

Chuyên đề: TỐI ƯU HÓA BÀI TOÁN ĐẾM TRONG ĐẠI SỐ TỔ HỢP

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong kì thi tuyển sinh Đại học năm 2012 và năm 2013 bài toán tổ hợp và xác suất xuất hiện ở đề khối B (câu tổ hợp) và đề khối A (câu xác suất). Điều này đã làm các thí sinh bất ngờ, nhiều em tỏ ra lúng túng và rất khó định hướng cách làm, thậm chí đã trình bày lời giải nhưng không biết rằng lời giải và đáp án của mình liệu có đúng không.

Qua nghiên cứu, giảng dạy và học tập kinh nghiệm chúng tôi thiết nghĩ cần có những giải pháp giúp học sinh nắm được bản chất của bài toán tổ hợp, để từ đó học sinh có thêm những công cụ hữu ích giúp cho quá trình tìm lời giải bài toán tổ hợp của học sinh một cách chủ động, chính xác và hiệu quả nhất.

Chuyên đề này không có tham vọng giải quyết tất cả các bài toán liên quan đến đại số tổ hợp, chúng tôi chỉ giải quyết một phần của đại số tổ hợp. Nhưng qua chuyên đề này hi vọng rằng các thầy cô giáo và các học sinh có thêm một phần tài liệu quý báu hỗ trợ trong việc tự nghiên cứu, tích lũy chuyên môn, ôn tập và giảng dạy.

II. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

*Bố cục

Chuyên đề này được trình bày theo bố cục như sau:

- A. Cơ sở lý thuyết
- B. Phương pháp
- C. Các dạng toán
- D. Bài tập tự rèn luyện

*Nội dung

A. Cơ sở lý thuyết

Một số kiến thức cơ bản:

1. Quy tắc đếm

- a. **Quy tắc cộng:** Một công việc V bao gồm k công việc $V_1; V_2; \dots V_k$ độc lập với nhau trong đó:

V_1 : có n_1 cách thực hiện

V_2 : có n_2 cách thực hiện

...

V_k có n_k cách thực hiện

Như vậy Số cách thực hiện công việc V là $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

- b. **Quy tắc nhân:** Một công việc V được thực hiện lần lượt qua k giai đoạn $D_1; D_2; \dots D_k$ độc lập với nhau trong đó:

Giai đoạn D_1 : có n_1 cách thực hiện

Giai đoạn D_2 : có n_2 cách thực hiện

...

Giai đoạn D_k : có n_k cách thực hiện

Như vậy Số cách thực hiện công việc V là $n = n_1.n_2.\dots.n_k$

2. Hoán vị

- a) **Hoán vị:** (Theo định nghĩa SGK)

+ Khái niệm: Cho tập hợp A gồm n phần tử khác nhau ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập được gọi là 1 hoán vị của n phần tử đó.

+ Công thức xác định: $P_n = n(n-1)\dots 3.2.1 = n!$

+ Chú ý: Quy ước $0! = 1$

b) Hoán vị có lặp

+ Khái niệm: Có n vật ($n \geq 1$) được sắp vào n vị trí trong đó:

Có n_1 vật loại 1

Có n_2 vật loại 2

....

Có n_k vật loại 3

Ở đây $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Mỗi cách sắp thứ tự n vật như trên vào n vị trí gọi là hoán vị có lặp của n phần tử đó.

Công thức xác định:

+ Công thức xác định: Số hoán vị có lặp của n vật là $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

+ Chứng minh: Do có n_1 vật giống nhau nên số phương án sắp n_1 vật vào n_1 vị trí chỉ là một phương án cần tìm, và ta có $n_1!$ phương án giống nhau.

Tương tự...

Từ đó suy ra có $\frac{P_n}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ số hoán vị

c) Hoán vị vòng tròn

+ Khái niệm: Có n vật được sắp vào n vị trí theo một đường tròn

+ Công thức xác định: Số hoán vị vòng tròn là: $P_{n-1} = (n-1)\dots 3.2.1 = (n-1)!$

+ Chứng minh: Cố định một điểm trên đường tròn, sắp $n-1$ vật vào $n-1$ vị trí còn lại.

Như vậy chúng ta có $(n-1)!$ số hoán vị vòng tròn

3. Chỉnh hợp

+ Khái niệm: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử sắp thứ tự của tập A được gọi là 1 chỉnh hợp chập k của n phần tử

+ Công thức xác định

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chú ý: Khi $k = n$ thì $A_n^k = P_n$

Ví dụ: Cho tập A gồm n số khác nhau $n \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$. Số có k ($k \leq n$) chữ số khác nhau lấy từ tập A là A_n^k

4. Tổ hợp

+ Khái niệm: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($0 \leq k \leq n$) phần tử của tập A được gọi là 1 tổ hợp chập k của n phần tử

+ Công thức xác định số tổ hợp chập k của n phần tử

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

+ Tính chất:

$$i) C_n^k = C_n^{n-k}$$

ii) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

iii) $A_n^k = k!C_n^k$

Ví dụ: Cho tập A gồm có n phần tử, số tập con có k phần tử lấy từ các phần tử của tập A là C_n^k

B. Phương pháp chung giải bài toán tổ hợp

1. Phương pháp đếm trực tiếp.

Tùy theo bài toán chúng ta có thể chia trường hợp hay không chia trường hợp

Nội dung:

Đếm các trường hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán

2. Đếm vị trí

+ Chọn vị trí cho số thứ nhất theo yêu cầu bài toán, suy ra số vị trí cho các số tiếp theo...

+ Sắp xếp các số còn lại

3. Phương pháp đếm loại trừ

Nội dung: Đếm loại trừ theo hai bước

+ Bước 1: Đếm số phương án xảy ra bất kỳ ta có kết quả n_1

+ Bước 2: Đếm số phương án xảy ra không thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có kết quả n_2

+ Bước 3: Số phương án đúng là: $n = n_1 - n_2$

Chú ý: Khi phương pháp đếm trực tiếp có nhiều trường hợp quá chúng ta sử dụng phương pháp đếm loại trừ

4. Phương pháp lấy trước rồi sắp xếp sau

+ Bước 1: Chọn ra trước cho đủ số lượng và thỏa mãn tính chất mà bài toán yêu cầu

(Ví dụ như chọn tập con có k phần tử từ n phần tử ta có C_n^k cách)

+ Bước 2: Sắp xếp

Chú ý: Những bài toán có sự sắp xếp, cạnh nhau, có mặt

5. Phương pháp tạo vách ngăn

+ Bước 1: Sắp xếp m đối tượng vào m vị trí sẽ tạo ra m + 1 vách ngăn

+ Bước 2: Sắp xếp đối tượng khác theo yêu cầu bài toán từ m + 1 vách ngăn nói trên

Nhận xét:

*Hầu hết các bài toán tổ hợp đều sử dụng một trong các phương pháp trên để giải quyết, tuy nhiên sự linh hoạt của phương pháp tùy thuộc vào khả năng của từng học sinh.

