Chuyên đề.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
TRONG CÁC BÀI TOÁN HÀM SỐ

Gv. Nguyễn Tất Thu – Tp. Biên Hòa, Đồng Nai

I. Các bài toán liên quan đến nghiệm của phương trình, bất phương trình.

Định lí 1. Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của hai đồ thị

$y = f(x)$ và $y = g(x)$

Định lí 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và $m = \min\limits_{x\in D} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in D} f(x)$ thì phương trình $f(x) = k$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$m \le k \le M .$$

Định lí 3. Bất phương trình $f(x) \ge g(x)$ nghiệm đúng mọi x thuộc D khi và chỉ khi

$$\min_{x\in D} f(x) \ge \max_{x\in D} g(x)$$

Các ví dụ.

Bài 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$$

(**HSG Nghệ An 2005**)

Giải.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ có tập xác định là $D = IR$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2+x+1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]$$

$\Leftrightarrow x = 0$ không thỏa mãn (1).

Vậy $f'(x) = 0$ vô nghiệm, mà $f'(0) = 1 > 0$, do đó $f'(x) > 0, \forall x \in IR$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 < m < 1$.

Bài 2. Tìm a để phương trình $ax^2+1=\cos x$ có đúng một nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(**Đề thi HSG tỉnh Hải Dương Lớp 12 năm 2005**)

Giải.

Ta thấy để phương trình có nghiệm thì $a \le 0$. Khi đó, phương trình tương đương

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = a \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -2a$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sin t}{t}, t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Ta có

$$f'(t) = \frac{t.\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t\left(t - tgt\right)}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

mà $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ và $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < f(t) < 1 \Rightarrow \frac{8}{\pi^2} < \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} < 1, \ \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{8}{\pi^2} < -2a < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < -\frac{4}{\pi^2}$.

Bài 3. Cho phương trình

$$x^6 + 3x^5 - 6x^4 - ax^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số *a*, để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

(**HSG Nam Định 2004**)

Giải.

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm phương trình. Chia hai vế phương trình cho x^3 ta được

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 6(x + \frac{1}{x}) - a = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \ge 2$.

Ta được phương trình

$$t(t^2 - 3) + 3(t^2 - 2) - 6t = a \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 9t = a + 6 \qquad (2)$$

– Nếu $t = \pm 2$, thì phương trình đã cho có một nghiệm.

– Nếu $|t| > 2$, thì với mỗi giá trị của t cho tương ứng với hai giá trị của x

Như vậy, ta xét hai trường hợp

<u>TH 1</u>. Nếu (2) có đúng hai nghiệm $t = \pm 2$, thì $\begin{cases} 2 = a + 6 \\ 22 = a + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

<u>TH 2</u>. Nếu (2) có đúng một nghiệm $|t| > 2$.

Xét hàm số

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t, |t| > 2 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t-1)(t+3)$$

Bảng biến thiên

x		-3		-2	1	2	
$f'(t)$		0	$-$		0		+
$f(t)$	↗	27	↘	22		2	↗

$\Rightarrow\ 2 < a + 6 < 22 \Leftrightarrow -4 < a < 16$

Bài 4. Cho hàm số $y = -x + \sqrt{(x+a)(x+b)}$ với a, b là hai số thực dương khác nhau cho trước.

Chứng minh với mỗi số thực $s \in (0;1)$ đếu tồn tại duy nhất số thực $\alpha > 0$ sao cho

$$f(\alpha) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$$

(HSG QG bảng A năm 2006)

Giải.

Trước hết ta có BĐT $\frac{a^s + b^s}{2} \le (\frac{a+b}{2})^s$ (1) ta có thể chứng minh (1) bằng hàm số hoặc bằng BĐT *Becnoully*.

