CHUYÊN ĐỀ DÃY SỐ (BDHSG)

1. KHÁI NIỆM DÃY SỐ

1) Cho A là một tập con khác rỗng của tập số nguyên $\mathbb{Z}$, hàm số $u : A \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u(n) = u_n$

được gọi là một dãy số, và kí hiệu là (u_n) hoặc $\{u_n\}$. Thông thường ta hay chọn A sao cho phần tử nhỏ nhất của A là 1. Dãy (u_n) gọi là dãy sỗ hữu hạn (hoặc dãy số vô hạn) nếu A là tập hợp gồm hữu hạn (vô hạn) phần tử. Số u_n được gọi là số hạng tổng quát của dãy (u_n).

2) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng (tăng không nghiệm ngặt, giảm, giảm không nghiêm ngặt) nếu $u_n < u_{n+1}$ (tương ứng $u_n \le u_{n+1}$, $u_n > u_{n+1}$, $u_n \ge u_{n+1}$) với mọi $n \in A$.

3) Dãy số (u_n) được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $u_{n+k} = u_n, \forall n \in A$. Số k nhỏ nhất thoả mãn tính chất này được gọi là chu kì của dãy tuần hoàn (u_n). Nếu k = 1 thì ta được một dãy hằng (tất cả các số hạng bằng nhau).

4) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực M sao cho $u_n \le M$ với mọi $n \in A$. Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực m sao cho $u_n \ge m$ với mọi $n \in A$. Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn (hoặc giới nội) nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại số thực M, m sao cho $m \le u_n \le M$ với mọi $n \in A$, hoặc tồn tại số thực C sao cho $|u_n| \le C, \forall n \in A$. Dãy số hữu hạn hoặc tuần hoàn thì luôn bị chặn.

2. CẤP SỐ

1) Cấp số cộng

- Dãy số (u_n) được gọi là cấp số cộng nếu mọi số hạng đều thoả mãn $u_{n+1} - u_n = d$ (d: hằng số, gọi là công sai).
- Công thức truy hồi: $u_{n+1} = u_n + d$. Công thức số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \in A$. Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$. Tính chất các số hạng: $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k$.

2) Cấp số nhân

- Dãy số (u_n) được gọi là cấp số nhân nếu mọi số hạng đều thoả mãn $u_{n+1} = u_n.q$ (q: hằng số, gọi là công bội).
- Công thức truy hồi: $u_{n+1} = u_n.q$. Công thức số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$. Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = nu_1$ nếu q = 1, $S_n = u_1\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ nếu $q \ne 1$. Tính chất các số hạng: $u_{k+1}.u_{k-1} = u_k^2$.

3) Cấp số nhân cộng

- Dãy số (u_n) được gọi là cấp số nhân cộng nếu mọi số hạng đều thoả mãn $u_{n+1} = u_n.q + d$ (q, d là hằng số).

4) Cấp số điều hoà

- Dãy số (u_n) được gọi là cấp số điều hoà nếu mọi số hạng của nó đều khác 0 và thoả mãn $u_n = \frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1} + u_{n+1}}$, hay $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$. (Học sinh tự ôn tập các dạng toán về cấp số)

3. XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

3.1. DỰ ĐOÁN SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀ CHỨNG MINH BẰNG QUI NẠP

BÀI TẬP

1) Xác định số hạng tổng quát của dãy số cho bởi:

a) $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, \forall n = 1, 2, 3, ...$

b) $u_1 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n = 1, 2, 3, ...$

c) $u_1 = 1, u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n + 1, \forall n = 1, 2, 3, ...$

d) $u_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+1)u_n}{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3}-1)u_n}, \forall n = 1, 2, 3, ...$

e) $u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = 2u_n^2 - 1, \forall n = 1,2,3,...$

f) $u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = 2u_n\sqrt{1-u_n^2}, \forall n = 1,2,3,...$

3.2. MỘT SỐ DẠNG TRUY HỒI ĐẶC BIỆT

✍ Với dãy số cho bởi công thức truy hồi dạng $u_{n+1} = u_n + f(n)$ thì $u_n = u_1 + f(1) + f(2) + ... + f(n-1)$.

✍ Với dãy số cho bởi công thức truy hồi dạng $u_{n+1} = u_n.g(n)$ thì $u_n = u_1.g(1).g(2)...g(n-1)$.

BÀI TẬP

2) Xác định số hạng tổng quát của dãy số cho bởi:

a) $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + n!.n, \forall n = 1,2,3,...$

b) $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 u_n}{n(n+2)}, \forall n = 1,2,3,...$

c) $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + n^3 + 3n^2 - 3n + 1, \forall n = 1,2,3,...$

d) $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 3^n, \forall n = 1,2,3,...$

e) $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n, \forall n = 1,2,3,...$

f) $u_1 = 2, u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}, \forall n = 1,2,3,...$

g) $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} u_n, \forall n = 1,2,3,...$

h) $u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(1 + u_n), \forall n = 1,2,3,...$

3.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Ta chỉ xét hai trường hợp đơn giản sau đây:

a) Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_1, u_2, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $(a, b = \text{const})$. Khi đó phương trình $x^2 - ax - b = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của dãy số đã cho.

✍ Nếu phương trình trên có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thì $u_n = A.x_1^n + B.x_2^n$.

✍ Nếu phương trình trên có hai nghiệm thực trùng nhau $x_1 = x_2$ thì $u_n = (A + nB).x_1^n$.

✍ Nếu phương trình trên có $\Delta < 0$, gọi hai nghiệm phức của nó là x_1, x_2, và biểu diễn hai số phức này ở dạng lượng giác $x_1 = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi), x_2 = r(\cos\varphi - i.\sin\varphi)$, với r, φ là các số thực, r là môđun của x_1 và x_2, $\varphi \in [0; 2\pi)$, i là đơn vị ảo, thì $u_n = r^n(A.\cos n\varphi + B.\sin n\varphi)$. (Ở đó các hằng số A, B được xác định nhờ u_1, u_2)

b) Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_1, u_2, u_3, u_{n+3} = a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $(a, b, c = \text{const})$ có phương trình đặc trưng $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$.