*Đối với bài toán mà tập ban đầu có số 0 ta xét trường hợp xem số 0 là một số có nghĩa ta được kết quả n_1 , xét trường hợp số 0 đứng đầu ta có kết quả n_2 , kết quả cần tìm là $n_1 - n_2$

C. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Toán đếm số

Cách giải thông thường:

Bước 1: Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$

Bước 2: Liệt kê các tính chất của số n thỏa mãn yêu cầu

Bước 3: Dựa vào tính chất xem bài toán có chia trường hợp không

Bước 4: Thứ tự đếm (đếm ưu tiên)

+ Đếm các chữ số có mặt trong tính chất

+ Đếm chữ số đầu tiên nếu nó chưa được đếm hoặc tập hợp ban đầu có chứa số 0

+ Đếm các chữ số còn lại

Bước 5: Sử dụng quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân

Chú ý: Đây là cách giải thông thường, chúng ta có thể sử dụng các phương pháp trên để bài toán có lời giải ngắn gọn hơn

Những bài toán trong tập ban đầu không chứa số 0

Bài mở đầu:

Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Gọi S là tập số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lấy từ các số của tập A . Tính $n(S)$

b) Gọi B là tập số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau lấy từ tập A . Tính $n(B)$

Giải:

a) Số cần tìm là chỉnh hợp chập 3 của 7 ta có $n(S) = A_7^3 = 210$ số

b) Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 a_3}$

+ a_3 có 3 cách chọn

+ $a_1 a_2$ có $A_6^2 = 30$

+ Vậy có $3 \cdot 30 = 90$ số suy ra $n(B) = 90$

Nhận xét: Bài toán rất đơn giản, chỉ cần biết công thức xác suất, chúng ta có thể giải quyết trọn vẹn câu IX.a trong đề thi ĐH – kA- 2013

“Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được chọn từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chẵn”.

Đáp án: Xác suất cần tìm là $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$

Bài 1: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Có bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau sao cho:

a) Chữ số đứng đầu là số chẵn

b) Chữ số 4 luôn có mặt một lần

Giải:

a) Chữ số đứng đầu là số chẵn

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$

n là lẻ và a_1 chẵn nên $a_4 \in \{1, 3, 5, 7\}$, $a_1 \in \{2, 4, 6\}$ suy ra

+ a_4 có 4 cách chọn

+ a_1 có 3 cách chọn

+ 2 chữ số còn lại có A_5^2 cách chọn

Vậy có : $4 \cdot 3 \cdot 20 = 240$ số cần tìm

b) Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$

Cách 1: Đếm loại trừ

+ Đếm các số lẻ có 4 chữ số khác nhau là:

a_4 có 4 cách chọn ($a_4 \in \{1, 3, 5, 7\}$); 3 chữ số còn lại có A_6^3 cách chọn, suy ra có $4 \cdot A_6^3$ số

+ Đếm các số lẻ có 4 chữ số khác nhau mà không có mặt chữ số 4 là:

a_4 có 4 cách chọn ($a_5 \in \{1, 3, 5, 7\}$); 3 chữ số còn lại có A_5^3 cách chọn (số 4 không có), suy ra có $4 \cdot A_5^3$

+ Các số cần tìm là: $4 \cdot A_6^3 - 4 \cdot A_5^3 = 240$ số

Cách 2: Đếm vị trí

- + a_4 lẻ nên có 4 cách chọn ($a_4 \in \{1,3,5,7\}$);
 - + Số 4 có 3 vị trí
 - + 2 chữ số còn lại có 2 vị trí lấy từ các số còn lại nên có A_5^2
- Vậy ta có $4.3A_5^2 = 240$ số

Bài 2:

Cho tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau sao cho:

- a) Luôn có mặt hai chữ số 2, 3
- b) Luôn có mặt hai chữ số 2, 3 và hai chữ số này luôn đứng kề nhau
- c) Luôn có mặt hai chữ số 2, 3 và hai chữ số này không đứng kề nhau

Giải: Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

a)

Cách 1: Đếm vị trí

2	.	3	.	
---	---	---	---	--

- + Chữ số 2 có 5 vị trí suy ra chữ số 3 có 4 vị trí
- + 3 chữ số còn lại có A_7^3 cách sắp xếp
- + Vậy ta có $5.4A_7^3 = 4200$ (số)

Cách 2: Dùng phương pháp lấy trước rồi sắp xếp sau:

+ Lấy ra 5 số từ tập A:

Số 2,3 có 1 cách chọn, 3 số còn lại được lấy từ tập $A \setminus \{2,3\}$ nên có C_7^3 cách, suy ra có C_7^3 cách lấy ra 5 số mà 2, 5 luôn có mặt

+ Sắp xếp

2	.	3	.	
---	---	---	---	--

Sắp xếp 5 số vào 5 vị trí ta có $5!$ cách

Vậy ta có $C_7^3 \cdot 5! = 4200$ số

b) Dùng phương pháp lấy trước rồi sắp xếp sau:

+ Lấy ra 5 số từ tập A:

Số 2,3 có 1 cách chọn, 3 số còn lại được lấy từ tập $A \setminus \{2,3\}$ nên có C_7^3 cách, suy ra có C_7^3 cách lấy ra một tập gồm 5 số mà 2, 5 luôn có mặt

+ Sắp xếp

2,3	.	.	.	.
-----	---	---	---	---

Sắp xếp số 2,3 kề nhau ta xem là một số a có $2!$ cách, sắp xếp số a với 3 số còn lại có $4!$ cách, từ đó số cách sắp xếp 5 chữ số đã chọn như trên là $2! \cdot 4!$ cách

Vậy ta có $C_7^3 \cdot 2! \cdot 4! = 1680$ số

b) Do số các trường hợp 2,3 không đứng cạnh nhau nhiều nên ta sử dụng phương pháp loại trừ.

+ Số các số có 5 chữ số khác nhau luôn có mặt chữ số 2,3 là $C_7^3 \cdot 5!$

+ Số có 5 chữ số khác nhau sao cho 2,3 luôn đứng kề nhau là $C_7^3 \cdot 2! \cdot 4!$

+ Vậy số cần tìm là: $C_7^3 \cdot 5! - C_7^3 \cdot 2! \cdot 4! = 2520$ số

Bài 3:

Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau sao cho:

a) Luôn có mặt chữ số 3

b) Luôn có mặt chữ số 4

Nhận xét: Sự khác nhau giữa hai bài toán là gì? Cách giải có khác nhau hay không?

