Giải phương trình:

$$x = \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{3-x} + \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{2-x}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2-x} \\ b = \sqrt{3-x} \\ c = \sqrt{5-x} \end{cases}, \text{ điều kiện } a, b, c > 0$$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2 - a^2 = ab + bc + ca \\ 3 - b^2 = ab + bc + ca \\ 5 - c^2 = ab + bc + ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+c) = 2 \\ (a+b)(b+c) = 3 \\ (a+c)(b+c) = 5 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$\begin{cases} a+b = \sqrt{\frac{6}{5}} \\ a+c = \sqrt{\frac{10}{3}} \\ b+c = \sqrt{\frac{15}{2}} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{30}}$$

$$\text{Với } a = \frac{1}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow x = \frac{239}{120}$$

$$\text{Thử lại, ta nhận } x = \frac{239}{120}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất

$$S = \left\{ \frac{239}{120} \right\}$$

6 Giải phương trình:

$$\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x \geq \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ hoặc } -1 \leq x < 0$$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}} = x - \frac{4}{x}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \\ v = \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \geq 0$$

Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u - v = x - \frac{4}{x} \\ v^2 - u^2 = x - \frac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v \quad (\text{Do } u + v + 1 > 0)$$

$$\text{Với } u = v, \text{ ta được } x - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{Thử lại, ta nhận } x = 2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{2\}$$

7 Giải phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện, phương trình tương đương:

$$x + \sqrt{2-x^2} = 2.x.\sqrt{2-x^2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a \\ \sqrt{2-x^2} = b \end{cases} \quad (b > 0)$$

Khi đó, ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b = 2ab \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = 4(ab)^2 \quad (1) \\ a^2 + b^2 = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được:

$$2(ab)^2 - ab - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ ab = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{b} \\ a = -\frac{1}{2b} \end{cases}$$

- Thế $a = \frac{1}{b}$ vào (2), ta được:

$$b^4 - 2b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

- Với $b = 1$, ta được $x = a = 1$.
- Thế $a = -\frac{1}{2b}$, ta được

$$4b^4 - 8b^2 + 1 = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \quad (\text{Do } b > 0)$$

- Với $b = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}$, ta được $x = a = \frac{\pm 1 - \sqrt{3}}{2}$

Thử lại, ta nhận $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$$

8 Giải phương trình:

$$3x^2 - 4x - 15 = 2\sqrt{2x^2 - 2x - 5}$$

Lời giải

Điều kiện $x \leq -\frac{5}{3}$ hoặc $x \geq 3$

Phương trình tương đương:

$$2(2x^2 - 2x - 5) - 2\sqrt{2x^2 - 2x - 5} - 5 = x^2$$

Đặt $y = \sqrt{2x^2 - 2x - 5}$, điều kiện $y \geq 0$

Ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2y^2 - 2y - 5 = x^2 & (1) \\ 2x^2 - 2x - 5 = y^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1), ta được

$$3(x^2 - y^2) - 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 3y = 2 - 3x \end{cases}$$

Với $y = x$, ta được

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{6} & (\text{không thỏa điều kiện}) \\ x = 1 + \sqrt{6} & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

Với $3y = 2 - x$, ta được

$$9x^2 - 6x - 49 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - 5\sqrt{2}}{3} & (\text{thỏa điều kiện}) \\ x = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{3} & (\text{không thỏa điều kiện}) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{1 - 5\sqrt{2}}{3}; 1 + \sqrt{6} \right\}$$

9 Giải phương trình:

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$$

Nhận xét: Bằng cách đặt $ay + b = \sqrt{4x + 5}$, ta đưa bài toán về hệ

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = ay + b \\ a^2y^2 + 2aby + b^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - ay - 1 - b = 0 \\ a^2y^2 + 2aby - 4x + b^2 - 5 = 0 \end{cases}.$$

Để giải hệ trên được đơn giản thì ta chọn a, b thỏa mãn

$$\frac{2}{a^2} = \frac{-6 - a}{2ab - 4} = \frac{-1 - b}{b^2 - 5}$$

Từ đây ta chọn được $a = 2$ và $b = -3$

Lời giải

Điều kiện $x \leq \frac{3 - \sqrt{11}}{2}$ hoặc $x \geq \frac{3 + \sqrt{11}}{2}$

Đặt $2y - 3 = \sqrt{4x + 5}$, điều kiện $y \geq \frac{3}{2}$

Ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = 2y - 3 \\ 4y^2 - 12y + 9 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - y + 1 = 0 \\ y^2 - 3y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$(x - y)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Với $y = x$, ta được $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