✍ Nếu phương trình trên có ba nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 thì $u_n = A.x_1^n + B.x_2^n + C.x_3^n$.

✍ Nếu phương trình trên có ba nghiệm thực x_1, x_2, x_3 mà $x_1 \neq x_2 = x_3$ thì $u_n = A.x_1^n + (B + nC).x_2^n$.

✍ Nếu phương trình trên có ba nghiệm thực x_1, x_2, x_3 và $x_1 = x_2 = x_3$ thì $u_n = (A + nB + n^2C).x_1^n$.

✍ Nếu phương trình trên có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 trong đó x_1 là nghiệm thực, còn hai nghiệm $x_2 = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, $x_3 = r(\cos\varphi - i.\sin\varphi)$ là hai nghiệm phức (không phải là số thực) thì $u_n = A.x_1^n + r^n(B.\cos n\varphi + C.\sin n\varphi)$. (Ở đó các hằng số A, B, C được xác định nhờ u_1, u_2, u_3)

VD1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 0, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh (u_n) bị chặn.

HD. Phương trình đặc trưng của dãy số đã cho là $x^2 - x + 1 = 0$ có hai nghiệm phức $x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}$, nên $u_n = 1^n(A.\cos\frac{n\pi}{3} + B.\sin\frac{n\pi}{3}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do $u_1 = 1, u_2 = 0$, nên ta có

$$\begin{cases} 1 = A.\cos\frac{\pi}{3} + B.\sin\frac{\pi}{3} & (= u_1) \\ 0 = A.\cos\frac{2\pi}{3} + B.\sin\frac{2\pi}{3} & (= u_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = 1 \\ -\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $u_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.\sin\frac{n\pi}{3},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $|u_n|=\left|\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.\sin\frac{n\pi}{3}\right|\le\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}},\forall n\in\mathbb{N}^*$, hay (u_n) là dãy bị chặn.

VD2. Cho (u_n) có $u_1=0,u_2=16,u_3=47,u_{n+3}=7u_{n+2}-11u_{n+1}+5u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm dư khi chia u_{2011} cho 2011.

HD. Phương trình đặc trưng $x^3-7x^2+11x-5=0$ có 3 nghiệm thực $x_1=5$ (nghiệm đơn), $x_2=x_3=1$ (nghiệm kép) do đó $u_n=A.5^n+(B+nC).1^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vì $u_1=0,u_2=16,u_3=47$ nên $A=\frac{1}{5},B=-13,C=12$. Suy ra $u_n=5^{n-1}+12n-13,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó $u_{2011}=5^{2010}+12.2011-13$. Theo định lí Phécma thì $5^{2010}-1\,\vdots\,2011$ (định lí Phécma: Nếu p là số nguyên tố, a là số nguyên và (a, p) = 1, thì $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$). Vậy u_{2011} chia cho 2011 dư -12 (hay dư 1999).

VD3. Cho hai dãy số $(x_n),(y_n)$ thoả mãn $x_1=y_1=1,x_{n+1}=4x_n-2y_n,y_{n+1}=x_n+y_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Xác định công thức của x_n,y_n.

HD. Ta có $x_{n+2}=4x_{n+1}-2y_{n+1}=4x_{n+1}-2(x_n+y_n)=4x_{n+1}-2x_n-2y_n=4x_{n+1}-2x_n+x_{n+1}-4x_n$ hay $x_{n+2}=5x_{n+1}-6x_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}^*$). Dãy (u_n) có phương trình đặc trưng $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc x = 3. Suy ra $x_n=A.2^n+B.3^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Mà $x_1=1,x_2=4x_1-2y_1=2$, nên $A=\frac{1}{2},B=0$, và ta có $x_n=2^{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó và $x_{n+1}=4x_n-2y_n\Rightarrow y_n=2^{n-1}$. Vậy $x_n=y_n=2^{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3.4. PHƯƠNG PHÁP DÃY SỐ PHỤ

VD4. Cho dãy số $(u_n):u_1=1,u_2=2,u_{n+2}=2.u_{n+1}-u_n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$. Chứng minh (v_n) là cấp số cộng và tìm u_n.

HD. a) Ta có $v_1=u_2-u_1=1$. Và $u_{n+2}=2.u_{n+1}-u_n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow v_{n+1}=v_n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (v_n) là cấp số cộng với số hạng đầu tiên $v_1=1$, công sai d = 1.

b) Từ câu a ta có $v_n=v_1+(n-1).d=1+(n-1).1=n$, hay $u_{n+1}-u_n=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+$

$+...+(u_2-u_1)+u_1=[(n-1)+(n-2)+...+2+1]+1=1+\frac{(n-1).n}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

VD5. Cho dãy số $(u_n):u_1=0,u_2=1,u_{n+2}=\frac{2}{3}.u_{n+1}+\frac{1}{3}u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$. Chứng minh (v_n) là cấp số nhân và tìm u_n.

HD. Ta có $v_1=u_2-u_1=1$. Và $u_{n+2}=\frac{2}{3}.u_{n+1}+\frac{1}{3}u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow 3u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow$ $3(u_{n+2}-u_{n+1})=-(u_{n+1}-u_n),\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{-1}{3}v_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu tiên $v_1=1$, công bội $q=-\frac{1}{3}$.

Ta có $v_n=v_1.q^{n-1}=(-\frac{1}{3})^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})++...+(u_2-u_1)+u_1=v_{n-1}+v_{n-2}+$

$$+...+v_2+v_1+u_1=0+1+(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})^2+...+(-\frac{1}{3})^{n-2}=1.\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4.(-3)^n},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

VD6. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) có $u_1=c,\ u_{n+1}=q.u_n+an+d,\forall n\in\mathbb{N}^*$, ở đó a, c, d, q là hằng số.