Người GV phải định hướng cho HS biết để giải quyết trọn vẹn và chính xác bài toán.

Giải:

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

a) Cách 1: Đếm vị trí

+ a_5 có 4 cách chọn

+ chữ số 3 có 4 vị trí

+ 3 chữ số còn lại có A_8^3 cách sắp xếp

+ Vậy có $4 \cdot 4 \cdot A_8^3 = 5376$ số

Cách 2: Chọn rồi sắp xếp (dành cho bạn đọc)

b) Dự đoán cách giải học sinh sẽ sử dụng: tương tự như câu a

+ a_5 có 4 cách chọn

+ chữ số 4 có 4 vị trí

+ 3 chữ số còn lại có A_7^3 cách sắp xếp

+ Vậy có: $4 \cdot 4 \cdot A_7^3 = 3360$ số

Sai lầm ở đâu: trường hợp số 4 là a_5 , khi đó cách chọn số 4 sẽ không đúng

Lời giải đúng:

*TH1: $a_5 = 4$, khi đó có $A_8^4 = 1680$ số

*TH2: $a_5 \neq 4$, khi đó

+ a_5 có 3 cách chọn

+ chữ số 4 có 4 vị trí

+ 3 chữ số còn lại có A_7^3 cách sắp xếp

+ suy ra ta có: $3 \cdot 4 \cdot A_7^3 = 2520$ số

Vậy số cần tìm là: $1680 + 2520 = 4200$ số

Bài 4: Từ các số 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó có 3 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 2 chữ số còn lại là 3, 4.

Giải:

+ Số các số có 7 chữ số từ 7 số đã cho là $7!$

+ Nếu ta hoán vị 1 lần chữ số 1 hoặc 2 thì vẫn không đổi do đó có $3! \cdot 2!$ lần bị lặp lại

+ Vậy số cần tìm là $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ số

Bài 5: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số trong đó chữ số 3 có mặt 2 lần, chữ số 5 có mặt 3 lần, các chữ số khác có mặt 1 lần.

Nhận xét: Sự khác nhau giữa bài 4 và bài 5 là gì? Số chữ số bằng tập số đã cho và số chữ số nhỏ hơn tập số đã cho.

Giải: Bằng cách đếm vị trí

3	5.	3	.5	5	1	4
---	----	---	----	---	---	---

- + Chọn 2 vị trí trong 7 vị trí và sắp xếp 2 chữ số 3 vào ta có C_7^2 cách
 - + Chọn 3 trong 5 vị trí tiếp theo và sắp xếp 3 chữ số 5 vào C_5^3 cách
 - + Còn 2 vị trí sắp xếp 2 chữ số khác nhau lấy từ các số còn lại trong tập A ta có A_2^2
- Vậy ta có $C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot A_2^2 = 8820$ số

Bài 6: Cho tập $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ tập A không bắt đầu từ 13

Giải:

- + Số có 5 chữ số lấy từ tập A là $5! = 120$ số
- + Số bắt đầu bằng 13 là: Số 1, 3 có 1 cách chọn, 3 số còn lại là hoán vị của 3 số 5, 7, 9 nên có $3! = 6$ Số
- + Vậy các số cần tìm là: $120 - 6 = 114$ số

Bài 7: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho:

- a) Bắt đầu bằng 456
- b) Không bắt đầu bằng 456

Giải:

a)

456		
-----	--	--

Số có 5 chữ số bắt đầu bằng 456 là

- 4, 5, 6 có 1 cách chọn
- 2 vị trí còn lại được lấy từ các số 4 số khác nhau của tập A nên có $A_4^2 = 12$

Suy ra có 12 số bắt đầu bằng 456 là 12 số

b) Phương pháp loại trừ

- + Số có 5 chữ số khác nhau lấy từ tập A là $A_7^5 = 2520$
- + Số có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bằng 456 là 12
- + Số cần tìm là $2520 - 12 = 2508$ số

Bài 8: Từ các số 1, 3, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau lớn hơn 6000

Giải:

*TH1: số cần tìm có 5 chữ số có $5! = 120$ (số) luôn thỏa mãn điều kiện bài toán

*TH2: số cần tìm có 4 chữ là $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$

+ a_1 có 2 cách chọn, $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có $A_3^3 = 24$ cách chọn

+ suy ra có $2 \cdot 24 = 48$ số

Vậy số cần tìm là $120 + 48 = 168$ số

Những bài toán mà tập số ban đầu chứa số 0

Bài 9: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$. Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên

- a) có 5 chữ số
- b) có 5 chữ số khác nhau
- c) lẻ có 5 chữ số khác nhau
- d) chẵn có 5 chữ số khác nhau

Giải:

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

a)

+ a_1 có 6 cách chọn ($a_1 \neq 0$)

+ $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$ có $7.7.7.7 = 2401$ cách

+ Vậy có $6.2401 = 14406$ số

b)

+ a_1 có 6 cách chọn ($a_1 \neq 0$)

+ $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$ có A_6^4 cách

+ vậy có $6 \cdot A_6^4 = 2160$ số

c)

+ a_5 lẻ nên a_5 có 4 cách chọn

+ a_1 có 5 cách chọn ($a_1 \neq 0, a_1 \neq a_5$)

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_5^3 cách

+ vậy có $4.5.A_5^3 = 1200$ số

c) Cách giải có tương tự câu b hay không?

Dự đoán HS đưa ra cách giải:

+ a_5 chẵn nên a_5 có 3 cách chọn

+ a_1 có 5 cách chọn ($a_1 \neq 0, a_1 \neq a_5$)

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_5^3 cách

+ vậy có $3.5.A_5^3 = 900$ số

Sai lầm HS gặp phải: Khi đếm a_5 là 0 thì cách đếm a_1 phải là 6, như vậy lời giải trên là sai. Vậy cách giải như thế nào?

