CHƯƠNG XI: NHẬN DẠNG TAM GIÁC

I. TÍNH CÁC GÓC CỦA TAM GIÁC

Bài 201: Tính các góc của ΔABC nếu :

$$\sin(B+C)+\sin(C+A)+\cos(A+B)=\frac{3}{2}\quad(*)$$

Do $\quad A+B+C=\pi$

Nên: $(*)\Leftrightarrow \sin A+\sin B-\cos C=\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{C}{2}-4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+1-\cos^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin\frac{A-B}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\frac{C}{2}=\cos 0=1\\ \frac{A-B}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{C}{2}=\frac{\pi}{3}\\ A=B\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A=B=\frac{\pi}{6}\\ C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

Bài 202: Tính các góc của ΔABC biết:

$$\cos 2A+\sqrt{3}(\cos 2B+\cos 2C)+\frac{5}{2}=0\quad(*)$$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow 2\cos^2 A-1+2\sqrt{3}\left[\cos(B+C)\cos(B-C)\right]+\frac{5}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A.\cos(B-C) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \sqrt{3}\cos(B-C)\right]^2 + 3 - 3\cos^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \sqrt{3}\cos(B-C)\right]^2 + 3\sin^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(B-C) = 0\\ \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B - C = 0\\ \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A = 30^0\\ B = C = 75^0\end{cases}$$

Bài 203: Chứng minh ΔABC có $C = 120^0$ nếu :

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\ (*)$$

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\ \ \left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0 \text{ và } \cos\frac{B}{2} > 0 \text{ vì } 0 < \frac{A}{2};\frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow C = 120^0$$

Bài 204: Tính các góc của ΔABC biết số đo 3 góc tạo cấp số cộng và $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

Không làm mất tính chất tổng quát của bài toán giả sử $A < B < C$

Ta có: A, B, C tạo 1 cấp số cộng nên A + C = 2B

Mà $A + B + C = \pi$ nên $B = \dfrac{\pi}{3}$

Lúc đó: $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin\frac{\pi}{3} + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C-A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Do $C > A$ nên ΔABC có:

$$\begin{cases} \dfrac{C-A}{2} = \dfrac{\pi}{6} \\ C + A = \dfrac{2\pi}{3} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = \dfrac{\pi}{6} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

<u>Bài 205:</u> Tính các góc của ΔABC nếu

$$\begin{cases} b^2 + c^2 \le a^2 & (1) \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm cosin: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Do (1): $\quad b^2 + c^2 \le a^2$ nên $\cos A \le 0$

Do đó: $\quad \dfrac{\pi}{2} \le A < \pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

Vậy $\quad \cos\dfrac{A}{2} \le \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (*)$

Mặt khác: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$= \sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\le 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 1 \quad \left(\text{do } (*) \text{ và } \cos\frac{B-C}{2} \le 1\right)$$

Mà $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$ do (2)

Dấu "=" tại (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = C = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Bài 206: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2004)

Cho ΔABC không tù thỏa điều kiện

$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3 \qquad (*)$

Tính ba góc của ΔABC

* **Cách 1**: Đặt $M = \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3$

Ta có: $M = 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} - 4$

$\Leftrightarrow \quad M = 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} - 4$

Do $\sin\dfrac{A}{2} > 0$ và $\cos\dfrac{B-C}{2} \le 1$

Nên $M \le 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 4$

Mặt khác: ΔABC không tù nên $0 < A \le \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \le \cos A \le 1$

$\Rightarrow \cos^2 A \le \cos A$

Do đó: $M \le 2\cos A + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 4$

$\Leftrightarrow M \le \left(1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}\right) + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 4$

$\Leftrightarrow M \le -4\sin^2\dfrac{A}{2} + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 2$

$\Leftrightarrow M \le -2\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 1\right)^2 \le 0$

Do giả thiết (*) ta có M=0

Vậy: $\begin{cases} \cos^2 A = \cos A \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$

* **Cách 2**: $(*) \Leftrightarrow \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 A - \cos A\right) + \cos A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A\left(\cos A - 1\right) + \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A\left(\cos A - 1\right) - \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \left(1 - \cos^2\frac{B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A\left(\cos A - 1\right) - \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{B-C}{2} = 0 \ (*)$$

Do ΔABC không tù nên $\cos A \geq 0$ và $\cos A - 1 < 0$

Vậy vế trái của (*) luôn ≤ 0

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \sqrt{2}\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} \\ \sin\frac{B-C}{2} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$$