HD. Với q = 1 thì $u_{n+1}=u_n+an+d,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Ta nhận thấy $u_2=u_1+a+d, u_3=u_2+2a+d,...,$
$u_{n-1}=u_{n-2}+(n-2)a+d, u_n=u_{n-1}+(n-1)a+d\Rightarrow u_2+u_3+...+u_{n-1}+u_n=u_1+u_2+...+u_{n-2}+u_{n-1}+$
$+a(1+2+...+(n-2)+(n-1))+(n-1)d\Rightarrow u_n=u_1+\frac{n(n-1)}{2}a+(n-1)d\Rightarrow u_n=c+\frac{n(n-1)}{2}a+(n-1)d,\ (n\in\mathbb{N}^*).$

Khi q ≠ 1, ta sẽ xét một dãy phụ (v_n) thỏa mãn $u_n=v_n+bn+e,\ n\in\mathbb{N}^*,$ ở đó b, e là những hằng số, và ta cố gắng chọn b, e thích hợp để (v_n) là cấp số nhân. Từ đẳng thức truy hồi ban đầu ta có $v_{n+1}=qv_n+(qb+a-b)n+(qe+d-b-e),\ n\in\mathbb{N}^*,$ và dễ thấy để (v_n) là cấp số nhân thì cần có $qb+a-b=qe+d-b-e=0\Leftrightarrow b=\frac{a}{1-q}, e=\frac{d-a-qd}{(q-1)^2}, (q\neq 1)$. Lúc này (với b, e như trên) do $v_{n+1}=qv_n$ nên (v_n) là cấp số nhân có công bội q. Suy ra $v_n=v_1.q^{n-1}=(u_1+\frac{aq+dq-d}{(q-1)^2}).q^{n-1}$, từ đó ta tính được số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n=(u_1+\frac{aq+dq-d}{(q-1)^2}).q^{n-1}+\frac{a.n}{1-q}+\frac{d-a-qd}{(q-1)^2}$ (n ≥ 2).

Vậy, số hạng tổng quát của (u_n) đã cho là :
$$u_n=\begin{cases} c+\frac{n(n-1)}{2}a+(n-1)d, & khi\ q=1\\ (c+\frac{aq+dq-d}{(q-1)^2}).q^{n-1}+\frac{a.n}{1-q}+\frac{d-a-qd}{(q-1)^2}, & khi\ q\neq 1\end{cases}.$$

BÀI TẬP

3) Cho (u_n): $u_1=0, u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{4+u_n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}$. Chứng minh (v_n) là cấp số nhân và tìm u_n.

4) Cho (u_n): $u_1=\frac{1}{3}, u_{n+1}=\frac{(n+1)u_n}{3n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=\frac{u_n}{n}$. Chứng minh (v_n) là cấp số nhân và tìm u_n.

5) Cho (u_n): $u_1=1,\ u_{n+1}=u_n+2.(1+3^n),\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=u_n-3^n$. Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng và tìm u_n.

6) Nêu cách xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi $u_1=c,\ u_{n+1}=q.u_n+P(n),\forall n\in\mathbb{N}^*$, ở đó c, q là các hằng số, còn P(n) là một đa thức bậc k cho trước.

3.5. TUYẾN TÍNH HOÁ MỘT SỐ DÃY PHI TUYẾN

a) Với dãy số (x_n) cho bởi $x_1=a, x_{n+1}=\frac{px_n+q}{rx_n+s},\forall n\in\mathbb{N}^*,$ và a, p, q, r, s là các hằng số, ta xét hai dãy (u_n), (v_n) thoả mãn $u_1=a, v_1=1, u_{n+1}=pu_n+qv_n, v_{n+1}=ru_n+sv_n,\forall n\in\mathbb{N}^*,$ thì $x_n=\frac{u_n}{v_n}$. Từ đó tìm ra u_n, v_n, x_n.

b) Với dãy số (x_n) cho bởi $x_1=a, x_{n+1}=\frac{x_n^2+d}{2x_n},\forall n\in\mathbb{N}^*,$ và a, d là các hằng số, $d\neq 0,$ ta xét hai dãy (u_n), (v_n) thoả mãn $u_1=a, v_1=1, u_{n+1}=u_n^2+dv_n^2, v_{n+1}=2u_nv_n,\forall n\in\mathbb{N}^*,$ thì $x_n=\frac{u_n}{v_n}$. Từ đó tìm ra u_n, v_n, x_n.

VD7. Cho dãy (x_n) có $x_1=1, x_{n+1}=\frac{x_n}{2+x_n},\forall n\in\mathbb{N}^*,$ tìm x_n và chứng minh $x_n<\frac{1}{n},\forall n\geq 2.$

HD. Xét hai dãy (u_n), (v_n) thoả mãn $u_1=v_1=1, u_{n+1}=u_n, v_{n+1}=u_n+2v_n,\forall n\in\mathbb{N}^*,$ thì $x_n=\frac{u_n}{v_n}$. Ta thấy $x_n=1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Và $v_{n+1}=2v_n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow v_{n+1}+1=2(v_n+1),\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $v_n+1=2.(v_{n-1}+1)=2^2(v_{n-2}+1)=$

$= ... = 2^{n-1}(v_1+1) = 2^n \Rightarrow v_n = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $x_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2^n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ...C_n^n >$ $> C_n^0 + C_n^1 = 1 + n, \forall n \geq 2$, tức là $x_n = \frac{1}{2^n - 1} < \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$.