Lời giải đúng

Cách 1: Đếm loại trừ

+ Số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lấy từ tập A là 2160

+ Số tự nhiên lẻ có 5 chữ số khác nhau lấy từ tập A là 1200

+ Số tự nhiên chẵn cần tìm là $2160 - 1200 = 960$ số

Cách 2: Đếm trực tiếp

TH1: $a_5 = 0$: có 1 cách chọn

+ $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ có $A_6^4 = 360$ cách

+ suy ra ta có 360 số

TH2:

+ $a_5 \neq 0$: a_5 có 2 cách

+ a_1 có 5 cách chọn ($a_1 \neq 0, a_1 \neq a_5$)

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có $A_5^3 = 60$ cách chọn

+ suy ra ta có $2.5.60 = 600$ số

Vậy số cần tìm là $360 + 600 = 960$ số

Bài 10: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

a) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau luôn có mặt chữ số 2

b) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 5 chữ số khác nhau luôn có mặt chữ số 2

c) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau luôn có mặt chữ số

Giải:

a) cách đếm trực tiếp

Gọi số cần tìm $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

*TH1

+ $\overline{a_1} = 2$ có 1 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$ có A_7^4 cách chọn

+ Suy ra ta có $A_7^4 = 840$ số

*TH2

+ $a_2 = 2$ có 1 cách chọn

+ $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq 2$ nên có 6 cách chọn

+ $\overline{a_3 a_4 a_5}$ có A_6^3 cách chọn

+ Suy ra ta có $6 \cdot A_6^3 = 720$ số

Vì vai trò của 2 trong các vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 là giống nhau nên

Số cần tìm là $840 + 720 \cdot 4 = 3720$ số

b)

Gọi số cần tìm $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

*TH1

+ a_5 lẻ nên có 4 cách chọn

+ $\overline{a_1} = 2$ có 1 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_6^3 cách chọn

+ Suy ra ta có $4 \cdot A_6^3 = 480$ số

*TH2

+ a_5 lẻ nên có 4 cách chọn

+ $a_2 = 2$ có 1 cách chọn

+ $\overline{a_1} \neq 0, a_1 \neq 2, a_1 \neq a_5$ nên có 5 cách chọn

+ $\overline{a_3 a_4}$ có A_5^2 cách chọn

+ Suy ra ta có $4 \cdot 5 \cdot A_5^2 = 400$ số

Vì vai trò của 2 trong các vị trí a_2, a_3, a_4 là giống nhau nên

Số cần tìm là $480 + 400 \cdot 3 = 1680$ số

c)

Cách 1: Đếm loại trừ

Số cần tìm là $3720 - 1680 = 2040$

Cách 2 : Sử dụng phương pháp lấy phần bù

(i) Kể cả số 0 đứng đầu

*TH1: $a_5 = 2$, khi đó có $A_7^4 = 840$ số

*TH2: $a_5 \neq 2$, khi đó

+ a_5 có 3 cách chọn

+ chữ số 2 có 4 vị trí

+ 3 chữ số còn lại có A_6^3 cách sắp xếp

+ suy ra ta có: $3 \cdot 4 \cdot A_6^3 = 1440$ số

Vậy có: $840 + 1440 = 2280$ số

(ii) Số 0 đứng đầu thỏa mãn điều kiện trên

+ $a_1 = 0$ có 1 cách chọn

-TH1 : $a_5 = 2$ có 1 cách chọn, $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_6^3 cách chọn

-TH2 : $a_5 \neq 2$ và là số chẵn nên có 2 cách chọn, số 2 có 3 vị trí, 2 vị trí còn lại có A_5^2

Có $A_6^3 + 2.3. A_5^2 = 240$ số

Vậy số cần tìm là $2280 - 240 = 2040$ số

Cách 3: Đếm trực tiếp

Gọi số cần tìm $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

Với $a_5 = 0$

*TH1

+ $a_5 = 0$ nên có 1 cách chọn

+ $a_1 = 2$ có 1 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_6^3 cách chọn

+ Suy ra ta có A_6^3 số

*TH2

+ $a_5 = 0$ nên có 1 cách chọn

+ $a_1 \neq 2$ nên có 6 cách chọn

+ Số 2 được đặt trong 3 vị trí $a_2; a_3; a_4$ nên có 3 cách chọn

+ 2 vị trí còn lại có A_5^2

+ Suy ra ta có $1.6.3. A_5^2$ số ứng với trường hợp này

Với $a_5 \neq 0$

*TH1

+ $a_5 = 2$ nên có 1 cách chọn

+ $\overline{a_1 \neq 0, a_1 \neq 2}$ nên có 6 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_6^3 cách chọn

+ Suy ra ta có $6.A_6^3$ số

*TH2

+ $a_5 \neq 2, a_5 \in \{4, 6\}$ nên có 2 cách chọn

+ $\overline{a_1 = 2}$ có 1 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_5^3 cách chọn

+ suy ra có $2. A_5^3$ số

TH3

+ $a_5 \neq 2, a_5 \in \{4, 6\}$ nên có 2 cách chọn

+ $a_1 \neq 2, a_1 \neq 0$ nên a_1 có 5 cách chọn

+ Số 2 được đặt trong 3 vị trí còn lại nên có 3 cách chọn

+ 2 vị trí còn lại có A_5^2 cách chọn

+ suy ra có $2.5.3. A_5^2$ số

Vậy số cần tìm là $A_6^3 + 1.6.3. A_5^2 + 6.A_6^3 + 2. A_5^3 + 2.5.3. A_5^2 = 2040$ số

Bài 11: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Hỏi có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau sao cho luôn có 3 chữ số chẵn trong các số tạo thành

Giải: Lấy trước rồi sắp xếp sau

Bước 1

+Lấy 3 chữ số chẵn trong 4 số chẵn có C_4^3 cách

+Lấy 3 số lẻ trong 5 số lẻ có C_5^3 cách

+Suy ra số cách lấy 6 chữ số là $C_4^3 \cdot C_5^3$ cách

Bước 2

Sắp xếp 6 số trên vào 6 vị trí ta có 6! cách

Vậy số cần tìm là $6! \cdot C_4^3 \cdot C_5^3 = 28800$ (cách)

Bài 12: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Hỏi có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau sao cho luôn có 3 chữ số chẵn trong các số tạo thành

Nhận xét: sự khác nhau giữa hai bài toán là gì? Số 0 có trong tập A và số 0 không có trong tập A

Lời giải:

+TH1: 6 chữ số lấy ra không chứa chữ số 0

Kết quả như bài 11 ta có $6! \cdot C_4^3 \cdot C_5^3$

+TH2 : 6 chữ số lấy ra luôn có mặt chữ số 0

Bước 1: Chữ số 0 có 1 cách lấy, lấy 2 chữ số chẵn có C_4^2 cách lấy, lấy 3 số lẻ có C_5^3 cách

Có $C_4^2 \cdot C_5^3$ cách lấy 6 chữ số luôn có mặt chữ số 0

Bước 2 : Sắp xếp

+Sắp xếp 6 chữ số lấy được vào 6 vị trí kể cả vị trí 0 đứng đầu ta có 6 ! cách

+Vị trí 0 đứng đầu có 5! cách

+ Số cách sắp xếp thỏa mãn là $6! - 5!$

Vậy số các số cần tìm là $C_4^2 \cdot C_5^3 (6! - 5!) = 36000$

Bài 13 : Từ tập các số 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9

Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 5000

Giải : Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ Do $n > 5000$ nên $a_1 = 6, 7, 8, 9$

TH1:

+ $\overline{a_1} = 6$, a_4 là chẵn và khác 6 nên có 3 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3}$ có A_5^2