<u>Bài 207:</u> Chứng minh ΔABC có ít nhất 1 góc 60^0 khi và chỉ khi

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3} \ (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin A - \sqrt{3}\cos A\right) + \left(\sin B - \sqrt{3}\cos B\right) + \left(\sin C - \sqrt{3}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right]\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\left[-\cos\frac{A-B}{2} + \cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \vee \cos\frac{A-B}{2} = \cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} \vee \frac{A-B}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{A+B}{2} \vee \frac{-A+B}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3} \vee A = \frac{\pi}{3} \vee B = \frac{\pi}{3}$$

Bài 208: Cho ΔABC và $V = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$. Chứng minh:

a/ Nếu $V = 0$ thì ΔABC có một góc vuông

b/ Nếu $V < 0$ thì ΔABC có ba góc nhọn

c/ Nếu $V > 0$ thì ΔABC có một góc tù

Ta có: $V = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) + \cos^2 - 1$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$

$$\Leftrightarrow V = \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2 C$$

$$\Leftrightarrow V = -\cos C.\cos(A - B) + \cos^2 C$$

$$\Leftrightarrow V = -\cos C\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right]$$

$$\Leftrightarrow V = -2\cos C\cos A\cos B$$

Do đó:

a/ $\quad V = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \vee \cos B = 0 \vee \cos C = 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \perp$ tại A hay $\Delta ABC \perp$ tại B hay $\Delta ABC \perp$ tại C

b/ $\quad V < 0 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ có ba góc nhọn

(vì trong 1 tam giác không thể có nhiều hơn 1 góc tù nên không có trường hợp có 2 cos cùng âm)

c/ $\quad V > 0 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C < 0$

$\Leftrightarrow \cos A < 0 \vee \cos B < 0 \vee \cos C < 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ có 1 góc tù.

II. TAM GIÁC VUÔNG

Bài 209: Cho ΔABC có $\cot g\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$

Chứng minh ΔABC vuông

Ta có: $\quad \cot g\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{2R\sin A + 2R\sin C}{2R\sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{2\sin\frac{A + C}{2}.\cos\frac{A - C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2} = \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{A - C}{2} \quad \left(\text{do } \sin\frac{B}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A - C}{2} \quad \left(\text{do } \cos\frac{B}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{2} = \frac{A-C}{2} \vee \frac{B}{2} = \frac{C-A}{2}$$
$$\Leftrightarrow A = B + C \vee C = A + B$$
$$\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \vee C = \frac{\pi}{2}$$
$\Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A hay ΔABC vuông tại C

Bài 210: Chứng minh ΔABC vuông tại A nếu
$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$$

Ta có: $$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} = \frac{2R\sin A}{\sin B \sin C}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\cos B.\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B.\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$
$$\Leftrightarrow \cos B\cos C = \sin B\sin C \text{ (do } \sin A > 0)$$
$$\Leftrightarrow \cos B.\cos C - \sin B.\sin C = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(B+C) = 0$$
$$\Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$$
$\Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A

Bài 211: Cho ΔABC có:
$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \ (*)$$
Chứng minh ΔABC vuông

Ta có:
$$(*) \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right]\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right]\cos\frac{C}{2} = 1 - \left[\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} = 1 - \sin^2\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2} = 1 - \sin^2\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos^2\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]=\cos\frac{A-B}{2}\left[\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]\left[\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}\vee\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{C}{2}=1\vee\frac{C}{2}=\frac{A-B}{2}\vee\frac{C}{2}=\frac{B-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{4}\vee A=B+C\vee B=A+C$$

$$\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}\vee A=\frac{\pi}{2}\vee B=\frac{\pi}{2}$$

Bài 212: Chứng minh ΔABC vuông nếu:

$$3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)=15$$

Do bất đẳng thức Bunhiacốpki ta có:

$$3\cos B+4\sin B\le\sqrt{9+16}\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 B}=15$$

và $$6\sin C+8\cos C\le\sqrt{36+64}\sqrt{\sin^2 C+\cos^2 C}=10$$

nên: $$3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)\le 15$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\cos B}{3}=\dfrac{\sin B}{4}\\ \dfrac{\sin C}{6}=\dfrac{\cos C}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}tgB=\dfrac{4}{3}\\ cotgC=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow tgB=cotgC$

$\Leftrightarrow B+C=\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài 213: Cho ΔABC có: $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A.\sin B$
Chứng minh ΔABC vuông.