VD8. Cho dãy (x_n) có $x_0 = 2, x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{2 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, tìm x_n và tìm phần nguyên của $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

HD. Xét hai dãy (u_n), (v_n) thoả mãn $u_0 = 2, v_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n + v_n, v_{n+1} = u_n + 2v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, thì $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Ta có $u_1 = 2u_0 + v_0 = 5, u_{n+2} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n + 2v_n = 2u_{n+1} + u_n + 2(u_{n+1} - 2u_n) \Rightarrow u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$, phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$, nên $u_n = A + B.3^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Do $u_0 = 2, u_1 = 5$ nên $A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$. Suy ra $u_n = \frac{3^{n+1}+1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tính được $v_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy $x_n = \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Đặt $S = x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{3^3+1}{3^3-1} + ... + \frac{3^n+1}{3^n-1} + \frac{3^{n+1}+1}{3^{n-1}-1}$. Lưu ý $x_n = \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1} = 1 + \frac{2}{3^{n+1}-1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $(1+2)^{n+1} = C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1.2 + C_{n+1}^2.2^2 + ... + C_{n+1}^{n+1}.2^{n+1} \geq C_{n+1}^0 + C_{n+1}^2.2^2 = 1 + (n+1)n.\frac{1}{2}.4 = 2n(n+1) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dẫn tới $3^{n+1} - 1 \geq 2n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = 1 + \frac{2}{3^{n+1}-1} \leq 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do vậy với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $S = x_1 + x_2 + ... + x_n \leq (1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = n + 1 - \frac{1}{n+1} < n + 1$. Mặt khác $S = x_1 + x_2 + ... + x_n > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy $n < S < n + 1, \forall \in \mathbb{N}^*$, nên $[S] = n, \forall \in \mathbb{N}^*$.

4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ

VD9. Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_{13}$ thoả mãn $a_1 + a_2 + ... + a_{13} \geq 13$. Chứng minh dãy (u_n) cho bởi $u_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_{13}^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, là dãy tăng không nghiêm ngặt.

HD. Với mọi số dương a và số nguyên dương n ta có $(a^n - 1)(a - 1) \geq 0$ nên $a^{n+1} - a^n \geq a - 1$. Từ đó suy ra $u_{n+1} - u_n = (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_{13}^{n+1}) - (a_1^n + a_2^n + ... + a_{13}^n) \geq a_1 + a_2 + ... + a_{13} - 13 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, hay $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng không nghiêm ngặt.

VD10. Chứng minh dãy số (u_n) cho bởi $u_1 = 1$, $u_n = \frac{-1}{3 + u_{n-1}}, \forall n = 2, 3, 4...$ là dãy số giảm và bị chặn.

HD. * Trước hết ta chứng minh $u_n > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với n = 1 thì $u_1 = 1 > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Giả sử $u_k > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Khi đó $3 + u_k > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{3+u_k} < \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow u_{k+1} = \frac{-1}{3+u_k} > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Theo nguyên lí qui nạp toán học, ta có $u_n > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là (u_n) bị chặn dưới bởi $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

* Bây giờ ta xét hiệu $u_n - u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3+u_n} = \frac{u_n^2 + 3u_n + 1}{3+u_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, do $u_n > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm.

* Vì (u_n) giảm nên $1 = u_1 > u_2 > ... > u_n > u_{n+1} > ...$ suy ra (u_n) bị chặn trên bởi 1. Vậy (u_n) là dãy số bị chặn.

Nhận xét. Ta có kết luận tương tự đối với dãy số (u_n) cho bởi $u_1 = \alpha$, $u_n = \frac{-a}{b + cu_{n-1}}, \forall n = 2,3,4...$, với a, b, c dương, $b^2 - 4ac > 0$, $\alpha > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$.

VD11. Xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy số (u_n) có $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \forall n \in \mathbb{N}^*$, ở đó a > 0 là hằng số.

HD. Do $x_1 > 0, a > 0$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \forall n \in \mathbb{N}^*$, nên bằng qui nạp ta chứng minh được $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là dãy ($u_n$) bị chặn dưới. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}) \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2$. Do đó $\frac{x_{n+1}}{x_n} = $ $= \frac{1}{2} + \frac{a}{2x_n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1, \forall n \geq 2$. Suy ra ($u_n$) là dãy giảm không nghiệm ngặt, kể từ số hạng thứ 2 trở đi. Dễ thấy (u_n) bị chặn trên. Vậy (u_n) là dãy bị chặn.

BÀI TẬP.

7) Cho dãy $(x_n): x_1 = 7, x_2 = 50, x_{n+2} = 4x_{n+1} + 5x_n - 1975, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $x_{1996} \vdots 1997$.

8) Cho dãy các số nguyên $(x_n): x_1 = 15, x_2 = 35, x_3 = 405, x_{n+3} = 6x_{n+2} + 13x_{n+1} - 42x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm những số hạng của dãy mà chữ số tận cùng của số hạng đó là số 0.

5. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

✍ Chúng tôi lưu ý kí hiệu n là một biến số nguyên dương, còn n_0 là một hằng số nguyên dương (trừ trường hợp có chú thích cụ thể).

✍ Một dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy số hội tụ, nếu nó có giới hạn vô cực hoặc không có giới hạn thì ta nói nó phân kì.

✍ Khi xét giới hạn của dãy số (u_n) ta có thể chỉ xét các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ n_0 trở đi, tức là việc thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của dãy số không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ, và không làm ảnh hưởng đến giới hạn (nếu có) của dãy số đó.

✍ Giới hạn của dãy số (nếu có) là duy nhất. Tức là nếu $\lim u_n = u$ thì $\lim u_{n+k} = \lim u_{n-k} = u$, với k là số nguyên dương tùy ý.

✍ $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim|u_n| = 0$.

✍ $\lim u_n = u \Leftrightarrow \lim|u_n - u| = 0$.

✍ $\lim u_n = u \Leftrightarrow \lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = u$.