+ suy ra có $3 \cdot A_5^2 = 60$ số

TH2:

+ $\overline{a_1} = 7$, a_4 là chẵn nên có 4 cách chọn

+ $\overline{a_2 a_3}$ có $4 \cdot A_5^2 = 80$

Ta có $a_1 = 8$ như trường hợp 1 và $a_1 = 9$ như trường hợp 2

Vậy có $(60 + 80) \cdot 2 = 280$ số

Dạng 2: Bài toán sắp xếp đồ vật

Cách giải:

Một số lưu ý khi giải dạng toán sắp xếp

+ Sắp xếp n phần tử khác nhau vào n vị trí có n! cách sắp xếp

- + Sắp xếp k phần tử giống nhau vào n vị trí có C_n^k cách ($1 \leq k \leq n$)
- + Sắp xếp n phần tử giống nhau (không thay đổi kết quả) vào n vị trí có 1 cách sắp xếp

Bài 1:

Có 3 quyển sách toán; 4 quyển sách lý; 5 quyển sách hóa. Các quyển sách khác nhau. Sắp xếp các cuốn sách trên vào một kệ dài. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

- a) Các quyển sách nằm tùy ý
- b) Các quyển sách cùng loại nằm kề nhau

Giải:

a) Các quyển sách là khác nhau nên có $12!$ cách sắp xếp

b)

+ Sắp xếp 3 quyển sách toán có $3!$ cách

+ Sắp xếp 4 quyển sách lý có $4!$ cách

+ Sắp xếp 5 quyển sách hóa có $5!$ cách

+ Có $3!$ sắp xếp 3 nhóm sách

+ Vậy có $3!.3!.4!.5! = 103680$ cách

Bài 2: Người ta sắp xếp 1 quyển sách toán, 1 quyển sách lý và 5 quyển sách hóa vào một kệ dài. Biết các quyển sách trên là khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho 2 quyển sách toán và lý không đứng cạnh nhau.

Giải:

+ Sắp xếp 7 quyển sách vào một kệ dài ta có $7!$ cách

+ Sắp xếp 2 quyển sách toán và lý đứng cạnh nhau ta có $2!$. Khi đó số cách sắp xếp 7 quyển sách sao cho 2 quyển sách toán lý đứng cạnh nhau là $2!6!$

+ Suy ra số cách sắp xếp cần tìm là $7! - 2.6! = 3600$

Bài 3:

a) Có 4 tem thư khác nhau và có 4 bì thư khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách dán 4 tem thư vào 4 bì thư sao cho một bì thư chỉ dán 1 tem thư?

b) Có 6 tem thư khác nhau và 8 bì thư khác nhau. Chọn ra 6 tem thư dán vào 6 bì thư sao cho 1 bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế

c) Có 6 tem thư khác nhau và có 8 bì thư khác nhau. Chọn ra 4 tem thư và dán vào 4 bì thư. Một bì thư dán 1 tem. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế?

Giải:

a) Lấy 4 tem thư và dán vào 4 bì thư có $4!$ cách

b)

+ Chọn 6 tem thư từ 6 bì thư có 1 cách chọn

+ Chọn 6 bì thư từ 8 bì thư có C_8^6 cách chọn

+ Dán 6 tem thư lên 6 bì thư có $6!$ Cách dán

+ Số cách thực hiện là: $C_8^6.6! = 20160$

c) Hoàn toàn tương tự

Đáp số: $C_6^4.C_8^4.4! = 25200$

Bài 4: Có 4 bi xanh giống hệt nhau và 3 bi đỏ khác nhau. Sắp xếp 7 bi trên vào 1 dãy có 7 ô vuông. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho

a) Các viên bi nằm tùy ý

b) Các viên bi cùng màu thì nằm cùng một nhóm

c) Các viên bi khác màu thì nằm xen kẽ nhau

Giải:

a)

+ Lấy 4 trong 7 vị trí và sắp xếp 4 viên bi xanh giống hệt nhau vào ta có C_7^4 cách

+ Còn 3 vị trí sắp xếp 3 viên bi đỏ khác nhau vào ta có $3!$ Cách

+ Số cách sắp xếp là: $3! \cdot C_7^4$ cách

b)

+ Số cách sắp xếp 4 viên bi xanh giống hệt nhau làm thành 1 nhóm là 1 cách

+ Số cách sắp xếp 3 viên bi đỏ là $3!$

+ Số cách sắp xếp thỏa 2 nhóm này là $2!$ Cách

Khi đó ta có $3! \cdot 2!$ cách

c)

+

Đỏ	Xanh	Đỏ	Xanh	Đỏ	Xanh	Đỏ
----	------	----	------	----	------	----

+ Chọn 4 vị trí xen kẽ sắp xếp 4 viên bi đỏ giống hệt nhau là 1 cách

+ Còn 3 vị trí là $3!$ cách sắp xếp 3 viên bi xanh khác nhau

+ Vậy có $3! = 6$ cách

Bài 5:

Sắp xếp 5 viên bi khác nhau vào 3 cái hộp. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho mỗi hộp có ít nhất 1 viên bi

Giải:

+ Chọn ra 3 viên bi trong 5 hộp và sắp xếp vào 3 cái hộp ta có $C_5^3 \cdot 3!$

+ Còn 2 viên bi sắp xếp vào 3 cái hộp

TH1: Một hộp chứa một lần 2 viên bi có $C_2^2 \cdot C_3^1$

TH2: Một hộp chứa 1 viên bi $C_2^1 \cdot C_3^1$

Vậy có tất cả $C_5^3 \cdot 3! (C_2^2 \cdot C_3^1 + C_2^1 \cdot C_3^1)$

Bài 6: Cần sắp xếp 2 thầy giáo và 6 học sinh vào một dãy ghế dài sao cho 2 thầy giáo không ngồi cạnh nhau

Giải: (phương pháp tạo vách ngăn)

+ Xếp 6 học sinh vào 6 vị trí ta có $6!$

+ 6 học sinh sẽ tạo ra 7 vách ngăn, ta đặt 2 thầy giáo vào 7 vách ngăn ta có A_7^2

Khi đó số cách sắp xếp là: $A_7^2 \cdot 6!$

Dạng 3: Bài toán chọn số phương án để thỏa mãn một số điều kiện cho trước

Các dạng toán thường gặp

1. Bài toán chọn tùy ý

Chọn m phần tử từ n phần tử khác nhau $(0 \leq m \leq n)$ là số tổ hợp chập m của n có C_n^m cách

2. Bài toán chọn ít nhất và nhiều nhất

Cách giải:

Cách 1: Chia trường hợp

Cách 2: Đếm loại trừ (lấy phần bù)

3. Bài toán chọn có mặt đủ loại

Cách giải:

Cách 1: Đếm loại trừ (lấy phần bù)

Cách 2: Chia trường hợp

4. Bài toán sắp xếp, đem tặng, đem phân công thực hiện các nhiệm vụ khác nhau

Cách giải:

+ Chọn cho đủ số lượng

+ Đem sắp xếp

5. Bài toán chọn tên

Cách giải:

+ Chọn tên của người có mặt

+ Chọn tên các thành viên còn lại

6. Bài toán chọn nhiệm vụ

Cách giải:

+ Chọn chức vụ các thành viên có chức vụ được chọn từ tập hợp ban đầu

+ Sau khi chọn xong chức vụ thì chọn các thành viên không có chức vụ

7. Bài toán chọn tên và có chức vụ

Cách giải: Chia trường hợp

Bài 1: Tổ 1 lớp 11A có 11 học sinh trong đó có 7 học sinh nam và 4 học sinh nữ

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 8 học sinh tùy ý

b) Có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh có cả nam và nữ

c) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh có cả nam và nữ

Giải:

a) Chọn 8 học sinh tùy ý có C_{11}^8 cách

b) Nhận xét: nếu chia trường hợp có nhiều trường hợp

Ta sử dụng cách đếm loại trừ

+ Chọn 5 học sinh tùy ý có C_{11}^5 cách

+ Chọn 5 học sinh nam có C_7^5 cách

+ Vì khi ta chọn 5 học sinh luôn có ít nhất 1 học sinh nam, Vậy có $C_{11}^5 - C_7^5 =$ có cả nam và nữ

c) Cách 1:

+ Chọn 3 học sinh tùy ý có C_{11}^3 cách

+ Chọn 3 học sinh nam có C_7^3 cách

+ Chọn 3 học sinh nữ có C_4^3

+ Vậy ta có $C_{11}^3 - C_7^3 - C_4^3$ cách

Cách 2:

TH1: 1 nam và 3 nữ, ta có $C_7^1 \cdot C_4^3$

TH2: 2 nam và 2 nữ có $C_4^2 \cdot C_7^2$

TH3: 3 nam và 1 nữ có $C_4^1 \cdot C_7^3$

Vậy có $C_7^1 \cdot C_4^3 + C_4^2 \cdot C_7^2 + C_4^1 \cdot C_7^3$ cách

Bài 2: Đội bóng chuyền học sinh của trường THPT Kỳ Lâm có 5 học sinh khối 10; 7 học sinh khối 11; 10 học sinh khối 12

a) Chọn từ đó 8 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn sao cho có đủ cả 3 khối

b) Chọn từ đó ra 15 học sinh có đủ 3 khối. Có bao nhiêu cách chọn sao cho có ít nhất 4 học sinh khối 10

Giải:

a)

+ Chọn 8 học sinh tùy ý có C_{22}^8 cách

+ Chọn 8 học sinh của khối 12 có C_{10}^8 cách

+ Chọn 8 học sinh hai khối 10 và 11 có C_{12}^8 cách

+ Chọn 8 học sinh có hai khối 10 và 12 có $C_{15}^8 - C_{10}^8$

+ Chọn 8 học sinh hai khối 12 và 11 có $C_{17}^8 - C_{10}^8$

+ Vậy số cách cần tìm là $C_{22}^8 - C_{10}^8 - C_{12}^8 - (C_{15}^8 - C_{10}^8) - (C_{17}^8 - C_{10}^8)$

b) Xét trường hợp sau

TH1: Chọn 4 học sinh khối 10

+ chọn 4 học sinh khối 10 ta có C_5^4 cách

+ Chọn 11 học sinh còn lại của 2 khối 11 và 12 là C_{17}^{11} cách

Suy ra có $C_5^4 \cdot C_{17}^{11}$ cách

TH2: Chọn 5 học sinh khối 10

+ chọn 5 học sinh khối 10 ta có 1 cách

+ Chọn 10 học sinh còn lại của 2 khối 11 và 12 có $C_{17}^{10} - C_{10}^{10}$

Suy ra có $C_{17}^{10} - C_{10}^{10}$ cách

Vậy số cách cần tìm là $C_5^4 \cdot C_{17}^{11} + C_{17}^{10} - C_{10}^{10}$ cách

Bài 3: Tổ 1 của lớp 11A gồm có 12 học sinh trong đó có 2 bạn Ánh Tuyết và Tuấn Anh. Chọn ra 7 học sinh lập thành tổ học tập. Có bao nhiêu cách chọn sao cho Ánh Tuyết và Tuấn Anh không đồng thời có mặt trong một tổ học tập.

Giải:

+ TH1: Có Ánh Tuyết và không có Tuấn Anh có C_{11}^6 cách chọn

+ TH2: Có Tuấn Anh và không có Ánh Tuyết có C_{11}^6 cách chọn

Vậy có tất cả 2. C_{11}^6 cách

Bài 4: Một lớp học có 30 học sinh trong đó luôn có An. Lập thành một đội văn nghệ có 10 người, trong đó có 3 đội trưởng và 2 đội phó.

a) Có bao nhiêu cách lập một đội như trên sao cho An luôn có mặt trong đội

b) Có bao nhiêu cách lập một đội như trên sao cho An luôn có mặt trong đội và là đội trưởng hoặc đội phó

Giải:

a) Cách 1:

+ Lấy ra học sinh An có 1 cách

+ Lấy ra 9 học sinh nữa không có An có C_{29}^9

+ Chọn ra 3 đội trưởng trong 10 bạn có C_{10}^3

+ Chọn ra 2 đội phó trong 7 bạn còn lại có C_7^2

+ Vậy số cách chọn và sắp xếp là $1 \cdot C_{29}^9 \cdot C_{10}^3 \cdot C_7^2$

Cách 2:

Xét các trường hợp sau:

TH1: An là đội trưởng

+Chọn thêm 2 đội trưởng nữa có C_{29}^2 cách

+Chọn 2 đội phó có C_{27}^2 cách

+Chọn 5 thành viên còn lại có C_{25}^5

Suy ra có $C_{29}^2 \cdot C_{27}^2 \cdot C_{25}^5$ cách

TH2: An là đội phó

+Chọn 3 đội trưởng có C_{29}^3 cách

+Chọn thêm 1 đội phó có C_{26}^1 cách

+Chọn 5 thành viên còn lại có C_{25}^5 cách

Suy ra có $C_{29}^3 \cdot C_{26}^1 \cdot C_{25}^5$ cách

TH3: An là đội viên (không là đội trưởng, không là đội phó)