Áp dụng BĐT *Côsi* và (1) ta có $\sqrt{ab} < (\frac{a^s + b^s}{2})^{\frac{1}{s}} < \frac{a+b}{2}$ (*) (do $a \neq b$)

Mặt khác ta có $f'(x) = \frac{2x + a + b - 2\sqrt{(x+a)(x+b)}}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}$

Ta dễ dàng chứng minh được $f'(x) > 0, \forall x > 0$ suy ra $f(x)$ đồng biến với $x > 0$ nên

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt{ab} \le f(x) \le \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{a+b}{2} \quad (**)$$

Vì $f(x)$ liên tục khi $x > 0$ nên từ (*) và (**) ta có đpcm.

Bài tập.

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc $[0; \frac{\pi}{4}]$

$$(4 - 6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x \cos x - (4m-3)\cos x = 0$$

2. Tìm m để số nghiệm của phương trình

$$15x^2 - 2(6m^2 + 1)x - 3m^4 + 2m^2 = 0$$

không nhiều hơn số nghiệm của phương trình

$$(3m-1)^2 12^x + 2x^3 + 6x = (3^{6m} - 9)\sqrt{2^{8m} - 0,25}$$

(HSG Nghệ An 1998)

3. Tìm tất cả các giá trị a để bất phương trình

$\ln(1+x) \geq x - ax^2$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

4. a) Chứng minh nếu $a > 0$ là số sao cho bphương trình $a^x \geq 1 + x$ đúng với mọi $x \geq 0$ thì $a \geq e$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $a^x \geq 1 + x, \forall x$.

(HSG 12 Nam Định 2006)

II. Giải phương trình, hệ phương trình bằng phương pháp hàm số.

Định lí 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch) thì số nghiệm của phương trình $f(x) = k$ không nhiều hơn một và $f(x) = f(y)$ khi và chỉ khi $x = y$.

Định lí 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch) và hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Định lí 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp n và phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có m nghiệm, khi đó phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

Các ví dụ.

Bài 1. Giải phương trình

$$3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$$

(Olympic 30 – 4 – 2000)

Giải. Ta thấy phương trình chỉ có nghiệm trong $(-\frac{1}{2}; 0)$

$$pt \Leftrightarrow (-3x)(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}) = (2x+1)(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3})$$
$$\Leftrightarrow u(2 + \sqrt{u^2 + 3}) = v(2 + \sqrt{v^2 + 3}) \quad (1)$$

Với $u = -3x$, $v = 2x + 1$; $u, v > 0$. Xét hàm số $f(t) = 2t + \sqrt{t^4 + 3t^2}$ với $t > 0$

Ta có $f'(t) = 2 + \dfrac{2t^3 + 3t}{\sqrt{t^4 + 3t^2}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

(1) $\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow -3x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2. Giải phương trình

$$e^{tg^2 x} + \cos x = 2, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

(HSG Lớp 12 Nam Định 2006)

Giải.

Xét hàm số $f(x) = e^{tg^2x} + \cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có

$$\Rightarrow f'(x) = 2tgx.\frac{1}{\cos^2 x}e^{tg^2x} - \sin x = \sin x\left(\frac{2e^{tg^2x} - \cos^3 x}{\cos^3 x}\right)$$

Vì $2e^{tg^2x} \geq 2 > \cos^3 x > 0$

Nên dấu của $f'(x)$ chính là dấu của sin$x$.

Từ đây ta có $f(x) \geq f(0) = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 3. Giải phương trình

$$2003^x + 2005^x = 4006x + 2$$

(HSG Nghệ An 2005)

Giải Xét hàm số $f(x) = 2003^x + 2005^x - 4006x - 2$

Ta có $f'(x) = 2003^x \ln 2003 + 2005^x \ln 2005 - 4006$

$$f''(x) = 2003^x \ln^2 2003 + 2005^x \ln^2 2005 > 0, \forall x \;\Rightarrow f''(x) = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$\Rightarrow f'(x)$ có nhiều nhất là một nghiệm $\Rightarrow f(x)$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

mà $f(1) = f(0) = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Bài 4. Giải phương trình

$$3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$$

(TH&TT)

Giải. Đk $x > -\frac{1}{2}$

phương trình $\Leftrightarrow 3^x + x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x) \Leftrightarrow 3^x + \log_3 3^x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ ta có $f(t)$ là hàm đồng biến nên

(1) $\Leftrightarrow f(3^x) = f(1 + 2x) \Leftrightarrow 3^x = 2x + 1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ (2)

Xét hàm số $f(x) = 3^x - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 - 2 \Rightarrow f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

mà $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$

Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 3x - 3y & (1) \\ x + y = \frac{\pi}{5} & (2) \\ x, y > 0 & (3) \end{cases}$$

Giải.

