ĐỊNH LÝ CEVA VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN

Biên soạn: Huỳnh Chí Hào

I. Định lý Ceva

Cũng như định lí Carnot, định lí Ceva cũng cho ta điều kiện cần và đủ để kiểm tra sự đồng quy của ba đường thẳng, nhưng, đó là ba đường thẳng theo thứ tự đi qua ba đỉnh của một tam giác.

Định lý

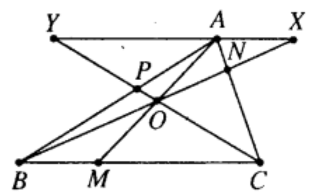
Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó : các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

Chứng minh

Chứng minh điều kiện cần. Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. AM, BN, CP đồng quy

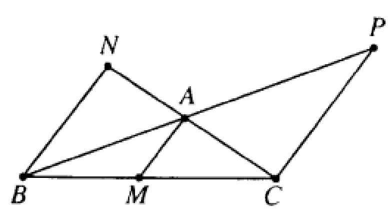


Giả sử AM, BN, CP đồng quy tại O. Qua A, vẽ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này theo thứ tự cắt BN, CP tại X, Y. Theo các hệ quả 2 và 3 của định lí Thales dạng đại số :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AY}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{XA}}.\frac{\overline{YA}}{\overline{CB}}$$

$$= \frac{\overline{AX}}{\overline{XA}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{YA}}{\overline{AY}} = (-1).(-1).(-1) = -1.$$

Trường hợp 2. AM, BN, CP đôi một song song



Theo hệ quả 1 của định lí Thales dạng đại số :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}$$

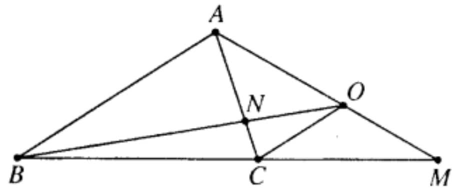
$$= \frac{\overline{MB}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{MC}} = (-1).(-1).(-1) = -1.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

Chứng minh điều kiện đủ. Ta chứng minh nếu ba đường AM, BN, CP không đôi một song song thì chúng phải đồng quy.

Giả sử AM, BN không song song. Đặt $O = AM \cap BN$. Khi đó, CO và AB không song song. Thật vậy, nếu CO song song với AB thì theo các hệ quả 1, 2 của định lí Thales dạng đại số, ta có (h.1.43) :



$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OC}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{CO}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1.$$

Mặt khác, theo giả thiết : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$

Suy ra : $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow A \equiv B$, mâu thuẫn.

Vậy, CO không song song với AB. Đặt $P' = CO \cap AB$. Theo kết quả đạt được trong phép chứng minh điều kiện cần : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = -1$. Từ đó, với chú ý rằng $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$, ta có : $\dfrac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \Rightarrow P' \equiv P$.

Tóm lại, AM, BN, CP đồng quy. □

Chú ý. Khi các điểm M, N, P thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, định lí Ceva được phát biểu đơn giản như sau :

$$AM, BN, CP \text{ đồng quy khi và chỉ khi } \Leftrightarrow \frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1.$$

II. Một số bài toán ứng dụng định lý

Bài 1:

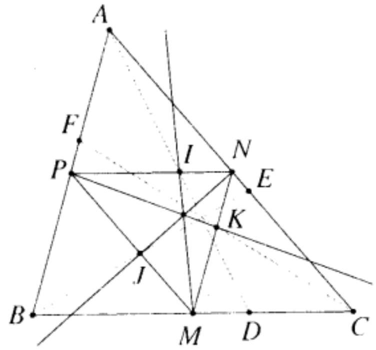
Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D, E, F qua I. Chứng minh rằng AD', BE' và CF' đồng quy.

Lời giải

Xét tam giác ABC với ba đoạn thẳng Ceva AD, BE và CF đồng quy . Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của chúng.

M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC.

Ta dễ dàng chứng minh được ba điểm I, J, K nằm trên ba cạnh của tam giác MNP.



Trong tam giác MNP, xét tỉ số:

$$\frac{IP}{IN}\cdot\frac{KN}{KM}\cdot\frac{JM}{JP}=\frac{DB}{DC}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{EC}{EA}=1 \text{ (do } AD, BE, CF \text{ đồng quy).}$$

Từ đó, theo định lí Ceva, ta có MI, NJ, PK đồng quy (đpcm).

Bài 2:

Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D, E, F qua I. Chứng minh rằng AD', BE' và CF' đồng quy.