Với $y = 2 - x$, ta được $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

So sánh với điều kiện ta nhận $x = 1 - \sqrt{2}; x = 2 + \sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{3}\}$$

10 Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{3x - 5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$$

Nhận xét: Bằng cách đặt $ay + b = \sqrt[3]{3x - 5}$, ta đưa bài toán về hệ

$$\begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = ay + b \\ a^3y^3 + 3a^2by^2 + 3ab^2y + b^3 = 3x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - ay - b - 25 = 0 \\ a^3y^3 + 3a^2by^2 + 3ab^2y - 3x + b^3 + 5 = 0 \end{cases}.$$

Để giải hệ trên được đơn giản thì ta chọn a, b thỏa mãn

$$\frac{a^3}{8} = \frac{3a^2b}{-36} = \frac{3ab^2 - 3}{53 - a} = \frac{b^3 + 5}{-b - 25}$$

Từ đây ta chọn được $a = 2$ và $b = -3$

Lời giải

Đặt $2y - 3 = \sqrt[3]{3x - 5}$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = 2y - 3 \\ 8y^3 - 36y^2 + 54y - 27 = 3x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - 22 = 0 & (1) \\ 8y^3 - 36y^2 + 54y - 3x - 22 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) trừ (2), ta được

$$\begin{aligned} & 8(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 36(x - y)(x + y) + 56(x - y) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x - y)(4x^2 + 4xy + 4y^2 - 18x - 18y + 28) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x - y)((2x - 3)^2 + (2x - 3)(2y - 3) + (2y - 3)^2 + 1) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Vì với mọi a, b ta luôn có $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ nên

$$(2x - 3)^2 + (2x - 3)(2y - 3) + (2y - 3)^2 + 1 > 0$$

Do đó:

$$(3) \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Với $y = x$, ta được $8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{3}}{4}; \frac{5 + \sqrt{3}}{4}; 2 \right\}$$

11 Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{7x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - x - 8} + \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} = 2$$

Lời giải Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{7x + 1} \\ b = -\sqrt[3]{x^2 - x - 8} \\ c = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \end{cases}$

Ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 8 & (1) \\ a + b + c = 2 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác, ta luôn có $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \quad (3)$

Từ (1),(2),(3), ta được

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x - 9 = 0 \\ 7x = 7 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại, ta nhận $x = -1; x = 0; x = 7; x = 9$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{-1; 0; 7; 9\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

- | | |
|--|---|
| 1. $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$ | 6. $x^2 - 2x - 3 = \sqrt{x+3}$ |
| 2. $\sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{2}$ | 7. $\sqrt{2x+5} = 32x^2 + 32x - 20$ |
| 3. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^3 - x + 1} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^3 - x}$ | 8. $\sqrt{3x+1} = -4x^2 + 13x - 5$ |
| 4. $\sqrt{2-x\sqrt{2}} + \sqrt[4]{2x-2} = 1$ | 9. $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{2-x} = 6$ |
| 5. $x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = \sqrt[3]{2x^2 - 2x - 4}$ | 10. $\sqrt[3]{x-9} = x^3 - 9x^2 + 27x - 21$ |

5. Phương pháp Hằng số biến thiên, tham số biến thiên

1 Giải phương trình:

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5$$

Lời giải

Điều kiện: $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$. Phương trình tương đương:

$$x + 5 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x^2 + x^4 \Leftrightarrow 5^2 - (2x^2 + 1)5 + x^4 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \frac{(2x^2 + 1) - (2x + 1)}{2} \\ 5 = \frac{(2x^2 + 1)^2 + (2x + 1)}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

2 Giải phương trình:

$$(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$$

Lời giải

Điều kiện $x > -1$

Đặt $t = \sqrt{x^2-2x+3}$, điều kiện $t \geq \sqrt{2}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x+1)t &= t^2 + 2x - 2 \\ \Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 2$, ta được $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ thỏa điều kiện.

