Một số ứng dụng của định lý về đường phân giác

Hoàng Minh Quân
Trường THPT Ngọc Tảo, Hà Nội

Định lí về đường phân giác là một trong những định lí đẹp, có nhiều ứng dụng trong việc giải nhiều bài toán hình học phẳng. Tuy nhiên chuyên đề về ứng dụng định lí đường phân giác hiện nay còn chưa có nhiều. Bài viết sau đây nhằm khai thác và trình bày một số ứng dụng của định lí đường phân giác trong các bài toán hình học phẳng hay và thú vị được chọn lựa từ đề thi một số quốc gia và khu vực. Tác giả hi vọng chuyên đề này sẽ có phần nào đó hữu ích đối với các thầy cô giáo và các em học sinh trong giảng dạy và học tập.

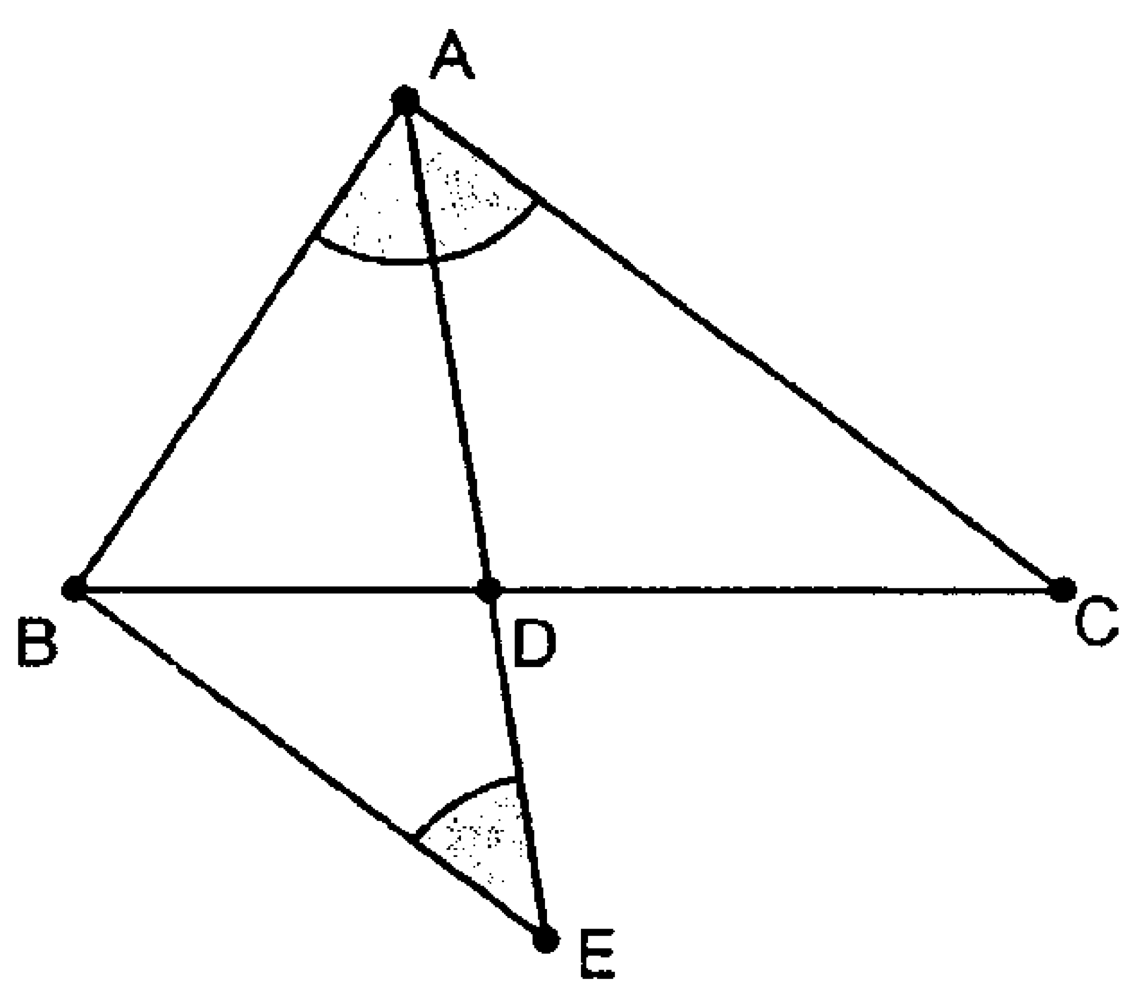
I. PHÁT BIỂU VÀ CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ.

