CHUYÊN ĐỀ: SỐ NGUYÊN TỐ

I, Số nguyên tố và hợp số

1/ Định nghĩa:

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước là một và chính nó
- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 có ước khác 1 và chính nó

Ví dụ: 2, 3, 5, 7, 11….là những số nguyên tố

4, 8, 9, 12… là những hợp số

Chú ý: Tập hợp số tự nhiên được chia thành 3 bộ phận (+ {0, 1} + Tập hợp các số nguyên tố + Tập hợp các hợp số)

-Từ định nghĩa ta có: Số tự nhiên a >1 là hợp số nếu a = pq, p>1, q>1, hoặc nếu a= pq , 1<p<a.

2/ Tập hợp các số nguyên tố

a, Định lí 1: Ước nhỏ nhất lớn hơn 1 của một số tự nhiên lớn hơn 1 là một số nguyên tố.

Chứng minh: Giả sử a là một số tự nhiên lớn hớn 1 và p > 1 là ước nhỏ nhất của a. Ta có p là một số nguyên tố.

Thật vậy nếu p không phải là một số nguyên tố thì p là một hợp số, nghĩa là có một số tự nhiên p_1 là ước của p và $1 < p_1 < p$. Từ đó ta có p_1 là ước của a và $1 < p_1 < p$ mâu thuẩn với giả thiết p là ước nhỏ nhất lớn hơn 1 của a.

Chú ý: Định lí trên chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có ước nguyên tố.

b, Định lí 2: Có vô số ước nguyên tố

Chứng minh: Về mặt lí thuyết, định lí một chứng tỏ rằng tập hợp các số nguyên tố khác rổng. Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1 = 2, p_2, p_3,\dots, p_n$

Ta xét số $a = p_1p_2\dots p_n + 1$. Đó là một số tự nhiên lớn hơn 1 nên a có ít nhất một ước nguyên tố q. Nhưng vì chỉ có hữu hạn số nguyên tố đã kể ra ở trên cho nên p phải trùng một trong các số $p_1, p_2, \dots, p_n$ do đó q phải là ước của tích $p_1p_2\dots p_n$.

Từ q là ước của $a = p_1p_2\dots p_n + 1$ và q là ước của $p_1p_2\dots p_n$.

q là ước của $a - p_1p_2\dots p_n = 1$. Điều này mâu thuẫn với giả thuyết q là số nguyên tố

Như vậy tập hợp các số nguyên tố là vô hạn nên không thể có một bảng tất cả các số nguyên tố, nếu chúng ta đánh số các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_n < p_{n+1}$,…. Thì cho đến nay người ta củng chưa tìm được một biểu thức tổng quát nào cho số nguyên tố p_n thứ n theo chỉ số n của nó.

II, Các định lí cơ bản:

1/ Các bổ đề

a. Bổ đề 1: Với số tự nhiên a và số nguyen tố pthì hoặc a nguyên tố với p hoặc a chia hết cho p.

Chứng minh: Vì p là một số nguyên tố nó chỉ có 2 ước là một và p cho nên ƯCLN(a,p) = 1 hoặc ƯCLN(a,p) = p. Từ đó ta có a nguyên tố với p hoặc a chia hết cho p

b. Bổ đề 2: Nếu một tích các số tự nhiên chia hết cho số nguyên tố p thì phải có ít nhất một thừa số của tích chia hết cho p.

Chứng minh: Giả sử tích $a_1a_2\ldots a_n$ chia hết cho p, ta phải có ít nhất một trong các số a_1, $a_2,\ldots,a_n$ chia hết cho p . Thật vậy giả sử trái lại rằng tất cả các số $a_1, a_2,\ldots,a_n$ không chia hết cho p thì theo bổ đề 1 chúng đều là nguyên tố với p do đó ta có ƯCLN($a_1a_2\ldots a_n$,p) = 1. Điều này mâu thuẩn với giả thiết.

c. Hệ quả: *Nến số nguyên tố p là ước của một tích các số nguyên tố $q_1q_2\ldots q_n$ thì p phải trùng với một trong các số nguyên tố của tích đó.*

2/ Định lí cơ bản:

Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích những thừa số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự của các thừa số

Chứng minh:

a. Sự phân tích được:

Giả sử $a \in N, a > 1$, khi ấy a có ít nhất một ước nguyên tố p_1 nào đó và ta có $a = p_1a_1$