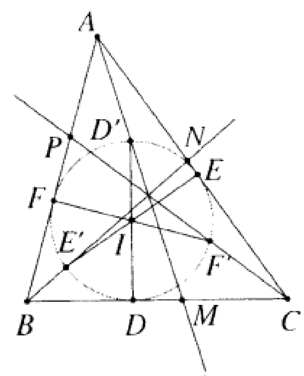
Lời giải

Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AD' và BC, BE' và CA, CF' và AB

Để chứng minh AD', BE', CF' đồng quy, ta đi chứng minh

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1.$$

Qua D' kẻ tiếp tuyến với (I) cắt hai cạnh AB và AC tại B' và C' (h.5.17b), rõ ràng $B'C'$ // BC (do cùng vuông góc với DD').



Đặt $\begin{cases} B'F = B'D' = x \\ C'E = C'D' = y \end{cases}$

suy ra $\begin{cases} AB' = p-a-x \\ AC' = p-a-y \end{cases}$

Do $B'C'$ // BC nên : $\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{AC'}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{a}=\frac{p-a-x}{c}=\frac{p-a-y}{b}$$

$$=\frac{2p-2a}{a+b+c}=\frac{p-a}{p}.$$

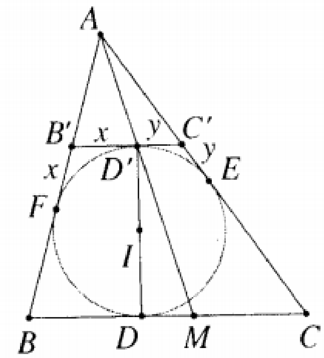
Từ đó ta tính được $x=\dfrac{(p-a)(p-c)}{p}$ và $y=\dfrac{(p-a)(p-b)}{p}$.

Suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{D'B'}{D'C'} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{p-c}{p-b}$.

Tính toán tương tự với các tỉ số $\dfrac{NC}{NA}$ và $\dfrac{PA}{PB}$, ta được:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB} = \frac{p-c}{p-b}\cdot\frac{p-a}{p-c}\cdot\frac{p-b}{p-a} = 1.$$

Do đó, theo định lí Ceva, ba đường thẳng AD', BE' và CF' đồng quy.



<u>Bài 3</u>:

Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD. Các điểm I, J, K theo thứ tự là trung điểm của AM, NA, MN. Chứng minh rằng BI, DJ, CK đồng quy.

<u>Lời giải</u>

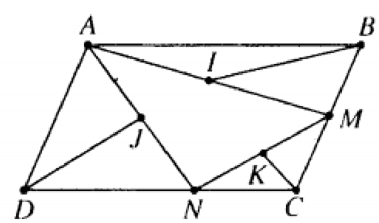
Giả sử $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DN} = n\overrightarrow{DC}$.

Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao của BI, DJ, CK với DC, CB, BD.

Ta có : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) + \frac{m}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{m-1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Từ đó : $\dfrac{\overline{XD}}{\overline{XC}} = -(m-1) = 1-m$.

Tương tự : $\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = -\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{1-n}$.



Lại có : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$

$$= \frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{CD}.$$

Từ đó: $\dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = \dfrac{n-1}{1-m}$.

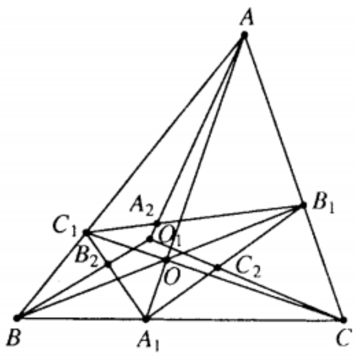
Suy ra : $\dfrac{\overline{XD}}{\overline{XC}}\cdot\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YB}}\cdot\dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = (1-m)\cdot\dfrac{1}{1-n}\cdot\dfrac{n-1}{1-m} = -1.$

Áp dụng định lí Ceva cho tam giác BDC với chú ý rằng BI, DJ, CK không thể song song, ta có : BI, DJ, CK đồng quy. □

Bài 4:

Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Điểm O_1 nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng AO_1, BO_1, CO_1 theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Lời giải



Ta có :

$$\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}}\cdot\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_2A_1}}\cdot\frac{\overline{C_2A_1}}{\overline{C_2B_1}} = (-\frac{A_2B_1}{A_2C_1}).(-\frac{B_2C_1}{B_2A_1}).(-\frac{C_2A_1}{C_2B_1})$$

$$= -\frac{A_2B_1}{A_2C_1}\cdot\frac{B_2C_1}{B_2A_1}\cdot\frac{C_2A_1}{C_2B_1}$$

$$= -\frac{S_{O_1AB_1}}{S_{O_1AC_1}}\cdot\frac{S_{O_1BC_1}}{S_{O_1BA_1}}\cdot\frac{S_{O_1CA_1}}{S_{O_1CB_1}}$$

$$= -\frac{S_{O_1CA_1}}{S_{O_1BA_1}}\cdot\frac{S_{O_1AB_1}}{S_{O_1CB_1}}\cdot\frac{S_{O_1BC_1}}{S_{O_1AC_1}} = -\frac{CA_1}{BA_1}\cdot\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}$$

$$= -(-\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}).(-\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}).(-\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}) = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}\cdot\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}. \qquad (1)$$