+Chọn 3 đội trưởng có C_{29}^3 cách

+Chọn 2 đội phó có C_{26}^2 cách

+Chọn 4 thành viên nữa có C_{24}^4 cách

Suy ra có $C_{29}^3 \cdot C_{26}^2 \cdot C_{24}^4$ cách

Vậy số cách cần tìm là $C_{29}^2 \cdot C_{27}^2 \cdot C_{25}^5 + C_{29}^3 \cdot C_{26}^1 \cdot C_{25}^5 + C_{29}^3 \cdot C_{26}^2 \cdot C_{24}^4$ cách

b) Xét các trường hợp sau:

TH1: An là đội trưởng

+Chọn thêm 2 đội trưởng nữa có C_{29}^2 cách

+Chọn 2 đội phó có C_{27}^2 cách

+Chọn 5 thành viên còn lại có C_{25}^5

Suy ra có $C_{29}^2 \cdot C_{27}^2 \cdot C_{25}^5$ cách

TH2: An là đội phó

+Chọn 3 đội trưởng có C_{29}^3 cách

+Chọn thêm 1 đội phó có C_{26}^1 cách

+Chọn 5 thành viên còn lại có C_{25}^5 cách

Suy ra có $C_{29}^3 \cdot C_{26}^1 \cdot C_{25}^5$ cách

Vậy có $C_{29}^2 \cdot C_{27}^2 \cdot C_{25}^5 + C_{29}^3 \cdot C_{26}^1 \cdot C_{25}^5$ cách

Bài 5: (ĐH-B-2005) Một đội thanh niên tình nguyện có 15 sinh viên gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội tình nguyện về giúp đỡ 3 xã miền núi sao cho mỗi xã có 4 nam và 1 nữ.

Giải:

+Phân 4 nam và 1 nữ về xã thứ nhất có $C_{12}^4 \cdot C_3^1$ cách

+ Phân 4 nam và 1 nữ về xã thứ 2 có $C_8^4 \cdot C_2^1$ cách

+ Phân 4 nam và 1 nữ về xã thứ 3 có $C_4^4 \cdot C_1^1$

Vậy số cách cần tìm là $C_{12}^4 \cdot C_3^1 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1 \cdot C_4^4 \cdot C_1^1$ cách

Bài 6: Một cô giáo có 4 quyển sách toán và 6 quyển sách lý khác nhau. Lấy từ đó 5 quyển đủ cả hai loại đem tặng cho 5 học sinh mỗi em có 1 quyển. Hỏi có bao nhiêu cách tặng

Giải:

*Chọn đủ số lượng

+ Số cách lấy ra 5 quyển bất kỳ là C_{10}^5 cách

+ Số cách lấy ra 5 quyển lý là C_6^5 cách,

+ Do số sách toán ít hơn số lượng cần lấy nên số cách lấy ra 5 quyển đủ 2 loại là $C_{10}^5 - C_6^5$

*Sắp xếp

Lấy 5 quyển trên đem tặng 5 học sinh có 5! Cách

Vậy số cách tặng cần tìm là $5!(C_{10}^5 - C_6^5)$ cách

Bài 7: Trong mặt phẳng cho đa giác đều có 10 cạnh.

a) Có bao nhiêu tam giác tạo thành từ các đỉnh của tứ giác

b) Có bao nhiêu tam giác tạo có đủ 2 cạnh của đa giác

c) Có bao nhiêu tam giác tạo có đủ 1 cạnh của đa giác

d) Có bao nhiêu tam giác không chứa cạnh nào của đa giác

Giải:

a) Số đỉnh là bất kỳ nên số tam giác tạo thành là C_{10}^3 tam giác

b) Tam giác có 3 đỉnh liên tiếp của đa giác là tam giác có chứa 2 cạnh của đa giác

Các tam giác bắt đầu là $A_1A_2A_3$; $A_2A_3A_4$ $A_{10}A_1A_2$ suy ra có 10 tam giác cần tìm

c) Tam giác có hai đỉnh thuộc 1 cạnh của đa giác và đỉnh thứ 3 không kề với 2 đỉnh đó.

Ứng với cạnh đó chúng ta có 6 tam giác được tạo thành. Vì thế có $10 \cdot 6 = 60$ tam giác được tạo thành

d) Số tam giác cần tìm là $C_{10}^3 - 10 - 60 = 50$ tam giác cần tìm

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1) Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 người khách gồm 3 nam và 2 nữ ngồi vào một hàng 8 ghế nếu:
 - a) họ ngồi chỗ nào cũng được?
 - b) họ ngồi kề nhau?
 - c) 3 nam ngồi kề nhau, 2 nữ ngồi kề nhau và giữa hai nhóm này có ít nhất một ghế trống?
- 2) Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 người khách
 - a) vào 5 ghế xếp thành một dãy.
 - b) vào 5 ghế chung quanh một bàn tròn, nếu không có sự phân biệt giữa các ghế này.
- 3) Mười người muốn chụp ảnh chung. Họ muốn chụp nhiều ảnh khác nhau bằng cách đổi chỗ đứng lẫn nhau. Cho rằng mỗi lần đổi chỗ và chụp ảnh mất 1 phút, hỏi cần bao lâu để có thể chụp tất cả các ảnh khác nhau?
- 4) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau và khác 0 biết rằng tổng ba chữ số này bằng 8?
- 5) Một dãy 5 ghế dành cho 3 nam sinh và 2 nữ sinh. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:
 - a) họ ngồi chỗ nào cũng được.
 - b) nam sinh ngồi kề nhau, nữ sinh ngồi kề nhau.