Ta có: $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A.\sin B$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A+B)\cos(A-B)=-2\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos(A+B)=\left[1-\sin(A+B)\right]\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow -\cos C=\left[1-\sin C\right]\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow -\cos C(1+\sin C)=(1-\sin^2 C).\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow -\cos C(1+\sin C)=\cos^2 C.\cos(A-B)$$

$\Leftrightarrow \cos C=0$ hay $-(1+\sin C)=\cos C.\cos(A-B)$ (*)

$\Leftrightarrow \cos C=0$

(Do $\sin C>0$ nên $-(1+\sin C)<-1$

Mà $\cos C.\cos(A-B)\ge -1$. Vậy (*) vô nghiệm.)

Do đó ΔABC vuông tại C

III. TAM GIÁC CÂN

Bài 214: Chứng minh nếu ΔABC có $tgA + tgB = 2\cot g\frac{C}{2}$ thì là tam giác cân.

Ta có: $tgA + tgB = 2\cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos A.\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \cos A.\cos B \quad \left(\text{do} \cos\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos C) = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A = B$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Bài 215: Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}$$

Ta có: $\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

(do $\cos\frac{A}{2} > 0$ và $\cos\frac{B}{2} > 0$)

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3\frac{A}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right]=0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2} \quad (\text{ vì } 1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}>0)$$

$\Leftrightarrow A = B$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C

Bài 216: Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}^2 A+\operatorname{cotg}^2 B\right) \ (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}+1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 A\sin^2 B=\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0=\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A=\sin B$$

Vậy ΔABC cân tại C

Bài 217: Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B\right) \ (*)$$

Ta có: $a+b=\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\left(a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B\right)$

$$\Leftrightarrow (a+b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B$$

$$\Leftrightarrow a\left[\operatorname{tg}A-\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right]+b\left[\operatorname{tg}B-\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right]+b\left[\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}}+\frac{b\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}}=0$$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}=0$ hay $\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=0$

$\Leftrightarrow A=B$ hay $\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}$

$\Leftrightarrow A=B$ hay $tgA=tgB \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C

IV. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Bài 218: Cho ΔABC thỏa: $a\cos B-b\cos A=a\sin A-b\sin B$ (*)
Chứng minh ΔABC vuông hay cân

Do định lý hàm sin: $a=2R\sin A, b=2R\sin B$

Nên (*) $\Leftrightarrow 2R\sin A\cos B-2R\sin B\cos A=2R\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin^2 A-\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)-\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\frac{1}{2}[\cos 2B-\cos 2A]$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=-[\sin(A+B)\sin(B-A)]$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)[1-\sin(A+B)]=0$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=0 \vee \sin(A+B)=1$

$\Leftrightarrow A=B \vee A+B=\frac{\pi}{2}$

vậy ΔABC vuông hay cân tại C

<u>Cách khác</u>

$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin^2 A-\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2})(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2})$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\sin(A+B)\sin(A-B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=0 \vee \sin(A+B)=1$

$\Leftrightarrow A=B \vee A+B=\frac{\pi}{2}$

Bài 219 ΔABC là tam giác gì nếu
$\left(a^2+b^2\right)\sin(A-B)=\left(a^2-b^2\right)\sin(A+B)$ (*)

Ta có: (*)

$\Leftrightarrow \left(4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B\right)\sin(A-B)=4R^2\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)\sin(A+B)$

$\Leftrightarrow \sin^2 A\left[\sin(A-B)-\sin(A+B)\right]+\sin^2 B\left[\sin(A-B)+\sin(A+B)\right]=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 A\cos A\sin(-B)+2\sin^2 B\sin A\cos B=0$

$\Leftrightarrow -\sin A\cos A + \sin B\cos B = 0$ (do $\sin A > 0$ và $\sin B > 0$)
$\Leftrightarrow \sin 2A = \sin 2B$
$\Leftrightarrow 2A = 2B \vee 2A = \pi - 2B$
$\Leftrightarrow A = B \vee A + B = \dfrac{\pi}{2}$
Vậy ΔABC cân tại C hay ΔABC vuông tại C.