- Nếu $a_1 = 1$ thì $a = p_1$ là sự phân tích của a thành tích (có một thừa số) những số nguyên tố.
- Nếu $a_1>1$ thì lại theo định lí ở trên, a_1 có ước nguyên tố p_2 nào đó và ta có $a_1 = p_2a_2$ nên $a = p_1p_2a_2$
- Nếu $a_2 = 1$ thì $a = p_1p_2$ là sự phân tích của a thành tích những thừa số nguyên tố.
- Nếu $a_2>1$ thì lại tiếp tục lí luận ơ trên có số nguyên tố $p_3,\ldots$Quá trình này ắt phải có kết thúc, nghĩa là có n sao cho $a_n = 1$, $a_{n-1} = p_n$ là một số nguyên tố, bởi vì ta có a, $a_1, a_2,\ldots$ là những dãy số tự nhiên mà $a > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ như vậy cuối cùng ta được $a = p_1p_2\ldots p_n$. Là sự phân tích của a thành những thừa số nguyên tố.

b. Tính duy nhất:

Giả sử ta có $a = p_1p_2\ldots p_n = q_1q_2\ldots q_n$ là hai dạng phân tích số tự nhiên a thành thừa số nguyên tố. Đẳng thức trên chứng tỏ p_1 là ước của $q_1q_2\ldots q_n$ nên theo bổ đề 2 ở trên p_1 trùng với q_i nào đó($1 \le i \le m$) vì ta không kể đến thứ tự của các thừa số nên có thể coi $p_1 = q_1$ và từ đó ta được $p_2\ldots p_n = q_2\ldots q_n$

Lấy p_2 và lập lại lí luận trên ta được $p_2 = q_2$

Lí luận lặp lại cho đến lúc ở một vế không còn thứa số nguyên tố nào nữa, nhưng lúc đó ở vế còn lại củng không còn thừa số nguyên tố nào vì ngược lại sẻ xãy ra

Hoặc $1 = q_{n+1}q_{n+2}\ldots q_n$ Hoặc $p_{m+1}p_{m+2}\ldots p_m = 1$

Là không thể được. Vậy phải có m = n và $p_i = q_i$ i = 1, 2, 3,…n nghĩa là tính duy nhất ở dạng phân tích số a thành tích các thừa số nguyên tố đã dược *chứng minh*

Ví dụ: phân tích 1960 thành tích những thừa số nguyên tố

Trong thực hành ta thực hiện quá trình phân tích trong phép chứng minh định lí trên bằng cách tìm các ước nguyên tố của a = 1960 từ nhỏ đến lớn. Ta viết như sau:

1960	2
980	2
490	2
245	5
49	7
7	7
1	

Vậy $1960 = 2.2.2.5.7.7 = 2^3.5.7^2$

Chú ý: Bằng cách phân tích 1 số ra thừa số. Ta có thể tìm được tất cả các ước của số ấy mọt cách nhanh,không bỏ sót ước nào.

- Người ta chứng minh được rằng, nếu một số A có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố lá $A = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{n}$ trong đó a_1, a_2,…,a_n là các số nguyên tố, thì các ước của A là $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$ ta có thể sử dụng điều này để kiểm tra xem khi tìm các ước của một số, ta đã tìm đủ số các ước chưa.
- Thông thường , khi viết các phân tích ra thừa số nguyên tố của một số, bao giờ ta củng viết nó dưới dạng tiêu chuẩn, tức là dạng ma trong đó các thừa số nguyên tố được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.
- Phân tích ra thừa số nguyên tố của một số chính phương thì chỉ chứa các thứa số nguyên tố với số mũ chẵn.

B: Các dạng toán :

DẠNG 1: ƯỚC CỦA MỘT SỐ

A $= a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{n}$ ($a_1, a_2,\ldots,a_n$: các số nguyên tố) Số ước của A là $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$

Bài 1: a)Tìm các ước nguyên tô của các số 30, 210, 2310

b)chứng tỏ rằng các số 31, 211, 3201, 10031 là các số nguyên tố

Bài 2: 1**. Phân tích số 360 ra thừa số nguyên tố.**

2. Số 360 có bao nhiêu ước.

3. Tìm tất cả các ước của 360.

Bài 3: Tìm số nhỏ nhất A có a)6 ước b)9 ước

Bài 4: Chứng tỏ rằng các số sau đây là hợp số

1. **676767**
2. $10^8 + 10^7 + 7$
3. $17^5 + 24^4 + 13^{21}$

Bài 5: Các số sau là nguyên tố hay hợp số

1. **A = 11…1 (2001 chữ số 1)**
2. **B = 11…1 (2000 chữ số 1)**
3. **C = 1010101**
4. **D = 1112111**
5. **E = 1! + 2! + 3! +…+ 100!**
6. **G = 3.5.7.9 – 28**
7. **H = 311141111**

Bài 6: Cho 3 số a = 720, b = 36, c = 54

1. **Gọi A, B, C theo thứ tự là tập hợp các ước nguyên tố của a, b, c. Chướng tỏ B, C là tập con của A**
2. **a có chia hết cho b, có chia hêt cho c không**

Bài 7: Đố vui: Ngày sinh nhật của bạn

Một ngày đầu năm 2002. Huy viết thư hỏi thăm sinh nhật Long và nhận được thư trả lời.