Từ (2) và (3) ta có $x, y \in (0; \frac{\pi}{5})$

(1) $\Leftrightarrow$ $\sin x - 3x = \sin y - 3y$.

Xét hàm số $f(t) = \sin t - 3t$ với $t \in (0; \frac{\pi}{5})$ ta có $f(t)$ là hàm nghịch biến nên $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

thay vào (2) ta có $x = y = \frac{\pi}{10}$ là nghiệm của hệ.

Bài 6. Giải hệ

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x & (1) \\ \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{y+8}} & (2) \end{cases}$$

(**Olympic 30 – 4 – 2005**)

Giải.

Đk $\begin{cases} y \geq -1 \\ x \geq \sqrt{y+8} \end{cases}$ (*)

(1) $\Leftrightarrow$ $x + \tan x = y + \tan y \Leftrightarrow x = y$ (do hàm số $f(t) = t + \tan t$ là hàm đồng biến)

Thay vào (2) ta có $\sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{y - \sqrt{y+8}} \Leftrightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{y - \sqrt{y+8}} + 1$

$\Leftrightarrow y + 1 = y - \sqrt{y+8} + 2\sqrt{y - \sqrt{y+8}} + 1 \Leftrightarrow y + 8 = 4y - 4\sqrt{y+8}$

$\Leftrightarrow 3y - 8 = 4\sqrt{y+8} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{8}{3} \\ 9y^2 - 48y + 64 = 16y + 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{8}{3} \\ 9y^2 - 64y - 64 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 8$

Vậy $x = y = 8$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

Hệ hoán vị vòng quanh.

Định nghĩa. Là hệ có dạng

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Định lí 1. Nếu f, g là các hàm cùng tăng hoặc cùng giảm trên D và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ trên D thì $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Định lí 2. Nếu f, g khác tính đơn điệu trên D và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ trên A thì $x_1 = x_2 = ... = x_n$ nếu n lẻ và $\begin{cases} x_1 = x_3 = ... = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = ... = x_n \end{cases}$ nếu n chẵn.

Bài 7. Giải hệ

$$\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$$

Giải.

Ta giả sử (*x*,*y*,*z*) là nghiệm của hệ. Xét hàm số $f(t)=t^3+3t-3+\ln(t^2-t+1)$

ta có $f'(t)=3t^2+3+\dfrac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+1}}>0$ nên *f*(*t*) là hàm đồng biến

Ta giả sử $x=\max\{x,y,z\}$ thì $y=f(x)\ge f(y)=z \Rightarrow z=f(y)\ge f(z)=x$

Vậy ta có $x = y = z$. Vì phương trình $x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1)=0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$ nên hệ đã cho có nghiệm là $x = y = z = 1$.

Bài 8. Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x)=z \end{cases}$$

(HSG QG Bảng A năm 2006)

Giải. Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} \log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} \\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} \\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=g(x) \\ f(z)=g(y) \\ f(x)=g(z) \end{cases}$$

Trong đó, $f(t)=\log_3(6-t),\ g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$ với $t\in(-\infty;6)$

Ta có *f*(*t*) là hàm nghịch biến, $g'(t)=\dfrac{6-t}{\sqrt{\left(t^2-2t+6\right)^3}}>0,\forall t\in(-\infty;6)$ $\Rightarrow$ *g*(*t*) là hàm đồng biến

Nên ta có nếu (*x*,*y*,*z*) là nghiệm của hệ thì $x = y = z$ thay vào hệ ta được

$$\log_3(6-x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}},$$

phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x = y = z = 3$.