Bài 220: ΔABC là tam giác gì nếu:
$$\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B & (1)\\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B & (2)\end{cases}$$

Ta có:
(1) $\Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A\sin 2B + 4R^2\sin^2 B\sin 2A = 16R^2\sin A\sin^2 B\cos A$
$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 4\sin A\sin^2 B\cos A$
$\Leftrightarrow 2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin A\cos A\sin^2 B = 4\sin A\sin^2 B\cos A$
$\Leftrightarrow \sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin B\cos A$ (do $\sin A > 0, \sin B > 0$)
$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = 0$
$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0$
$\Leftrightarrow A = B$
Thay vào (2) ta được
$\sin 2A = 2\sin^2 A$
$\Leftrightarrow 2\sin A\cos A = 2\sin^2 A$
$\Leftrightarrow \cos A = \sin A$ $(\text{do} \sin A > 0)$
$\Leftrightarrow \text{tg}A = 1$
$\Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{4}$
Do đó ΔABC vuông cân tại C

V. TAM GIÁC ĐỀU

Bài 221: Chứng minh ΔABC đều nếu:
$$bc\sqrt{3} = R\left[2(b + c) - a\right] \ (*)$$

Ta có:(*) $\Leftrightarrow (2R\sin B)(2R\sin C)\sqrt{3} = R\left[2(2R\sin B + 2R\sin C) - 2R\sin A\right]$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin(B + C)$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin B\cos C - \sin C\cos B$
$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - \frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right] + 2\sin C\left[1 - \frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin B\left[1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sin C\left[1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \quad (1)$$

Do $\sin B > 0$ và $1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

$\sin C > 0$ và $1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

Nên vế trái của (1) luôn ≥ 0

Do đó, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow C = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

<u>Bài 222</u>: Chứng minh ΔABC đều nếu $\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{3}{4} & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 - bc + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$ (do đl hàm cosin)

$\Leftrightarrow 2bc\cos A = bc$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4\sin B \sin C = 3$

$\Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) - \cos(B + C)\right] = 3$

$\Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) + \cos A\right] = 3$

$\Leftrightarrow 2\cos(B - C) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \quad \left(\text{do (1) ta có } A = \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C$

Vậy từ (1), (2) ta có ΔABC đều

<u>Bài 223</u>: Chứng minh ΔABC đều nếu:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A + B)\cos(A - B)$

$= 2\sin C\cos(A - B) \leq 2\sin C$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(A - B) = 1$

Tương tự: $\sin 2A + \sin 2C \leq 2\sin B$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(A-C)=1$

Tương tự: $\sin 2B+\sin 2C\le 2\sin A$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(B-C)=1$

Từ (1) (2) (3) ta có: $2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\le 2(\sin C+\sin B+\sin A)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(A-B)=1\\ \cos(A-C)=1\\ \cos(B-C)=1\end{cases} \Leftrightarrow A=B=C$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 224: Cho ΔABC có:

$$\frac{1}{\sin^2 2A}+\frac{1}{\sin^2 2B}+\frac{1}{\sin^2 C}=\frac{1}{2\cos A\cos B\cos C} (*)$$

Chứng minh ΔABC đều

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^2 2B.\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2B$

$=\dfrac{\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C}{2\cos A\cos B\cos C}\cdot(\sin 2A\sin 2B\sin 2C)$

$=4\sin A\sin B\sin C(\sin 2A\sin 2B\sin 2C)$

Mà: $4\sin A\sin B\sin C=2\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]\sin(A+B)$

$=2\left[\cos(A-B)+\cos C\right]\sin C$

$=2\sin C\cos C+2\cos(A-B)\sin(A+B)$

$=\sin 2C+\sin 2A+\sin 2B$

Do đó,với điều kiện ΔABC không vuông ta có

(*) $\Leftrightarrow \sin^2 2B\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2B$

$=\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$=\sin^2 2A\sin 2B\sin 2C+\sin^2 2B\sin 2A\sin 2C+\sin^2 2C\sin 2A\sin 2B$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\sin 2B\sin 2A-\sin 2B\sin 2C)^2+\dfrac{1}{2}(\sin 2A\sin 2B-\sin 2A\sin 2C)^2$

$+\dfrac{1}{2}(\sin 2C\sin 2A-\sin 2C\sin 2B)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2B\sin 2A=\sin 2B\sin 2C\\ \sin 2A\sin 2B=\sin 2A\sin 2C\\ \sin 2A\sin 2C=\sin 2C\sin 2B\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2A=\sin 2B\\ \sin 2B=\sin 2C\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow ABC$ đều