Với $t = x - 1$, ta được $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 1$ (vô nghiệm)

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $x^2 + \sqrt{x+7} = 7$

5. $(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3+2x+1$

2. $x^3 + 6x^2 - 2x + 3 = (5x-1)\sqrt{x^3+3}$

6. $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$

3. $x^2 + (3 - \sqrt{x^2+2})x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$

7. $2(3x-1)\sqrt{2x^2+x-1} = 6x^2-3x-4$

4. $3x^2 + 2\sqrt{x+3}(2-x) = 5x+3$

6. Phương pháp đánh giá

1 Giải phương trình:

$$\sqrt{4x^3 + 29x^2 + 34x + 24} = 2x^2 + 3x + 5$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -6$

Phương trình tương đương:

$$\sqrt{(x+6)(4x^2+5x+4)} = 2x^2 + 3x + 5$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sqrt{(x+6)(4x^2+5x+4)} \leq \frac{(x+6) + (4x^2+5x+4)}{2} = 2x^2 + 3x + 5$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{aligned} x+6 &= 4x^2+5x+4 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right\}$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{x^2+x-1} + 2x\sqrt{1-x} = -x^4 - 2x^3 + 3x - 2$$

Lời giải

Điều kiện $x \leq 1$.

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^2+x-1} + x^2 + 2x\sqrt{1-x} + (1-x) &= (-x^4 - x^3 + x^2) + (-x^3 - x^2 + x) + x^2 + x - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2+x-1} + (x+\sqrt{1-x})^2 + (x^2+x-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{1-x}=0 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{thỏa điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

3 Giải phương trình:

$$\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + x = 4 - \frac{1}{x}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \leq -\sqrt{2}, x \geq \sqrt{2}$

Phương trình tương đương:

$$4 = \left(x + \sqrt{2-x^2}\right) + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức bunhiacôski ta có:

$$a + \sqrt{2-a^2} \leq 2$$

Do đó: vế phải của (1) nhỏ hơn bằng 4.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \sqrt{2-x^2} \\ \frac{1}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1\}$$

4 Giải phương trình:

$$x^2 (9\sqrt{1+x^4} + 13\sqrt{1-x^4}) = 16$$

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$3. \left(2. \frac{3x^2}{2} \cdot \sqrt{1+x^4}\right) + \left(2. \frac{\sqrt{13}x^2}{2} \cdot \sqrt{13-13x^4}\right) \leq 3. \left(\frac{9x^4}{4} + x^4 + 1\right) + \left(\frac{13x^4}{4} - 13x^4 + 13\right) = 16$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{3x^2}{2} = \sqrt{1+x^4} \\ \frac{\sqrt{13}x^2}{2} = \sqrt{13-13x^4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình:

$$S = \left\{ -\sqrt[4]{\frac{4}{5}}; \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \right\}$$

5 Giải phương trình:

$$x^2 + x = (6x - x^2 - 2)\sqrt{x-1}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$

Ta có: $6x - x^2 - 2 = 2x + 2 - (x - 2)^2 \leq 2x + 2$.

Do đó:

$$\begin{aligned} x^2 + x &= (6x - x^2 - 2)\sqrt{x - 1} \leq (2x + 2)\sqrt{x - 1} \\ \Leftrightarrow x &\leq 2\sqrt{x - 1} \quad (\text{Do } x + 1 > 0) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} - 1)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{2\}$$

6 Giải phương trình:

$$2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x - 4} = 0$$

Lời giải

Phương trình tương đương:

$$2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x - 4}$$

Do $2x^2 - 11x + 21 > 0$ với mọi x nên $x > 1$.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 11x + 21 &= 3\sqrt[3]{4x - 4} = \frac{1}{4} \cdot 3 \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot (4x - 4)} \leq \frac{1}{4}(4x + 12) \\ \Leftrightarrow 8(x - 3)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{3\}$$

7 Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{x-7}{3}} + \sqrt{\frac{x-6}{4}} + \sqrt{\frac{x-8}{2}} = \sqrt{\frac{x-3}{7}} + \sqrt{\frac{x-4}{6}} + \sqrt{\frac{x-2}{8}}$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 8$

Phương trình tương đương:

$$\sqrt{\frac{x-10}{3}} + 1 + \sqrt{\frac{x-10}{4}} + 1 + \sqrt{\frac{x-10}{2}} + 1 = \sqrt{\frac{x-10}{7}} + 1 + \sqrt{\frac{x-10}{6}} + 1 + \sqrt{\frac{x-10}{8}} + 1$$

Ta có $x = 10$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x - 10 < 0$ thì kết hợp với điều kiện, ta có $VT < VP$

Nếu $x - 10 > 0$ thì $VT > VP$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{10\}$$

8 Giải phương trình:

$$3 + \sqrt[4]{7x + 15} = x + \sqrt{2x}$$

Lời giảiĐiều kiện $x \geq 0$.