Bài 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)x^2 = 1+2(y^3-x) \\ (y+1)y^2 = 1+2(z^3-y) \\ (z+1)z^2 = 1+2(x^3-z) \end{cases}$$

Giải.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$

Hệ có nghiệm dạng: $\begin{cases} x = y = z \\ h(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

Nhận xét: $h(-2) < 0$, $h(0) > 0$, $h(1) < 0$, $h(2) > 0 \Rightarrow h(x) = 0$ có ba nghiệm thuộc $(-2;2)$.

Đặt $x = 2\cos u$, $u \in (0;\pi)$

Ta được phương trình

$\sin u(8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1) = 0$ ($\sin u \neq 0$)

$\Leftrightarrow \sin 4u = \sin 3u \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\}$

Bài tập

1. $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$
2. $81\sin^{10} x + \cos^{10} x = \dfrac{81}{256}$
3. $(x-1)(x+2) = (x^2-2)e^x + xe^{x^2-2}$
4. $3^{\cos x} = 2^{\cos x} + \cos x$
5. $(1+x)(2+4^x) = 3.4^x$
6. $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$
7. Tìm a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất

   $\begin{cases} x_1^2 = x_2^3 - 4x_2^2 + ax_2 \\ x_2^2 = x_3^3 - 4x_3^2 + ax_3 \\ \text{...........................} \\ x_n^2 = x_1^3 - 4x_1^2 + ax_1 \end{cases}$
8. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm

   a. $\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$;

   b. $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$

   c. $\tan^2 x + \cot^2 x + m(\tan x + \cot x) + 3 = 0$;

   d. $\dfrac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = m.\tan 2x$

III. Các bài toán cực trị, chứng minh bất đẳng thức.

Bài 1. Xác định a, b thỏa mãn bất đẳng thức

$$a \le \sin^{10}x + 2\cos^2 x \le b,\ \forall x \in R$$

Giải.

Đặt $t = \sin^2 x$, xét hàm số

$$f(t) = t^5 - 2t + 2,\ t \in [0;1]$$

$$a \le \min_{[0;1]} f(t) = 2 - \frac{8}{5}\times\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$$

$$b \ge \max_{[0;1]} f(t) = 2$$

Bài 2. Cho 4 số thực a, b, c, d thoả mãn $a^2 + b^2 = 1$; $c - d = 3$. Chứng minh

$$F = ac + bd - cd \le \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$$

(**HSG Nghệ An 2005**)

Giải.

Ta có $F \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - cd = \sqrt{2d^2+6d+9} - d^2 - 3d = f(d)$

Ta có $f'(d) = (2d+3)\dfrac{1-\sqrt{2(d+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2+6d+9}}$ vì $\dfrac{1-\sqrt{2(d+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2+6d+9}} < 0$ nên

$f(d) \le f(-\frac{3}{2}) = \dfrac{9+6\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. Cho $0 < x < y \le z \le 1$, $3x + 2y + z \le 4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$F = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

(TH&TT)

Giải.

Từ giả thiết ta có $x \le \dfrac{4-2y-z}{3}$ thay vào F ta được

$$F \le f(z) = \frac{1}{3}(4z^2 + 4z(y-2) + 10y^2 - 16y + 16) \le f(\frac{2-y}{2}) = \frac{1}{3}(9y^2 - 12y + 20) = \frac{1}{3}g(y)$$

Ta xét $\dfrac{2}{3} \le y \le 1$ (vì $y < \dfrac{2}{3}$ thì max không xảy ra), khi đó $g(y) \le g\left(\dfrac{2}{3}\right) = 16$

$\Rightarrow F \le \dfrac{16}{3}$, dấu "=" xảy ra khi $z = y = \dfrac{2}{3}; x = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\max F = \dfrac{16}{3}$

Bài 4. Cho $x \ge y \ge z \ge 0$. Chứng minh

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

Giải.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right),\ x\ge y\ge z\ge 0$

$\Rightarrow f'(x)=(\frac{1}{z}-\frac{1}{y})-(\frac{y}{x^2}-\frac{z}{x^2})=(y-z)(\frac{1}{yz}-\frac{1}{x^2})\ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến $\Rightarrow f(x)\ge f(y)=0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 5. Cho $a>b>c>0$. Chứng minh

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2>a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3$$

Giải.