Bài 225: Chứng minh ΔABC đều nếu:

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{2p}{9R} (*)$$

Ta có: $a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$$= 2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C$$
$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$
$$= R\left[2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\right]$$
$$= 2R\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] = 4R\sin C\sin A\sin B$$

<u>Cách 1:</u> $a\sin B + b\sin C + c\sin A$

$$= 2R(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)$$
$$\geq 2R\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C} \text{ (do bđt Cauchy)}$$

Do đó vế trái : $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} \leq \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$ (1)

Mà vế phải: $\dfrac{2p}{9R} = \dfrac{a+b+c}{9R} = \dfrac{2}{9}(\sin A + \sin B + \sin C)$

$$\geq \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

(*) $\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

<u>Cách 2:</u> Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{4R\sin A\sin B\sin C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \dfrac{a+b+c}{9R}$

$$\Leftrightarrow \frac{4R\left(\frac{a}{2R}\right)\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)}{a\left(\frac{b}{2R}\right) + b\left(\frac{c}{2R}\right) + \frac{ca}{2R}} = \frac{a+b+c}{9R}$$
$$\Leftrightarrow 9abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Do bất đẳng thức Cauchy ta có

$a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$

$ab + bc + ca \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Do đó: $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

<u>Bài 226</u>: Chứng minh ΔABC đều nếu

$$\cot gA + \cot gB + \cot gC = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \; (*)$$

Ta có: $\cot gA + \cot gB = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} = \dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}$

$$\geq \frac{\sin C}{\left(\frac{\sin A + \sin B}{2}\right)^2} \text{ (do bđt Cauchy)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A+B}{2}.\cos^2\frac{A-B}{2}} = \frac{2\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}}$$

$$\geq 2\text{tg}\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tương tự: $\cot gA + \cot gC \geq 2\text{tg}\frac{B}{2} \qquad (2)$

$$\cot gB + \cot gC \geq 2\text{tg}\frac{A}{2} \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) ta có

$$2(\cot gA + \cot gB + \cot gC) \geq 2\left(\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)$$

Do đó dấu "=" tại (*) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin A = \sin B = \sin C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

BÀI TẬP

1. Tính các góc của ΔABC biết:

   a/ $\cos A = \sin B + \sin C - \frac{3}{2}$ (ĐS: $B = C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{2\pi}{3}$)

   b/ $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$ (ĐS: $A = B = C = \frac{\pi}{3}$)

   c/ $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$

2. Tính góc C của ΔABC biết:

   a/ $(1 + \cot gA)(1 + \cot gB) = 2$

   b/ $\begin{cases} A, B \text{ nhọn} \\ \sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C} \end{cases}$

3. Cho ΔABC có: $\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$

   Chứng minh Δ có ít nhất một góc 36^0.

4. Biết $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = m$. Chứng minh

   a/ $m = 2$ thì ΔABC vuông

   b/ $m > 2$ thì ΔABC nhọn

   c/ $m < 2$ thì ΔABC tù.

5. Chứng minh ΔABC vuông nếu:

   a/ $\cos B + \cos C = \frac{b+c}{a}$

   b/ $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$

c/ $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

d/ $\dfrac{(b-c)^2}{b^2} = \dfrac{2\left[1-\cos(B-C)\right]}{1-\cos 2B}$

6. Chứng minh ΔABC cân nếu:

a/ $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{a^2-c^2}}$

b/ $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\dfrac{A}{2}.\cot g\dfrac{B}{2}$

c/ $tgA + 2tgB = tgA.tg^2B$

d/ $a\left(\cot g\dfrac{C}{2} - tgA\right) = b\left(tgB - \cot g\dfrac{C}{2}\right)$

e/ $(p-b)\cot g\dfrac{C}{2} = ptg\dfrac{B}{2}$

f/ $a + b = tg\dfrac{C}{2}(atgA + btgB)$

7. ΔABC là Δ gì nếu:

a/ $atgB + btgA = (a+b)tg\dfrac{A+B}{2}$

b/ $c = c\cos 2B + b\sin 2B$

c/ $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$

d/ $4S = (a+b-c)(a+c-b)$

8. Chứng minh ΔABC đều nếu

a/ $2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$

b/ $3S = 2R^2\left(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C\right)$

c/ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$

d/ $m_a + m_b + m_c = \dfrac{9R}{2}$ với m_a, m_b, m_c là 3 đường trung tuyến