- c) chỉ có nữ sinh ngồi kề nhau.
- 6) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau biết rằng tổng ba chữ số này bằng 12?
- Một phòng khách có 3 chỗ có thể đặt tranh, ảnh hoặc tượng. Chủ nhà muốn trang trí bằng cách xếp đặt 4 bức tranh khác nhau vào một chỗ, 3 tấm ảnh khác nhau vào chỗ thứ hai và 2 pho tượng khác nhau vào chỗ còn lại. Hỏi có bao nhiêu cách trang trí phòng khách?
- 7) Ta muốn mời 6 người ngồi vào một dãy 6 ghế. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:
- Có 3 người trong bọn họ muốn ngồi kề nhau?
 - Có 2 người trong bọn họ không muốn ngồi kề nhau?
 - Có 3 người trong bọn họ không muốn ngồi kề nhau đôi một?
- 8) Một bàn dài có 12 ghế, mỗi bên 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 12 người khách gồm 6 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:
- họ ngồi chỗ nào cũng được ?
 - nam ngồi một bên, nữ ngồi một bên ?
 - nam nữ ngồi đối diện nhau ?
 - nam nữ ngồi xen kẽ và đối diện nhau ?
- 9) Cho các số 0,1,2,3,4,5,6. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau được lấy từ các số đã cho, sao cho:
- Số đó chẵn
 - Số đó chia hết cho 5
 - Luôn có mặt chữ số 1 và 3
- 10) Cho các số: 0,1,2,3,4,5,6,7. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số đã cho sao cho các số lẻ luôn đứng liền nhau.
- 11) Cho các số : 0,1,2,3,4,5,6
- Có thể lập được bao nhiêu số gồm 9 chữ số được lấy từ các số đã cho sao cho số 3 có mặt 3 lần, các số khác có mặt đúng 1 lần.
 - Có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số được lấy từ các số đã cho sao cho số 3 có mặt 1 lần, các số khác có mặt một vài lần.
- 12) Cho các số: 0,1,2,3,4,5. Có thể lập được bao nhiêu số từ 4 số khác nhau được lấy từ các số đã cho. Sao cho:
- Luôn có mặt chữ số 5.
 - Số đó chia hết cho 3.
 - Không bắt đầu từ chữ số 3.
- 13) Cho các số: 0,1,2,3,4,5,6. Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số được lấy từ các số đã cho sao cho:
- Số đầu và số cuối giống nhau, các số giữa khác nhau.
 - 2 chữ số đầu và 2 chữ số cuối giống nhau.
- 14) Cho các số: 0,1,2,3,4,5,6,7
- Có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số sao cho số 0 có mặt 2 lần, số 3 có mặt 2 lần. Các số khác có mặt một lần.
 - Có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số sao cho số 2 có mặt 2 lần, các số khác có mặt một vài lần.
- 15) Cho các số: 0,1,2,3,4,5. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho các số chẵn không đứng liền nhau.

- 16) Một nhóm người thành lập một công ty. Họ muốn chọn một ban điều hành gồm một giám đốc, một phó giám đốc và một thủ quỹ. Có 10 người hội đủ điều kiện để được chọn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ban điều hành?
- 17) Huấn luyện viên một đội bóng muốn chọn 5 cầu thủ để đá quả luân lưu 11m. Có bao nhiêu cách chọn nếu:
- Cả 11 cầu thủ có khả năng như nhau? (Kể cả thủ môn)
 - Có 3 cầu thủ bị chấn thương và nhất thiết phải bố trí cầu thủ A đá quả số 1 và cầu thủ B đá quả số 4?
- 18) Một người muốn xếp đặt một số pho tượng vào một dãy 6 chỗ trống trên một kệ trang trí. Có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:
- Người đó có 6 pho tượng khác nhau?
 - Người đó có 4 pho tượng khác nhau?
 - Người đó có 8 pho tượng khác nhau?
- 19) Với năm số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số trong đó số 1 có mặt hai lần các số còn lại mỗi số có mặt đúng một lần?
- 20) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau biết rằng:
- các số này chia hết cho 5?
 - trong các số này phải có mặt ba chữ số 0,1,2 ?
- 32) Với sáu số 2,3,5,6,7,8, ta muốn thành lập những số gồm bốn chữ số khác nhau.
- Có bao nhiêu số nhỏ hơn 5000 ?
 - Có bao nhiêu số chẵn nhỏ hơn 7000 ?
- 21) Một lớp học có 30 học sinh. Trong đó có 12 nữ, cần thành lập một tổ công tác gồm 8 người. Có bao nhiêu cách lập sao cho trong tổ có đúng 2 nữ.
- 22) Trong không gian cho một tập hợp gồm 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu hình tứ diện với đỉnh thuộc tập hợp đã cho.
- 23) Một bộ đề thi có 15 câu hỏi. Mỗi thí sinh phải rút ra 4 câu (4 câu rút ra là “ đề thi ” của thí sinh này).
- Có bao nhiêu đề thi khác nhau? (Hai đề thi được coi là khác nhau nếu có ít nhất một câu khác nhau.)
 - Tham gia kỳ thi có 2736 thí sinh. Chứng tỏ rằng có ít nhất 3 thí sinh gặp cùng một đề thi.
- 24) Một tổ trực gồm 9 nam sinh và 3 nữ sinh. Giáo viên trực muốn chọn 4 học sinh để trực thư viện. Có bao nhiêu cách chọn nếu:
- Chọn học sinh nào cũng được?
 - Có đúng một nữ sinh được chọn?
 - Có ít nhất một nữ sinh được chọn?
- 25) Một họ n đường thẳng song song cắt một họ m đường thẳng song song. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành.
- 26) Cho tập $X = \{a, b, c, d\}$. Có bao nhiêu tập con của X
- Không chứa phần tử a?
 - Chứa phần tử a?
- 27) Một bình đựng 5 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, chúng chỉ khác nhau về màu. Lấy ra hai viên.
- Có bao nhiêu kết quả khác nhau?

- b) Có bao nhiêu cách lấy ra được 2 viên bi xanh?, hai viên bi đỏ? Hai viên bi khác màu?
- 28) Giáo viên hướng dẫn lao động muốn chia 9 học sinh ra làm 3 nhóm gồm 4, 3, và 2 học sinh. Có bao nhiêu cách chia?
- 29) Cho một đa giác lồi có n đỉnh ($n \geq 4$).
- Tính số đường chéo của đa giác này;
 - Biết rằng ba đường chéo không cùng đi qua một đỉnh thì không đồng quy, hãy tính số các giao điểm (không phải là đỉnh) của các đường chéo ấy.
- 30) Một tổ trực gồm 8 nam sinh và 6 nữ sinh. Giáo viên trực muốn chọn một nhóm 5 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn nếu nhóm này phải có ít nhất một nữ sinh?
- 31) Giám đốc một công ty muốn chọn một nhóm 5 người vào hội đồng tư vấn. Trong công ty có 12 người hội đủ điều kiện để được chọn, trong đó có hai cặp vợ chồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:
- Hội đồng này có đúng một cặp vợ chồng?
 - Hội đồng này không thể gồm cả vợ lẫn chồng (nếu có)?
- 32) Tính số đường chéo của một đa giác lồi có n cạnh. Tìm đa giác có số cạnh bằng số đường chéo.
- 33) (ĐH-B-2002) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, tìm n ?
- 34) (ĐH-B-2004) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?.
- 35) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 2008 chữ số sao cho tổng các chữ số bằng 3

III. KẾT LUẬN

Theo quan điểm riêng của chúng tôi chuyên đề “*tối ưu hóa bài toán đếm trong đại số tổ hợp*” có những đóng góp sau:

- Đã hệ thống hóa, phân tích, diễn giải được một số khái niệm về đại số tổ hợp và các khái niệm liên quan có chứng minh
- Thống kê được một số dạng toán điển hình liên quan đến tổ hợp – đặc biệt là các bài toán đếm
- Xây dựng một số biện pháp sư phạm để rèn luyện kỹ năng giải quyết các vấn đề liên quan đến đại số tổ hợp mà chủ yếu là bài toán đếm