Định lí.

Trong một tam giác đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn đó.

Chứng minh

Lời giải 1



Gọi AD là đường phân giác trong của tam giác ABC.Từ đỉnh B kẻ đường thẳng qua B và song song với cạnh AC, cắt AD ở E.

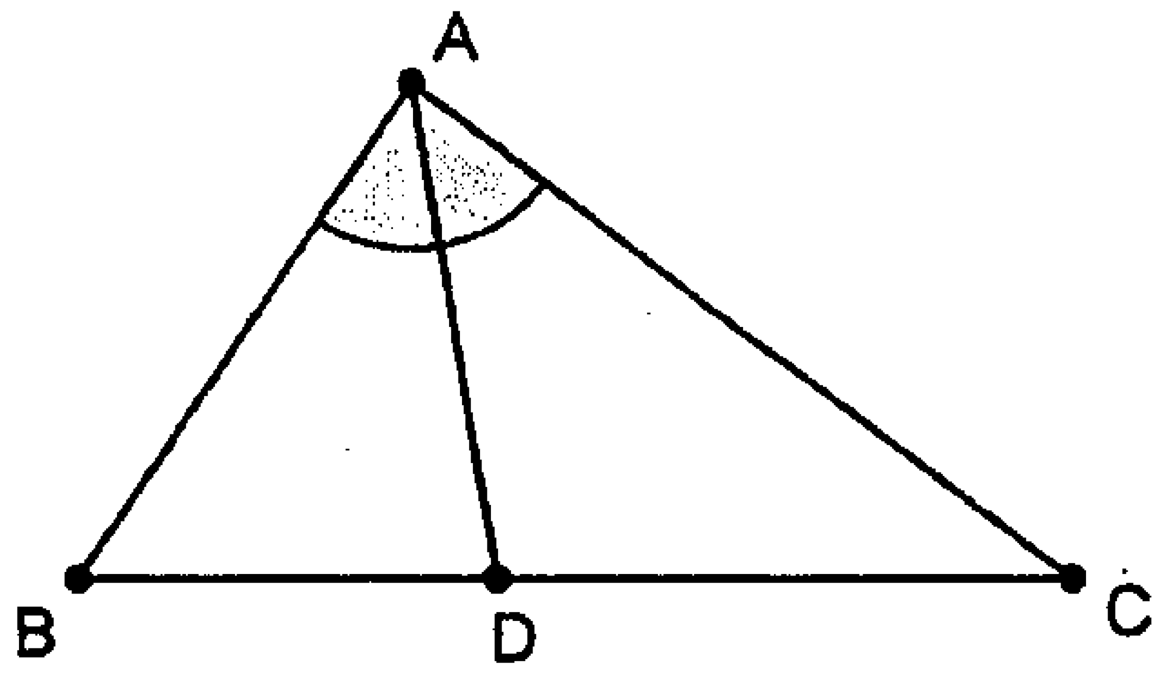
Theo giả thiết AD là đường phân giác góc A nên ta có $\angle BAE = \angle CAE$ (1.1)

Mặt khác $BE//AC$ nên chúng ta có $\angle CAE = \angle BEA$ (1.2).

Từ (1.1) và (1.2) chúng ta có $\angle BAE = \angle BEA$ nên tam giác ABE cân ở B. Suy ra $BA = BE$.

Trong tam giác DAC theo hệ quả định lí Talet, chúng ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{AC}$.
Lại có $BA = BE$ nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.
Thay $BC = AB - AC, BD = AD - AB$, chúng ta có $\dfrac{AB - AC}{AD - AB} = \dfrac{AC}{AD}$.

Lời giải 2



Áp dụng định lí Sin trong tam giác ABD và ACD, chúng ta có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BAD}, \quad \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle DAC} \quad (1.3)$$

Do AD là đường phân giác trong góc A nên ta có $\angle BAD = \angle DAC \quad (1.4)$.
Lại có $\sin \angle BDA = \sin \angle ADC$ (1.5).
Từ (1.3), (1.4), (1.5), chúng ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Chú ý: Việc chứng minh đối với đường phân giác ngoài được thực hiện tương tự.