Xét hàm số $f(a)=a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2-\left(a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3\right)$

Ta có $f'(a)=3a^2b^2+2ac^3-2ab^3-3a^2c^2$.

Tiếp tục lấy đạo hàm

$$f''(a)=6ab^2-6ac^2+2c^3-2b^3=2(b-c)[3a(b+c)-b^2-c^2-bc]>0 \text{ do } a>b>c>0$$

$\Rightarrow f'(a)$ là hàm đồng biến $\Rightarrow f'(a)\ge f'(b)=b^4+2bc^3-3b^2c^2>0$ (ta có thể chứng minh được nhờ bđt *Côsi*)

$\Rightarrow f(a)$ đồng biến $\Rightarrow f(a)>f(b)=0\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\ge xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)$$

Giải.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z$. Xét hàm số

$$f(x)=x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)-xy(x^2+y^2)-yz(y^2+z^2)-zx(z^2+x^2)$$

Ta có

$$f'(x)=4x^3-3x^2(y+z)+xyz+yz(x+y+z)-(y^3+z^3)\Rightarrow f''(x)=12x^2-6x(y+z)+2yz$$

$\Rightarrow f''(x)>0$ (do $x\ge y\ge z$)

$\Rightarrow f'(x)\ge f'(y)=z^2y-z^3=z^2(y-z)\ge 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến

$\Rightarrow (x)\ge f(y)=z^4-2z^3y+y^2z^2=z^2(z-y)^2\ge 0\Rightarrow$ đpcm.

Bài 7. Cho n, k là các số nguyên dương $n\ge 7; 2\le k<n$. Chứng minh

$$k^n>2n^k.$$

(HSG QG bảng B 96 – 97)

Giải.

Bđt $\Leftrightarrow n\ln k > k\ln n + \ln 2 \Leftrightarrow n\ln k - k\ln n - \ln 2$

Xét hàm số $f(x) = n\ln x - x\ln n - \ln 2$ với $x \in [2; n-1]$

$f'(x) = \dfrac{n}{x} - \ln n \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{n}{\ln n}$

$\dfrac{n}{\ln n} > 2 \Leftrightarrow e^n > n^2 \quad \forall n \ge 7$.

Xét hàm số $g(x) = e^x - x^2 \Rightarrow g'(x) = e^x - 2x \Rightarrow g''(x) = e^x - 2 > 0$

$\Rightarrow g'(x) > g'(7) = e^7 - 14 > 0 \Rightarrow g(x) > g(7) = e^7 - 49 > 0$

Vậy $f(x) \ge \min\{f(2), f(n-1)\}$. Ta chứng minh $\min\{f(2), f(n-1)\} \ge 0$

* $f(2) \ge 0 \Leftrightarrow 2^{n-1} \ge n^2$ ta dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp hoặc đạo hàm

* $f(n-1) \ge 0 \Leftrightarrow (n-1)^n \ge 2n^{n-1} \Leftrightarrow t > 2(1+\dfrac{1}{t})^t, \forall t \ge 6$ (*) trong đó $t = n - 1$

Ta có $(1+\dfrac{1}{t})^t < e < 3 \Rightarrow 2(1+\dfrac{1}{t})^t < 6 \le t \Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. Cho $0 < a \le b \le c$. Chứng minh

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \le 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}$$

Giải.