✍ Nếu $\lim u_n = u$ thì $\lim|u_n| = |u|$ và $\lim u_n^k = u^k$ (k nguyên dương), $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u} (u \neq 0)$.

✍ Nếu $u_n < u_{n+1} < M$ ($\forall n \geq n_0$) thì (u_n) hội tụ, $\lim u_n = u \leq M$, và $u_n < u$ ($\forall n \geq n_0$).

✍ Nếu $u_n \leq u_{n+1} \leq M$ ($\forall n \geq n_0$) thì (u_n) hội tụ, $\lim u_n = u \leq M$, và $u_n \leq u$ ($\forall n \geq n_0$).

✍ Nếu $u_n \leq u_{n+1}$($\forall n \geq n_0$) và (u_n) không bị chặn trên thì $\lim u_n = +\infty$.

✍ Nếu $u_n > u_{n+1} > m$ ($\forall n \geq n_0$) thì (u_n) hội tụ, $\lim u_n = u \geq m$, và $u_n > u$ ($\forall n \geq n_0$).

✍ Nếu $u_n \geq u_{n+1} \geq m$ ($\forall n \geq n_0$) thì (u_n) hội tụ, $\lim u_n = u \geq m$, và $u_n \geq u$ ($\forall n \geq n_0$).

✍ Nếu $u_n \geq u_{n+1}$($\forall n \geq n_0$) và (u_n) không bị chặn dưới thì $\lim u_n = -\infty$.

✍ Một dãy số hội tụ thì bị chặn.

✍ Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ (hoặc $x_n < y_n < z_n$) với $\forall n \geq n_0$, đồng thời $\lim x_n = \lim z_n = a$ thì $\lim y_n = a$ (nguyên lí giới hạn kẹp).

✍ Nếu $u_n \geq 0$ (hoặc $u_n > 0$) với $\forall n \geq n_0$, và $\lim u_n = u$ thì $u \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{u}$.

✍ Giả sử $u_n \le v_n$ (hoặc $u_n < v_n$) với $\forall n \ge n_0$. Khi đó:

- Nếu $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$ thì $u \le v$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.
- Nếu $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.

✍ Ta có $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$.

✍ Nếu (u_n) bị chặn và $\lim v_n = 0$ thì $\lim(u_nv_n) = 0$.

VD12. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_n = \dfrac{2a_{n-1}.a_{n+1}}{a_{n-1}+a_{n+1}}$, $\forall n > 1$. Tìm $\lim a_n$.

HD. Nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $a_k = 0$ thì $a_{k+1} = \dfrac{2a_k.a_{k+2}}{a_k+a_{k+2}} = 0$, suy ra $a_{k+2} = \dfrac{2a_{k+1}.a_{k+3}}{a_{k+1}+a_{k+3}} = 0$, và dẫn tới $a_{k+1} = \dfrac{2a_k.a_{k+2}}{a_k+a_{k+2}}$ không có nghĩa. Do vậy $a_n \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Bây giờ ta đặt $u_n = \dfrac{1}{a_n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), thì $u_n \ne 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), thay vào đẳng thức ở đề bài ta được $u_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-1}+u_{n+1})$, $\forall n > 1$, suy ra (u_n) là cấp số cộng có công sai d, và số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d \ne 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy $a_n = \dfrac{a_1}{1+(n-1)da_1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Nếu $d = 0$ ($\Leftrightarrow u_1 = u_2 = \ldots \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots$) thì $a_n = a_1$($\forall n \in \mathbb{N}^*$) và $\lim a_n = a_1$. Nếu $d \ne 0$ ($\Leftrightarrow$ các số hạng của dãy (u_n) phân biệt $\Leftrightarrow$ các số hạng của dãy (a_n) phân biệt) thì $\lim a_n = \lim\dfrac{a_1}{1+(n-1)da_1} = 0$.

Vậy, nếu các số hạng của (a_n) bằng nhau thì $\lim a_n = a_1$, nếu các số hạng của dãy (a_n) phân biệt thì $\lim a_n = 0$.

VD13. Chứng minh rằng $\lim q^n = \begin{cases} 0, \text{ khi } |q|<1 \\ 1, \text{ khi } q = 1 \\ +\infty, \text{ khi } q > 1 \\ \text{không tồn tại, khi } q \le -1 \end{cases}$.

HD. Nếu $q = 1$ thì có ngay $\lim q^n = 1$. Và nếu $q = 0$ thì cũng có ngay $\lim q^n = 0$.

Nếu $0 < |q| < 1$ thì $\dfrac{1}{|q|} = 1 + a$ ($a > 0$) $\Rightarrow \dfrac{1}{|q|^n} = (1+a)^n = C_n^0 + a.C_n^1 + \ldots + a^n.C_n^n \ge 1 + na > 0$, với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $0 < |q|^n \le \dfrac{1}{1+na}$, với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì $a > 0$ nên $\lim\dfrac{1}{1+na} = 0$. Theo nguyên lí giới hạn kẹp thì $\lim|q|^n = 0$, hay $\lim q^n = 0$.

Nếu $q > 1$ thì $0 < \dfrac{1}{q} < 1$ nên theo chứng minh trên $\lim\dfrac{1}{q^n} = 0$. Ta đi đến $\lim q^n = +\infty$.

Nếu $q = -1$ thì $\lim q^{2n} = 1$ còn $\lim q^{2n+1} = -1$ nên không tồn tại $\lim q^n$.

Nếu $q < -1$ thì $q^2 > 1$ nên $\lim q^{2n} = \lim(q^2)^n = +\infty$, và $\lim q^{2n+1} = \lim[q.(q^2)^n] = -\infty$, vì thế không tồn tại $\lim q^n$.

VD14. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_n \le a_{n+1} - a_{n+1}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn $\lim a_n$.