Phương trình tương đương:

$$\sqrt[4]{7x + 15} - \sqrt{2x} = x - 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{7x + 15} - \sqrt[4]{4x^2} = \frac{4x^2 - (7x + 5)}{4x + 5}$$

Đặt $f(x) = \sqrt[4]{7x + 15} - \sqrt[4]{4x^2}$ và $g(x) = \frac{4x^2 - (7x + 5)}{4x + 5}$

- Nếu $4x^2 < 7x + 15$ thì $f(x) > 0 > g(x)$.
- Nếu $4x^2 \geq 7x + 15$ thì $f(x) \leq 0 \leq g(x)$. Do đó $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x^2 = 7x + 15 \Leftrightarrow x = 3$ (Do $x \geq 0$)

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{3\}$$

9 Giải phương trình:

$$x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + \sqrt[3]{x^3 - 20}$$

Lời giảiĐiều kiện: $x - 1 \geq \sqrt[3]{x^3 - 20} \Rightarrow x + 3 > 0$

- Trường hợp 1: Nếu $x^2 - 2x - 2 > 0$ thì $(x + 3)(x^2 - 2x - 2) > 0$. Suy ra: $x^3 + x^2 - 8x - 2 > 4$. Khi đó, từ phương trình đã cho ta được:

$$\begin{aligned} x &> 2 + \sqrt[3]{x^3 - 20} \\ \Leftrightarrow (x - 2)^3 &> x^3 - 20 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 &< 0 \quad (\text{Vô lý}) \end{aligned}$$

- Trường hợp 2: Nếu $x^2 - 2x - 2 < 0$ thì ta làm tương tự.
- Trường hợp 3: Nếu $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Thử lại ta nhận $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{1 \pm \sqrt{3}\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

2. $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 4\sqrt{17-x} + 8\sqrt[4]{17-x} = 34$

3. $4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$

4. $\sqrt{3x^3 + x^2} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{5x^3 + 5x}$

5. $\sqrt{4x^3 + 29x^2 + 34x + 24} = 2x^2 + 3x + 5$

6. $\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} - \sqrt{3x} = x - 6$

7. $1 + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{3x^2+x-1}$

7. Phương pháp hàm số

1 Giải phương trình:

$$(4x - 1)(\sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{3x + 5}) = 4x + 8$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -3$

Với $x = \frac{1}{4}$ không thỏa phương trình.

Với $x \neq \frac{1}{4}$, phương trình tương đương:

$$\sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{3x + 5} = \frac{4x + 8}{4x - 1}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{3x + 5}$ và $g(x) = \frac{4x + 8}{4x - 1}$ trên $D = \left[-3; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

Ta thấy $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm liên tục trên D

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 5)^2}} \text{ và } g'(x) = \frac{-36}{(4x - 1)^2}$$

Trên nửa đoạn $\left[-3; \frac{1}{4}\right)$, ta có:

- $f'(x) > 0$, suy ra $f(x)$ là đồng biến.
- $g'(x) < 0$, suy ra $g(x)$ là nghịch biến.
- $f(-2) = g(-2)$

Suy ra, trên nửa đoạn $\left[-3; \frac{1}{4}\right)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất là $x = -2$

Trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, ta có:

- $f'(x) > 0$, suy ra $f(x)$ là đồng biến.
- $g'(x) < 0$, suy ra $g(x)$ là nghịch biến.
- $f(1) = g(1)$

Suy ra, trên nửa đoạn $\left[-3; \frac{1}{4}\right)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất là $x = -2$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$S = \{-2; 1\}$$

Nhận xét: Trong bài giải trên ta đã sử dụng kết quả sau: “Nếu $f(x)$ là một hàm số đồng biến và liên tục trên D và $g(x)$ là một hàm số nghịch biến và liên tục trên D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có không quá một nghiệm thực.

2 Giải phương trình:

$$(5x - 6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x - 7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

Lời giải

Điều kiện $x > 1$.