Đặt $\dfrac{b}{a} = \alpha$ và $\dfrac{c}{a} = x$. ĐK $1 \le \alpha \le x$. Khi đó bđt cần chứng minh trở thành

$\dfrac{2}{\alpha+x} + \dfrac{2\alpha}{1+x} + \dfrac{2x}{1+\alpha} \le \dfrac{x^2+x+4}{x+1} \Leftrightarrow x^2+x+1 \ge (2\dfrac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \dfrac{2x(x+1)}{1+\alpha})$

Xét hàm số

$$f(x) = x^2 + x + 1 - (2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha}) \quad \text{với } 1 \le \alpha \le x$$

Ta có $f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{2(2x+1)}{\alpha+1} - 2\dfrac{\alpha-1}{(x+\alpha)^2} = (\alpha-1)[\dfrac{2x+1}{\alpha+1} - \dfrac{2}{(x+\alpha)^2}] \ge 0$ do $1 \le \alpha \le x$

Như vậy hàm *f*(*x*) là đồng biến do đó $f(x) \ge f(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 3 - \dfrac{1}{\alpha}$

Nhưng $f'(\alpha) = 2\alpha - 3 + \dfrac{1}{\alpha^2} = \alpha + \alpha + \dfrac{1}{\alpha^2} - 3 \ge 3\sqrt[3]{\alpha.\alpha.\dfrac{1}{\alpha^2}} - 3 = 0$

$\Rightarrow f(x) \ge f(\alpha) \ge f(1) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 9. Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

Giải.

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}\Rightarrow xyz=1$ và bđt đã cho tương đương $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq\frac{3}{2}$

Giả sử $z\leq 1\Rightarrow xy\geq 1$ nên ta có $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geq\frac{2}{1+\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$

$\Rightarrow\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}+\frac{1}{1+z}=\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{1+t^2}=f(t)$ với $t=\sqrt{z}\leq 1$

Ta có $f'(t)=\frac{2}{(1+t)^2}-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\leq\frac{2(1-t)}{(1+t^2)^2}\leq 0\Rightarrow f(t)\geq f(1)=\frac{3}{2}\quad\forall t\leq 1\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét. Từ bài toán trên ta dễ dàng giải quyết được bài toán sau

Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh $(\frac{a}{a+b})^3+(\frac{b}{b+c})^3+(\frac{c}{c+a})^3\geq\frac{3}{8}$

(Chọn đội tuyển dự thi IMO 2005)

Bài tập áp dụng.

1. Cho $\alpha,\beta\in(0;\frac{\pi}{2})$. Chứng minh

   $\alpha.\sin\alpha-\beta\sin\beta>2(\cos\beta-\cos\alpha)$

2. Cho $x, y\in R$ và $2x-y=2$. Tìm GTNN của biểu thức

   $P=\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

(HSG QG Bảng B năm 1998)

3. Cho a, $b > 0$. Chứng minh

   $(a+1)\ln(a+1)+e^b\geq(a+1)(b+1)$

(HSG 12 Nam Định 2004)

IV. Các bài toán tam giác.

1. $\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C+3\sqrt{3}\leq 2\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$.

   Xét hàm số $f(x)=\text{cotg}x-\frac{2}{\sin x}$, $x\in(0;\pi)$

2. $1 + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \le \dfrac{13}{12}(\cos A + \cos B + \cos C) + \cos A\cos B\cos C$.

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

$1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

$(2) \Leftrightarrow (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)^2 + 1 \le \dfrac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C)$

3. $\dfrac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) - \dfrac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos A + \cos B = \dfrac{5}{6}$ (Δ không tù). Tính góc?

$(3) \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\cos^3 A - \cos^2 A\right) + \left(\dfrac{4}{3}\cos^3 B - \cos^2 B\right) = -\dfrac{1}{6}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{4}{3}t^3 - t^2$, $t \in [0;1)$

4. $\sin 2A + \sin 2B + \dfrac{2}{\sin C} \ge 4$.

5. $2\left(\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B}\right) \ge \sqrt{3}(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B) + 2$, Δ nhọn.

6. $\dfrac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \dfrac{1}{3}(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C) > \pi$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{3}\sin x + \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}x - x,\ x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$.