HD. Từ $a_n \le a_{n+1} - a_{n+1}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $a_n \le a_{n+1}$ và $a_n \le \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tức là (a_n) là dãy bị chặn trên và không giảm. Do đó (a_n) có giới hạn hữu hạn $\lim a_n = a$. Lấy giới hạn hạn hai vế bất đẳng thức đề bài cho, được $a \le a - a^2$, hay $a = 0$. Vậy $\lim a_n = 0$.

VD15. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 3$, $x_{n+1}^3 - 3x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn $\lim x_n$.

HD. Ta thấy $x_1 = 3 > 2$. Giả sử $x_k > 2$, lúc này $x_{k+1}^3 - 3x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} > \sqrt{2+2} = 2$ nên $x_{k+1}^3 - 3x_{k+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow (x_{k+1} + 1)^2(x_{k+1} - 2) > 0 \Leftrightarrow x_{k+1} > 2$. Tức là $x_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$, có $f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t + 1)(t - 1) > 0$, $\forall t > 2$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Kiểm tra thấy $x_1^3 - 3x_1 = 18 > x_2^3 - 3x_2 = \sqrt{5} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$. Giả sử $x_k > x_{k+1} \Rightarrow \sqrt{2 + x_k} > \sqrt{2 + x_{k+1}} \Rightarrow x_{k+1}^3 - 3x_{k+1} > x_{k+2}^3 - 3x_{k+2} \Rightarrow f(x_{k+1}) > f(x_{k+2}) \Rightarrow x_{k+1} > x_{k+2}$. Do đó $x_n > x_{n+1}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n = x \ge 2$. Lấy giới hạn hai vế đẳng thức đề bài ta được $x^3 - 3x = \sqrt{2 + x} \Leftrightarrow x^6 - 6x^4 + 9x^2 = x + 2$ (vì $x \ge 2$ nên $x^3 - 3x > 0$) $\Leftrightarrow x^6 - 6x^4 + 9x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2).(x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2).(x^2(x^3 - 4) + 2x^3(x - 1) + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (do $x \ge 2$). Vậy $\lim x_n = 2$.

VD16. Tính giới hạn:

a) $\lim \dfrac{[(2+\sqrt{3})^n]}{(2+\sqrt{3})^n}$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của số thực x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

b) $\lim\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dots + \dfrac{2n-1}{2^n}\right)$. c) $\lim \dfrac{n^c}{a^n}$ $(a > 1, c > 0)$. d) $\lim \sqrt[n]{n}$. e) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

HD. a) Đặt $a_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$, nhờ công thức khai triển nhị thức Niuton ta thấy ngay a_n là số nguyên dương. Mặt khác $-1 < -(2-\sqrt{3})^n < 0$ nên có $[(2+\sqrt{3})^n] = [2a_n - (2-\sqrt{3})^n] = 2a_n + [-(2-\sqrt{3})^n] = 2a_n - 1$.

Vậy $\lim \dfrac{[(2+\sqrt{3})^n]}{(2+\sqrt{3})^n} = \lim \dfrac{2a_n - 1}{(2+\sqrt{3})^n} = \lim \dfrac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1}{(2+\sqrt{3})^n} = \lim\left(1 + \dfrac{1}{(7+4\sqrt{3})^n} - \dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^n}\right) = 1$.

Nhận xét. Với x, y, n, r nguyên dương, r không là số chính phương thì tồn tại hai dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) sao cho $(x + y\sqrt{r})^n = a_n + b_n\sqrt{r}$; $(x - y\sqrt{r})^n = a_n - b_n\sqrt{r}$; với $a_n = \dfrac{(x+y\sqrt{r})^n + (x-y\sqrt{r})^n}{2}$, $b_n = \dfrac{(x+y\sqrt{r})^n - (x-y\sqrt{r})^n}{2}$.

b) Ta đặt $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dots + \dfrac{2n-1}{2^n} \Rightarrow 2x_n = 1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2^2} + \dots + \dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$. Ta có $x_n = 2x_n - x_n = 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-2}} + \dfrac{1-2n}{2^n} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-2}} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n-1}}$. Dễ thấy $\lim \dfrac{1}{2^{n-2}} = \lim \dfrac{1}{2^n} = 0$. Với mọi $n > 2$ ta có $2^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} \ge C_{n-1}^2 = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2} > 0$. Từ đó suy ra $0 < \dfrac{n}{2^{n-1}} < \dfrac{2n}{n^2 - 3n + 2}$, $\forall n > 2$.

Mà $\lim \dfrac{2n}{n^2 - 3n + 2} = 0$ nên $\lim \dfrac{n}{2^{n-1}} = 0$. Vậy $\lim x_n = 3$.

c) Với hai số a > 1 và c > 0 ta biến đổi $\frac{n^c}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{\frac{n}{c}}}\right)^c = \left(\frac{n}{(1+b)^n}\right)^c$ ở đó b = $a^{\frac{1}{c}}$ – 1 > 0. Nhận thấy với mọi n $\geq$ 2 thì

$(1 + b)^n = C_n^0 + bC_n^1 + b^2C_n^2 + ... + b^nC_n^n \geq b^2C_n^2 = \frac{(n^2-n)b^2}{2}$ > 0 suy ra 0 < $\frac{n}{(1+b)^n} < \frac{2}{(n-1)b^2}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *.

Từ đây và do lim$\frac{2}{(n-1)b^2}$ = 0 nên lim$\frac{n}{(1+b)^n}$ = 0, dẫn tới lim$\frac{n^c}{a^n}$ = lim$\left(\frac{n}{(1+b)^n}\right)^c$ = 0.

d) Với mọi n $\geq$ 9 ta có $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{\sqrt{n}} + \frac{C_n^2}{n} + \frac{C_n^3}{n\sqrt{n}} + ... + \frac{C_n^n}{\sqrt{n^n}} \geq 1 + \sqrt{n} + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2-3n+2}{6\sqrt{n}} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{n}{2} + \frac{n\sqrt{n}}{6} + \frac{1}{3\sqrt{n}} > \frac{n}{2} + \frac{n\sqrt{n}}{6} = n + \frac{n\sqrt{n}}{6} - \frac{n}{2} = n + \frac{n(\sqrt{n}-3)}{6} \geq n$. Dẫn đến $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ với

mọi n $\geq$ 9. Mà lim $(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ = 1 nên suy ra lim$\sqrt[n]{n}$ = 1.