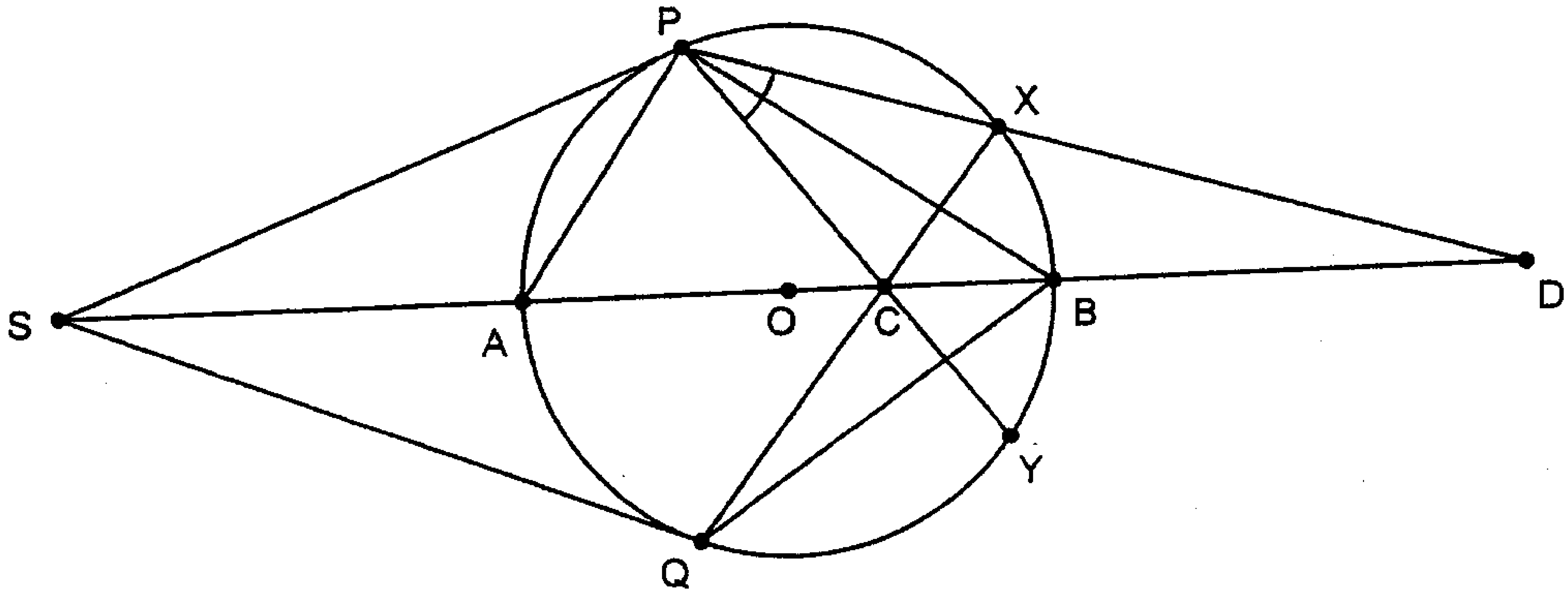
II.ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC VÀO GIẢI TOÁN.

Bài toán 1(Turkey 2000)

Cho đường tròn tâm O và điểm S nằm ngoài (O). Qua S kẻ hai tiếp tuyến dến (O)với hai tiếp điểm là P, Q. Đường thẳng SO cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, B với B là điểm nằm trên đường kéo dài của SO. X là một điểm trên cung nhỏ PB của đường tròn (O). Đường thẳng SO cắt các đường thẳng QX, PX lần lượt tại C, D. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

Chứng minh



Gọi Y là giao điểm của đường thẳng PC và cung QB. Do tính đối xứng của 2 tiếp điểm P và Q cùng qua điểm C nên chúng ta có cung BX và cung BY có cùng số đo. Từ đó chúng ta có $\angle NPX = \angle BPY$ hay BP là đường phân giác trong góc $\angle CPD$.
Mặt khác $\angle APB = 90^0$ nên chúng ta cũng có PA là đường phân giác ngoài góc $\angle CPD$.
Áp dụng định lí đường phân giác chúng ta có:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{AD}.$$