Phương trình tương đương:

$$(5x - 6)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5x - 6) - 1}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt{t - 1}}$ trên $(1; +\infty)$

Ta có:

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{2(t - 1)\sqrt{t - 1}} > 0, \quad \forall t \in (1; +\infty)$$

Suy ra $f(t)$ là hàm tăng trên $(1; +\infty)$

Do đó, phương trình đã cho tương đương:

$$f(5x - 6) = f(x) \Leftrightarrow 5x - 6 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Nhận xét: Trong bài giải trên ta đã sử dụng kết quả sau: “Nếu $f(t)$ là một hàm số đồng biến trên D thì

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \text{ với } u, v \in D$$

3 Giải phương trình:

$$3x^3 + 4x^2 - 1 = \sqrt[3]{x^6 + 2x^3 + x^2}$$

Lời giải

Hướng 1:

- Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm.
- Với $x \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned} 3x^3 + 4x^2 - 1 &= \sqrt[3]{x^6 + 2x^3 + x^2} \\ \Leftrightarrow 3x^3 + 4x^2 - 1 &= x \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} &= \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} + x^3 + 2 + \frac{1}{x} &= \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} + x^3 + 2 + \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 &= \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} + x^3 + 2 + \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x + 1 &= \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} + x^3 + 2 + \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow (x + 1)^3 + x + 1 &= \left(\sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} \right)^3 + \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) Ta có:

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

Do đó, ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2 + \frac{1}{x} &= (x + 1)^3 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2 + \frac{1}{x} &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} &= 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(3x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ -1; \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Hướng 2: Đặt $y = \sqrt[3]{x^6 + 2x^3 + x^2}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 = x^6 + 2x^3 + x^2 & (1) \\ y = 3x^3 + 4x^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia 2 vế của (1) cho x^3 và chia (2) cho x :

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = x^3 + 2 + \frac{1}{x} & (3) \\ \frac{y}{x} = 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} & (4) \end{cases}$$

Cộng (3) và (4) theo vế ta được:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{y}{x} = (x + 1)^3 + (x + 1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) Ta có:

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

Do đó:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(x + 1) \Leftrightarrow y = x^2 + x$$

Thay y vào (2) ta được:

$$(x+1)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ -1; \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

4 Giải phương trình:

$$(9x+1)\sqrt{9x-1}=8x^3+20x^2-41x+5$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{9}$

Phương trình được viết lại:

$$(\sqrt{9x-1})^3 + 5(\sqrt{9x-1})^2 + 2\sqrt{9x-1} = (2x)^3 + 5(2x)^2 + 2.2x(1)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 5t^2 + 2t$ với $t \geq 0$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 10t + 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$

Do đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{9x-1} = 2x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{9} \\ 4x^2 - 9x + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9+\sqrt{65}}{8} \\ x = \frac{9-\sqrt{65}}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{9-\sqrt{65}}{8}; \frac{9+\sqrt{65}}{8} \right\}$$

5 Giải phương trình:

$$x^4 + 18x^3 + 88x^2 + 197x + 163 = \sqrt{x+9}(x^3 + 16x^2 + 55x + 84)$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq -9$

Với điều kiện, phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} &(x+12)(x^3+6x^2+15x+13) + x^2+4x+7 = \sqrt{x+9}(x+12)(x^2+4x+7) \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+12)(x^3+6x^2+15x+13)}{(x+12)(x^2+4x+7)} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{x+12} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3+6x^2+15x+13}{x^2+4x+7} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{(x+9)+3} \\ &\Leftrightarrow (x+2) - \frac{1}{(x+2)^2+3} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{(x+9)+3} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = t - \frac{1}{t^2 + 3}$ với $t \in [0; +\infty)$

Ta có

$$f'(t) = \frac{t^4 + 6(t + \frac{1}{6})^2 + \frac{53}{6}}{(t^2 + 3)^2} > 0, \quad \forall t \in [0; +\infty)$$

Suy ra: $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x+2) = f(\sqrt{x+9}) \\ &\Leftrightarrow x+2 = \sqrt{x+9} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x+2)^2 = x+9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{29}-3}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{29}-3}{2} \right\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