Mặt khác, vì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}\cdot\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}} = -1 \qquad (2)$$ (định lí Ceva trong tam giác ABC).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}}\cdot\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_2A_1}}\cdot\frac{\overline{C_2A_1}}{\overline{C_2B_1}} = -1.$

Từ đó, áp dụng định lí Ceva cho tam giác $A_1B_1C_1$, với chú ý rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 không thể đôi một song song, ta có : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy. □

Bài 5:

Cho tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Đường thẳng qua O song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại C_2, B_1. Đường thẳng qua O song song với CA cắt BC, BA lần lượt tại A_2, C_1. Đường thẳng qua O song song với AB cắt CA, CB lần lượt tại B_2, A_1. Vẽ các hình bình hành $OA_1A_3A_2$, $OB_1B_3B_2$, $OC_1C_3C_2$. Chứng minh rằng AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.

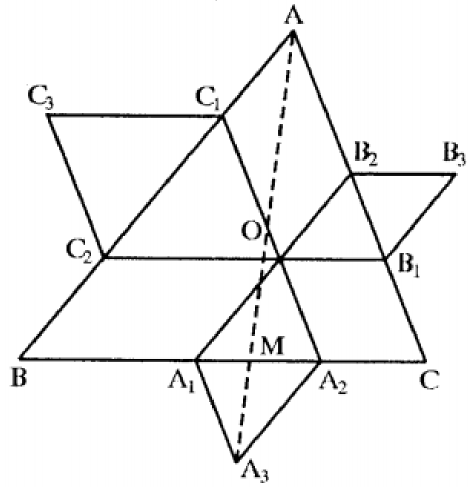
Lời giải

Giả sử AA_3, BB_3, CC_3 lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

Ta có $\frac{MB}{MC} = \frac{S_{AA_3B}}{S_{AA_3C}} = \frac{S_{AA_2B}}{S_{AA_1C}}$ (vì $A_2A_3 \,//\, AB, A_1A_3 \,//\, AC$)

$= \frac{A_2B}{A_1C} = \frac{A_2B}{CB}.\frac{BC}{A_1C}$

$= \frac{A_2C_1}{CA}.\frac{BA}{A_1B_2} = \frac{AB}{AC}.\frac{A_2C_1}{A_1B_2}$.



Tương tự ta có

$\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{BA}.\frac{B_2A_1}{B_1C_2}, \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}.\frac{C_2B_1}{C_1A_2}$.

Từ các đẳng thức trên ta có

$\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1$.

Theo định lí Xê-va ta có AM, BN, CP đồng quy hay AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.

Bài 6:

Cho tam giác nhọn ABC, phân giác AD.
Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. $BF \cap CE = H$. Chứng minh rằng : $AH \perp BC$.

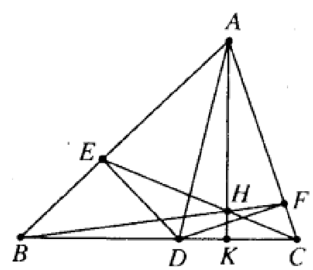
Lời giải

Gọi K là hình chiếu của A trên BC

Vì K, F, E theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB nên :

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -\left(-\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}\right)\left(-\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}\right)\left(-\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\right)$$

$$= -\frac{KB}{KC}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB}.$$



Từ đó, với chú ý rằng $EA = FA$; $ED = FD$ ta có :

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -\frac{KB}{KA}.\frac{KA}{KC}.\frac{FC}{FD}.\frac{ED}{EB} = -\cot B.\tan C.\cot C \tan B = -1.$$

Vậy, theo định lí Ceva, với chú ý rằng AK, BF, CE không thể đôi một song song, ta có AK, BF, CE đồng quy.

Điều đó có nghĩa là AK đi qua H.

Suy ra : $AH \perp BC$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các cạnh DA, AB, BC, CD sao cho :

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DC}}.$$

Các đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ theo thứ tự qua A, B, C và theo thứ tự song song với XT, YT, ZT. Chứng minh rằng : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy.

Bài 2:

Cho lục giác $ABCDEF$ có các cặp cạnh đối song song. M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng : MQ, PS, RN đồng quy.

Bài 3:

Cho tam giác nhọn ABC. Hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ có các đỉnh A_1, A_2 thuộc cạnh BC và các đỉnh A_3, A_4 theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB. $A_0 = A_1A_3 \cap A_2A_4$. Tương tự, ta xác định các điểm B_0, C_0.

Chứng minh rằng : AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy.

-----------------------Hết----------------------