Nhận xét. Với a >0, a $\neq$ 1, thì lim$\frac{\log_a n}{n}$ = 0.

e) Trước hết ta có n! = 1.2.3…n $\leq$ n^n $\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *. Mặt khác $\forall$k = $\overline{1, n}$ ta luôn có $(n-k)(k-1) \geq 0 \Rightarrow k(n-k+1) \geq n$, cho k chạy từ 1 đến n ta thu được n bất đẳng thức mà hai vế đều dương, nhân n bất đẳng thức này, vế với vế tương ứng, ta được $(n!)^2 \geq n^n$ hay $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, và lim$\frac{1}{n}$ = lim$\frac{1}{\sqrt{n}}$ = 0 suy ra lim$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ = 0.

VD17. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn u_1 = – 2, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *.

a. Chứng minh u_n < 0, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *.

b. Đặt $v_n = \frac{1+u_n}{u_n}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *. Chứng minh (v_n) là cấp số cộng.

c. Tìm công thức số hạng tổng quát của (u_n), (v_n), và tính các giới hạn limu_n, limv_n.

HD. a) Ta chứng minh u_n < 0 ($\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *) bằng phương pháp quy nạp toán học. Rõ ràng u_1 = – 2 < 0. Bây giờ giả sử u_k < 0 $\Rightarrow$ 1 – u_k > 0. Dẫn tới $u_{k+1} = \frac{u_k}{1-u_k}$ < 0. Vậy u_n < 0 ($\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *).

b) Đặt $v_n = \frac{1+u_n}{u_n}$ thì $v_n \neq 1$ và $u_n = \frac{1}{v_n-1}$. Ta có $v_1 = \frac{1-2}{-2} = \frac{1}{2}$. Từ $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}$ ta có $\frac{1}{v_{n+1}-1} = \frac{1}{v_n-1} : (1-\frac{1}{v_n-1})$ hay $v_{n+1} = v_n - 1$ ($\forall$ n $\in \mathbb{N}$ *). Vậy (v_n) là cấp số cộng có số hạng đầu tiên $v_1 = \frac{1}{2}$, công sai d = –1.

c) Từ câu b ta có ngay $v_n = \frac{3}{2} - n$, và $u_n = \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - n - 1}$ hay $u_n = \frac{2}{1-2n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Như vậy $\lim u_n = 0$, $\lim v_n = -\infty$.

VD18. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $0 < u_n < 1$ và $u_{n+1} < 1 - \frac{1}{4u_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $u_n > \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

HD. Từ $0 < u_n < 1$ và $u_{n+1} < 1 - \frac{1}{4u_n}$ suy ra $u_n(1 - u_{n+1}) > \frac{1}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số u_n và $1 - u_{n+1}$ ta có $u_n + (1 - u_{n+1}) \geq 2\sqrt{u_n(1-u_{n+1})} > 2.\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$ hay $u_n + 1 - u_{n+1} > 1$ hay $u_n > u_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Dãy (u_n) giảm và bị chặn nên có giới hạn hữu hạn $\lim u_n = u \in [0;\ 1]$. Lấy giới hạn hai vế của bất đẳng thức $u_n(1 - u_{n+1}) > \frac{1}{4}$ ta được $u(1 - u) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$. Tức là $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Bây giờ ta đi chứng minh $u_n > \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho $u_k \leq \frac{1}{2}$. Lúc này $\frac{1}{2} \geq u_k > u_{k+1} > \ldots > u_{n+k} > \ldots$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $\frac{1}{2} \geq u_k > u_{k+1} \geq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+k} = \frac{1}{2}$. Điều này vô lí. Vậy $u_n > \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

BÀI TẬP

9) Tính giới hạn:

1) $\lim\left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{3^3}{n^3} + \frac{5^3}{n^3} + \ldots + \frac{(2n-1)^3}{n^3}\right)$.

2) $\lim \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4}$.

3) $\lim\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

4) $\lim\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}\right)$.

5) $\lim\left(\cos\frac{1}{n} + a.\sin\frac{1}{n}\right)^n$.

6) $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

7) $\lim \frac{1^1 + 2^2 + \ldots + n^n}{n^n}$.

8) $\lim \frac{a^n}{n!}$ (với a > 0).

9) $\lim \sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + 2010^n}$.

10) $\lim\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

10) Dãy số (x_n) có $x_1 = a > 0$, $x_{n+1}^2 - x_n = a$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Tìm $\lim x_n$.

11) Dãy số (a_n) có $0 < a_n < 1$ và $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim x_n$.

6. DÃY SỐ SINH BỞI PHƯƠNG TRÌNH

VD19. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng phương trình $x^{n+1} = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n. Tìm $\lim x_n$.