hay

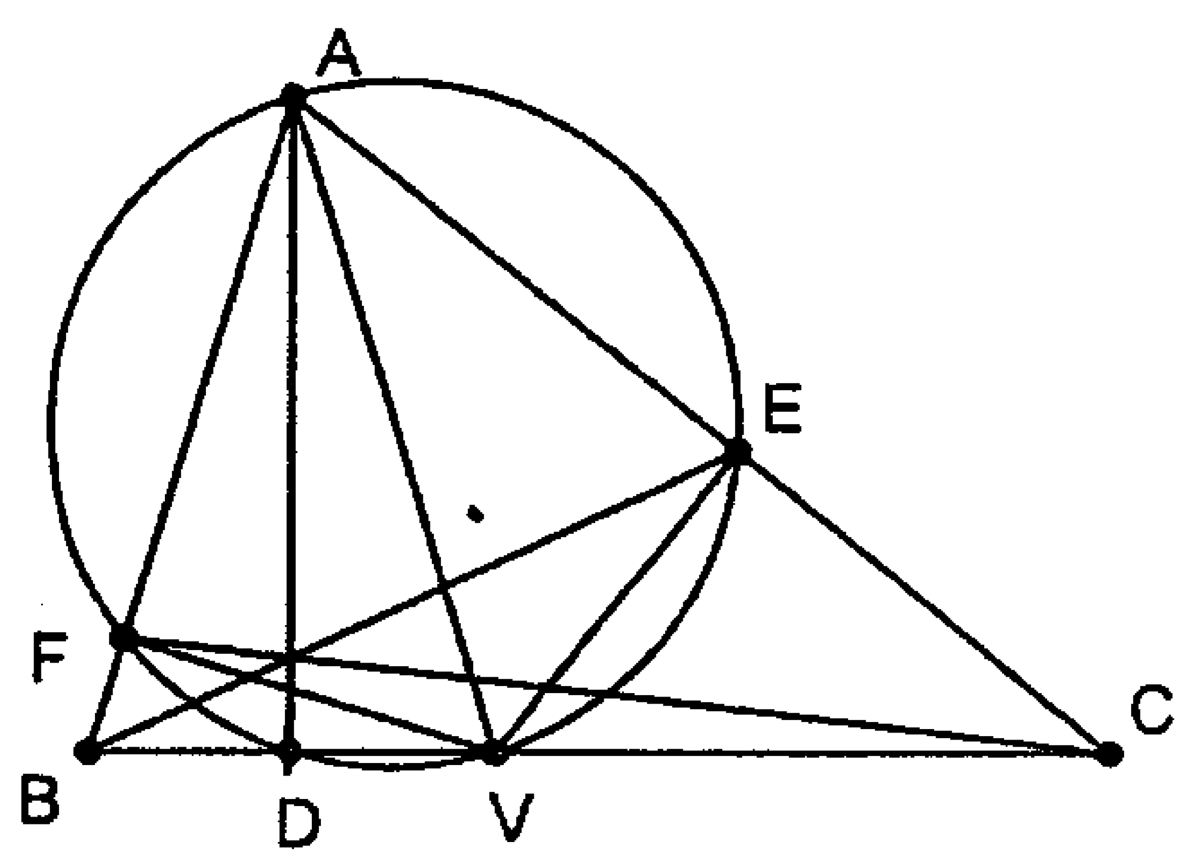
$$\frac{AB - AC}{AD - AB} = \frac{AC}{AD}$$

Đem quy đồng ta được
$AB.AD - AC.AD = AC.AD - AB.AC \Leftrightarrow AB.AD + AB.AC = 2AC.AD.$
Chia cả hai vế của đẳng thức trên cho $AB.AC.AD$ ta được

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

Bài toán 2(Korea 2000) Cho tam giác nhọn ABC với $AB \neq AC$, V là giao điểm đường phân giác trong góc A với BC. Gọi D là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC; E, F lần lượt là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AVD với CA và AB. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Chứng minh



Do AD vuông góc với BC nên $\angle ADV = 90^0$, ngoài ra năm điểm A, D, V, E, F đồng viên nên chúng ta có $\angle BFV = \angle CEV = 90^0$.Từ đó chúng ta có tam giác BFV đồng dạng với tam giác BDA; tam giác CEV và tam giác CDA đồng dạng. Do vậy chúng ta có

$$\frac{BD}{BF} = \frac{AB}{BV}; \quad \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{VC}$$