Mình sinh ngay a tháng b, năm 1900 + c và đến nay d tuổi . Biết rằng a.b.c.d = 59007

Huy đã kịp tính ra ngày sinh của Long và kịp viết thư sinh nhật bạn. Hỏi Long sinh ngày nào

Bài 8: Chứng minh rằng:

a) **Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng** $4n \pm 1$

b) **Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng** $6n \pm 1$

DẠNG 2: SỐ NGUYÊN TỐ VÀ TÍNH CHIA HẾT

1. Nếu tích của hai số a, b chia hết cho một số nguyên tố p thì mọt trong hai số a, b chia hết cho p

$$a.b \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right.$$

2. Nếu a^n chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hêt cho p $a^n \vdots p \Rightarrow a \vdots p$

Bài 1: **Phân tích A = 26406 ra thừa số nguyên tố. A có chia hết các số sau hay không 21, 60, 91, 140, 150, 270**

Bài 2: **Chứng tỏ rằng nếu 3 số a, a + n, a + 2n đều là số nguyên tố lớn hơn 3 thì n chia hết cho 6.**

Bài 3: **Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p – 1)(p + 1) chia hết cho 24**

Bài 4: **Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$ (n≥1) $n \geq 1$

Bài 5: **Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau củng là số nguyên tố**

1. p + 10, p + 14

2. p + 2, p + 6, p + 8 , p + 12, p + 14

Bài 6: **Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai sô nguyên tố lẽ liên tiếp (p > 3). Chứng minh rằng một số tự nhiên nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.**

Bài 7: **Một số nguyên tốp chia hêt cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r**

Bài 8: **Điền các chử số thích hợp trong phép phân tích ra thừa số nguyên tố**

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fcga} & n \\ \overline{abc} & c \\ \overline{ncf} & \end{array}$$

Bài 9: **Tìm số tự nhiên có 4 chử số, chứ số hàng nghìn bằng chử số hàng đơn vị, chử số hàng trăm bằng chử số hàng chục và số đố viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.**

Bài 10: **Chứng minh rằng nếu $2^n – 1$ là số nguyên tố (n > 2) thì $2^n + 1$ là hợp số.**

Bài 11: **Tìm số tự nhiên k để dãy k + 1, k + 2,…,k + 10 chứa nhiều số nguyên tố nhất .**

Bài 12 : a) **Chứng minh rắng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao**

b) chứng minh rằng nếu tổng của n luỹ thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì (n, 30) = 1

Bài 13: **Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố**

Bài 14: Tìm tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho abc < ab + bc + ca

DẠNG 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH.

Bài 1: Tìm $n \in N^*$ sao cho : $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố

Bài 2: Tìm 2 số tự nhiên , sao cho tổng và tích của chúng đều là số nguyên tố

Bài 3: Tìm các số nguyên tố a, b, c thoả mãn điiêu kiện abc = 3(a + b + c)

Bài 4: a)Tìm số nguyên tố a biết rằng 2a + 1 là lập phương của một số nguyên tố

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên

Bài 5: Tìm tất cả các số có hai chử số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyen tố

Bài 6: Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x^y + 1 = z$

Bài 7: Cho $n \in N^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ và hợp số với n > 1

Bài 8: Tìm $n \in N^*$ để

a) $n^4 + 4$ là số nguyên tố. b) $n^{2003} + n^{2002} + 1$ la số nguyên tố

Bài 9: Chứng minh rằng trong 15 số tự nhiên lớn hơn 1 không vượt quá 2004 và đôi một nguyên tố cùng nhau tìm được một số là số nguyên tố.

Bài 10: Tìm số nguyên tố $\overline{abcd}$, sao cho $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ là số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$

C. Bài tập

1. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.
2. Cho $n \in N*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

   a) A = $2^{2^{2n+1}} + 3$; b) B = $2^{2^{4n+1}} + 7$; c) C = $2^{2^{6n+2}} + 13$.
3. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).
4. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.
5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.
6. Tìm các số $x, y \in N*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.
7. Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẳn hay số lẻ.
8. Tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó.
9. Tìm 4 số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.
10. Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 hay không.
11. Tìm số nguyên tố có 3 chữ số , biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên
12. Tìm một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết r không là số nguyên tố