HD. Trước hết nếu x > 0 thì x + 1 > 1, từ phương trình $x^{n+1} = x + 1 \Rightarrow x^{n+1} > 1 \Rightarrow x > 1$. Do đó nếu phương trình $x^{n+1} = x + 1$ có nghiệm dương thì nghiệm đó sẽ lớn hơn 1. Ta xét hàm số $f_n(x) = x^{n+1} - x - 1$ với x > 1, có đạo hàm $f_n'(x) = (n + 1)x^n - 1 > (n + 1) - 1 = n > 0$ với mọi x > 1. Suy ra $f_n(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Từ đây, và tính liên tục của $f_n(x)$, và $f_n(1) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, ta kết luận phương trình $x^{n+1} = x + 1$ có nghiệm dương duy nhất x_n. Tất nhiên $x_n > 1$. Do $f_{n+1}(x)$ liên tục, $f_{n+1}(1) = -1 < 0$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+2} - x_n - 1 > x_n^{n+1} - x_n - 1 =$

$= f_n(x_n) = 0$, nên phương trình $x^{n+2} = x + 1$ có nghiệm dương duy nhất x_{n+1} và $1 < x_{n+1} < x_n$. Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn hữu hạn $\lim x_n = a \geq 1$. Do x_n là nghiệm dương của phương trình $x^{n+1} = x + 1$ nên

$$x_n^{n+1} - x_n - 1 = 0 \Rightarrow x_n = (1+x_n)^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \lim x_n = \lim(1+x_n)^{\frac{1}{n+1}} = (1+a)^0 = 1.$$

VD20. Cho n là một số nguyên dương > 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Chứng minh rằng x_n dần về 1 khi n dần đến vô cùng và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$.

HD. Rõ ràng $x_n > 1$. Đặt $f_n(x) = x_n - x - 1$. Khi đó $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x^n{}_{n+1} - x_n - 1 > x_n{}^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0$. Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$. Suy ra dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn a. Ta chứng minh a = 1. Thật vậy, giả sử a > 1. Khi đó $x_n \geq a$ với mọi n và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^n \geq a^n > 3$ và $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn vì $f_n(x_n) = 0$. Để giải phần cuối của bài toán, ta đặt $x_n = 1 + y_n$ với $\lim y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$, ta được $(1+y_n)^n = 2 + y_n$. Lấy logarith hai vế, ta được $n\ln(1+y_n) = \ln(2+y_n)$. Từ đó suy ra $\lim n\ln(1+y_n) = \ln 2$. Nhưng $\lim \ln(1+y_n)/y_n = 1$ nên từ đây ta suy ra $\lim ny_n = \ln 2$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \ln 2$.

VD21. Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-n} = 0$ thuộc khoảng (0, 1)

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ
b) Hãy tìm giới hạn đó.

HD. Rõ ràng x_n được xác định 1 cách duy nhất, $0 < x_n < 1$. Ta có $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + 1/(x_n-n-1) = 1/(x_n-n-1) < 0$, trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số $\{x_n\}$ giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn. Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau: $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n > \ln(n)$ (Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $\ln(1+1/n) < 1/n$). Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n. Do $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n > 1/a$. Khi đó với $n \geq N$ ta có $0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \ldots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$. Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

VD22. (VMO 2007) Cho số thực a > 2 và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \ldots + x + 1$.

a) Chứng minh với mỗi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.
b) Gọi nghiệm đó là x_n, chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

HD. Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$. Dễ dàng nhận thấy $0 < x_n < 1$. Ta sẽ chứng minh dãy x_n tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$. Tương tự như ở những lời giải trên, ta xét

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \ldots + x + 1 = x_nf_n(x_n) + 1 = ax_n + 1.$$

Vì ta đã có $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$ nên ta chỉ cần chứng minh $ax_n + 1 < a$ là sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$. Như vậy, cần chứng minh $x_n < (a-1)/a$. Thật vậy, nếu $x_n \geq (a-1)/a$ thì

$$f_n(x_n) \geq a^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1-\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{a-1}{a}} = (a-1)^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n + a - (a-1)\left(\frac{a-1}{a}\right)^n > a$$

(do a – 1 > 1). Vậy dãy số tăng $\{x_n\}$ tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ.

VD23. (VMO 2002) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$ có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

HD. Đặt $f_n(x)$ như trên và gọi x_n là nghiệm > 1 duy nhất của phương trình $f_n(x) = 0$. Ta có

$$f_n(4) = \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có : $1/4n = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)||x_n-4|$ với c thuộc khoảng $(x_n, 4)$. Nhưng do $|f_n'(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + ... > \frac{1}{9}$ n ên từ đây $|x_n - 4| < 9/4n$, suy ra $\lim x_n = 4$.

VD24. Cho n là một số nguyên dương > 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Hãy tìm số thực a sao cho giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

HD. Đặt $P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1$. Ta có $P_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^2 - x - 1 = x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x)$.
Từ đó $P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n-1) + P_n(x_n) = (x_n^2+x_n+1)(x_n-1) = x_n^3 - 1$.
Áp dụng định lý Lagrange, ta có: $(x_n^2+x_n+1)(x_n - 1) = P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P_{n+1}'(c)$
với c thuộc (x_{n+1}, x_n), $P_{n+1}'(x) = (n+1)x^n - 2x - 1$. Từ đó
$(n+1)(x_{n+1}+1+1/x_{n+1}) - 2x_{n+1} - 1 = P_{n+1}'(x_{n+1}) < P_{n+1}'(c) < P_{n+1}'(x_n) = (n+1)(x_n^2+x_n+1) - 2x_n - 1$.
Từ đây, với lưu ý $\lim x_n = 1$, ta suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}'(c)}{n} = 3$. Tiếp tục sử dụng $\lim n(x_n - 1) = 3$, ta suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} nP_{n+1}'(c)(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} n(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = 3\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1}).\frac{P_{n+1}'(c)}{n} = 3\ln(3) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}'(c)}{n} = 3\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1})3 = 3\ln(3) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) = \ln(3)$$

Vậy với c = 2 thì giới hạn đã cho tồn tại, hữu hạn và khác 0. Dễ thấy với c > 2 thì giới hạn đã cho bằng vô cùng và nới c < 2 thì giới hạn đã cho bằng 0. Vậy c = 2 là đáp số duy nhất của bài toán.

BÀI TẬP

12) Với mỗi số nguyên dương n phương trình $x = \sqrt[n]{x+1}$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n. Tìm $\lim(n(x_n - 1))$.