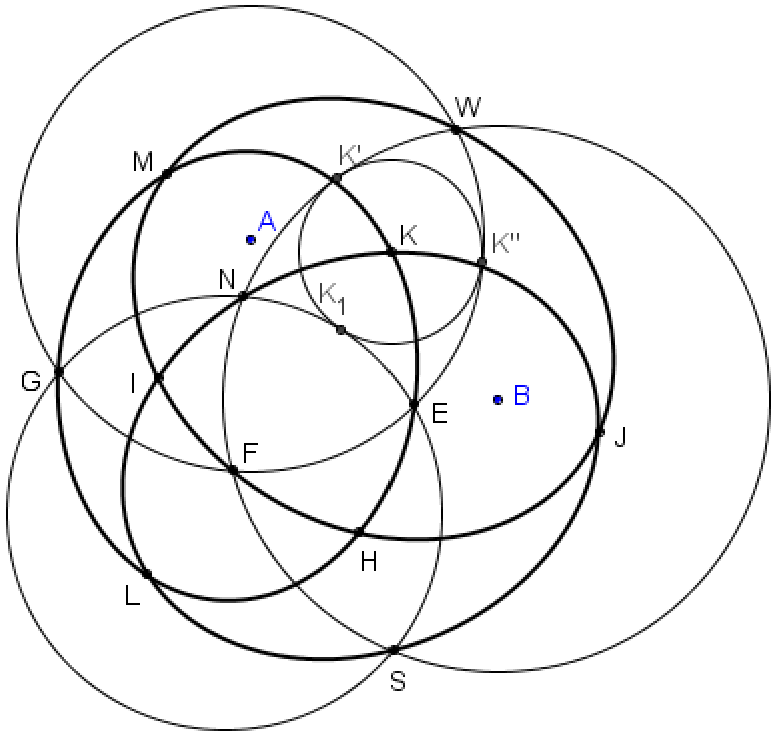
Bài toán:

Cho 3 điểm A, B, C trên mặt phẳng. Gọi a là ellip có tiêu điểm A, B, b là ellip có tiêu điểm A, C, c là ellip có tiêu điểm B, C; a cắt b tại H, M, a cắt c tại I, J, b cắt c tại K, L. Chứng minh rằng HM, IJ, KL đồng quy.

Lời giải:

Đặt $AH + BH = z, AH + CH = y, CK + BK = x$.
Dựng 3 đường tròn có tâm là A, B, C với bán kính R_A, R_B, R_C theo thứ tự sao cho $R_A + R_B = z, R_A + R_C = y, R_B + R_C = x$.
$\Rightarrow R_C = \dfrac{y - z + x}{2}, R_B = \dfrac{-y + z + x}{2}, R_A = \dfrac{y + z - x}{2}$
Gọi các giao điểm của (A) và (B) là W, F, giao điểm của (A) và (C) là G, E, giao điểm của (B) và (C) là N, S.
Tia BK cắt (B) tại K', tia AK cắt (A) tại K'' và CK cắt (C) tại K_1.



Ta có $CK + BK = x = R_B + R_C = CK - KK_1 + BK + KK' \Rightarrow KK_1 = KK' \Rightarrow$ đường tròn tâm K bán kính KK_1 tiếp xúc với (B) và (C), và tương tự, nó tiếp xúc với (A). Tương tự, ta có đường tròn tâm L tiếp xúc với $(A), (B), (C)$ tại các tiếp điểm L'', L' và L_1.
Gọi X là giao điểm của $L'K'$ và $L''K''$, G' là giao điểm của $L''K''$ với (L, LL'), H' là giao điểm của $L'K'$ với (L, LL'). Các tiếp tuyến của (L, LL') tại G' và H' cắt nhau tại T, các tiếp tuyến của (K, KK') tại K' và K'' cắt nhau tại T'. Vì $T'K''$ là tiếp tuyến của (K, KK') tại K'' nên $T'K''$ cũng là tiếp tuyến của (A) tại K'' vì (A) tiếp xúc với (K, KK') tại K''.
Xét phép vị tự f tâm L'' biến $(A) \to (L, LL') \Rightarrow f : K'' \to G', T'K'' \to TG' \Rightarrow T'K''//TG'$. Tương tự, $T'K'//TH'$. Lại có $T'K' = TH'$ và $T'K'' = TG'$. Suy ra hai tam giác $T'K'K''$ và $TH'G'$ vị tự với nhau qua phép vị tự tâm $X \Rightarrow G'H'//L'L''//K'K'' \Rightarrow \widehat{G'H'L'} = \widehat{L'L''X} = \widehat{XK'K''} \Rightarrow$ tứ giác $L'L"K'K"$ nội tiếp $\Rightarrow P_{X/(B)} = \overline{XK'} \cdot \overline{XL'} = \overline{XK''} \cdot \overline{XL''} = P_{X/(A)}$. Suy ra X nằm trên trục đẳng phương của (A) và (B). Tương tự, ta suy ra X là tâm đẳng phương của $(A), (B)$ và (C).
Xét phép vị tự Z_1 tâm K'' biến $(K) \to (A)$, phép vị tự Z_2 tâm L'' biến $(A) \to (L)$, ta có

$Z_1 \circ Z_2 : (K) \to (L) \Rightarrow X \in KL$, hay KL đi qua tâm đẳng phương của 3 đường tròn $(A), (B)$ và (C). Hoàn toàn tương tự, ta suy ra IJ, MH đi qua X.
Vậy IJ, MH, KL đồng quy tại tâm đẳng phương của $(A), (B)$ và (C) (đpcm).