- | | |
|--|---|
| 1. $2x^2 - x - \frac{1}{8} = \sqrt[3]{\frac{9}{8x^2} + \frac{1}{x}} - 1$ | 7. $(x+2)(\sqrt{x^2+4x+7}+1) + x(\sqrt{x^2+3}+1) = 0$ |
| 2. $2x^2 + 3x - 3 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 5}$ | 8. $8x^3 + 6x + 1 = \sqrt[3]{12x^2 + 2x + 1}$ |
| 3. $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$ | 9. $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(1 + \sqrt{x^2 + 1 + x}) = 0$ |
| 4. $\sqrt[3]{x^6 - 12x^2 + 17} = -3x^4 + 16x^2 - 19$ | 10. $8x^3 - 5x = \sqrt[3]{7x + 1} + 1$ |
| 5. $\sqrt[3]{6x + 1} = 16x^3 - 10x - 2$ | 11. $(x+5)\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$ |
| 6. $2x^2 + 3x - 3 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 5}$ | |

8. Phương pháp lượng giác hóa

1 Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(x^2 - 1)}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$

Đặt $x = \tan \alpha$, điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Khi đó phương trình bài cho có dạng:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos 2\alpha &= \cos 2\alpha - 1 \\ \Leftrightarrow \sin \alpha (2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 &= 0 \quad (\text{Do } \sin \alpha \neq 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 1 & (\text{Không thỏa điều kiện}) \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} & (\text{thỏa điều kiện}) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, ta được $x = \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

2 Giải phương trình:

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{x}{4x^2 - 1}$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $x = \cos t$, điều kiện $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq \frac{\pi}{3} \\ x \neq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \cos^2 t} &= \frac{\cos t}{4 \cos^2 t - 1} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t}(4 \cos^2 t - 1) &= \cos t \\
 \Leftrightarrow \sin t(3 - 4 \sin^2 t) &= \cos t \\
 \Leftrightarrow \sin 3t &= \cos t \\
 \Leftrightarrow \sin 3t &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} & (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện của t ta được $t = \frac{\pi}{8}, t = \frac{5\pi}{8}, t = \frac{\pi}{4}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \cos \frac{\pi}{8}; \cos \frac{5\pi}{8}; \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

3 Giải phương trình:

$$x^3 - 3x = \sqrt{2 - x}$$

Lời giải

Điều kiện $x \leq 2$.

Xét $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = \sqrt{2 - x}$ với $x \in (-\infty; 2]$

Dễ dàng tìm được: $\max_{x \in (-\infty; -2]} f(x) = -2$ và $\min_{x \in (-\infty; -2]} g(x) = 2$.

Do đó, nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm x_0 thì $x_0 \in (-2; 2]$

Đặt $x = 2 \cos t$, điều kiện $t \in (0; \pi)$ Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}
 4 \cos^3 t - 3 \cos t &= \sin \frac{t}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos 3t &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} + k2\pi \end{cases} & (k \in \mathbb{Z}) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{7} + \frac{k4\pi}{7} \\ t = -\frac{\pi}{5} + \frac{k4\pi}{5} \end{cases} & (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Vì $t \in (0; \pi)$ nên $t = \frac{\pi}{7}$ hoặc $t = \frac{5\pi}{7}$ hoặc $t = \frac{3\pi}{5}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \cos \frac{5\pi}{7}; \cos \frac{3\pi}{5}; \cos \frac{\pi}{7} \right\}$$

4 Giải phương trình:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$

Đặt $x = \cos t$, điều kiện $t \in [0; \pi]$

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} &= \tan \frac{t}{2} + \cot \frac{t}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) &= \frac{1}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Đặt $u = \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$, điều kiện $|u| \leq \sqrt{2}$.

Ta có $u^2 = 1 + 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow u^2 - 1 = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$

Do đó, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2}u &= \frac{2}{u^2 - 1} \Leftrightarrow u^3 - u - \sqrt{2} = 0 \\ \Leftrightarrow (u - \sqrt{2})(u^2 + \sqrt{2}u + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow u - \sqrt{2} &= 0 \text{ (Do } u^2 + \sqrt{2}u + 1 > 0) \end{aligned}$$

Với $u = \sqrt{2}$, ta được: $\sin \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $t \in [0; \pi]$ nên $t = \frac{\pi}{2}$.

Với $t = \frac{\pi}{2}$, ta được $x = 0$ (thỏa mãn phương trình)

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{0\}$$

Bài tập: Giải phương trình:

1. $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(2 + \sqrt{1 - x^2})$

3. $\sqrt{12 - 3x^2} + \sqrt{4 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2+x}}} = x$

2. $\sqrt{x+2} = x^3 - 3x$

4. $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$