Mặt khác áp dụng *đính lí đường phân giác*, chúng ta có

$$\frac{AB}{BV} = \frac{AC}{VC}$$

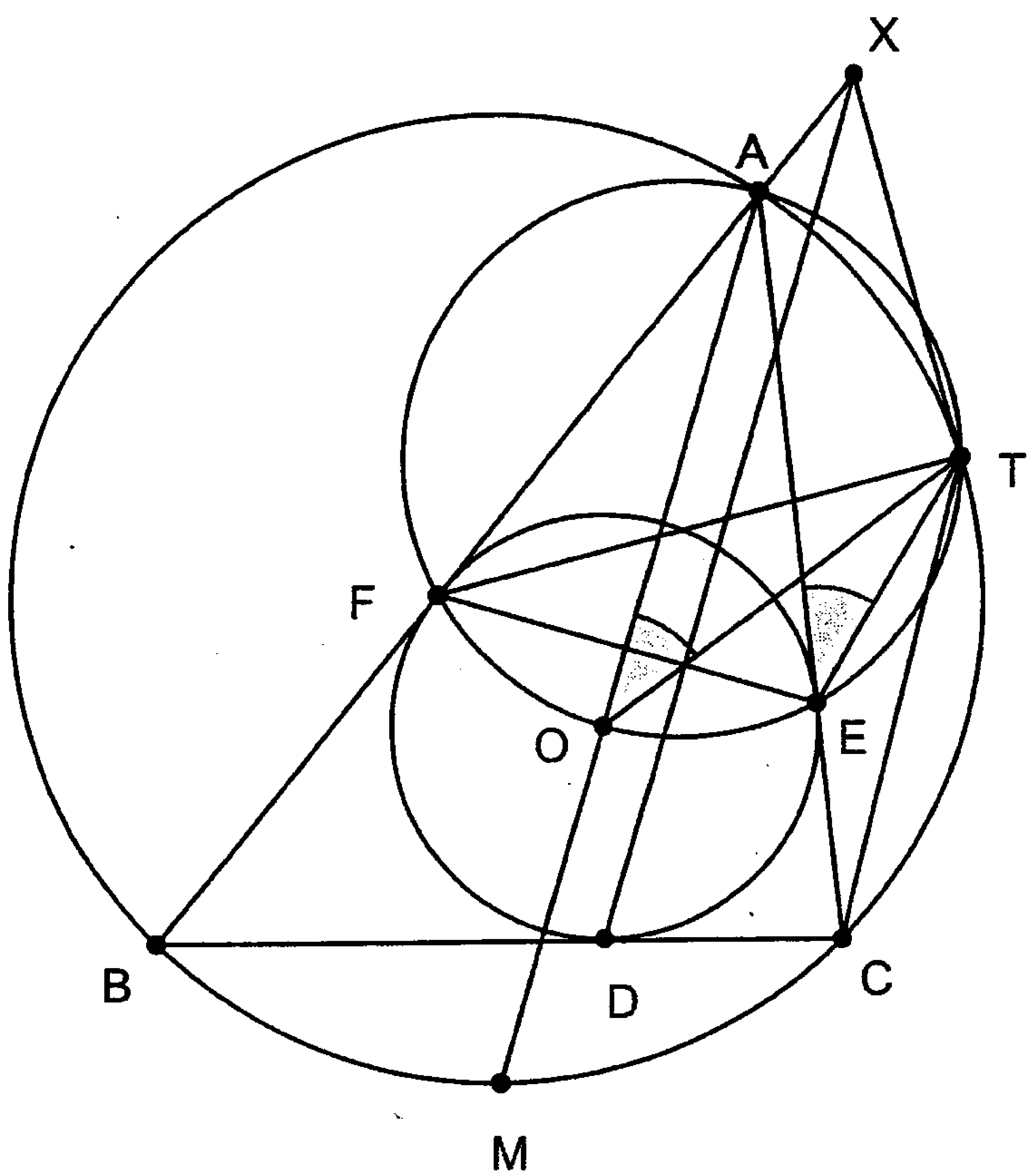
Từ đó chúng ta có

$$\frac{BD}{BF} = \frac{CD}{CE} \quad (1)$$

Lại có AV là đường phân giác trong góc A nên $\angle FAV = \angle VAE$ từ đó chúng ta có $AE = AF \quad (2)$.
Từ $(1), (2)$ chúng ta có

$$\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC}\frac{CE}{FB} = \frac{BD}{BF}\frac{CE}{DC} = 1.$$

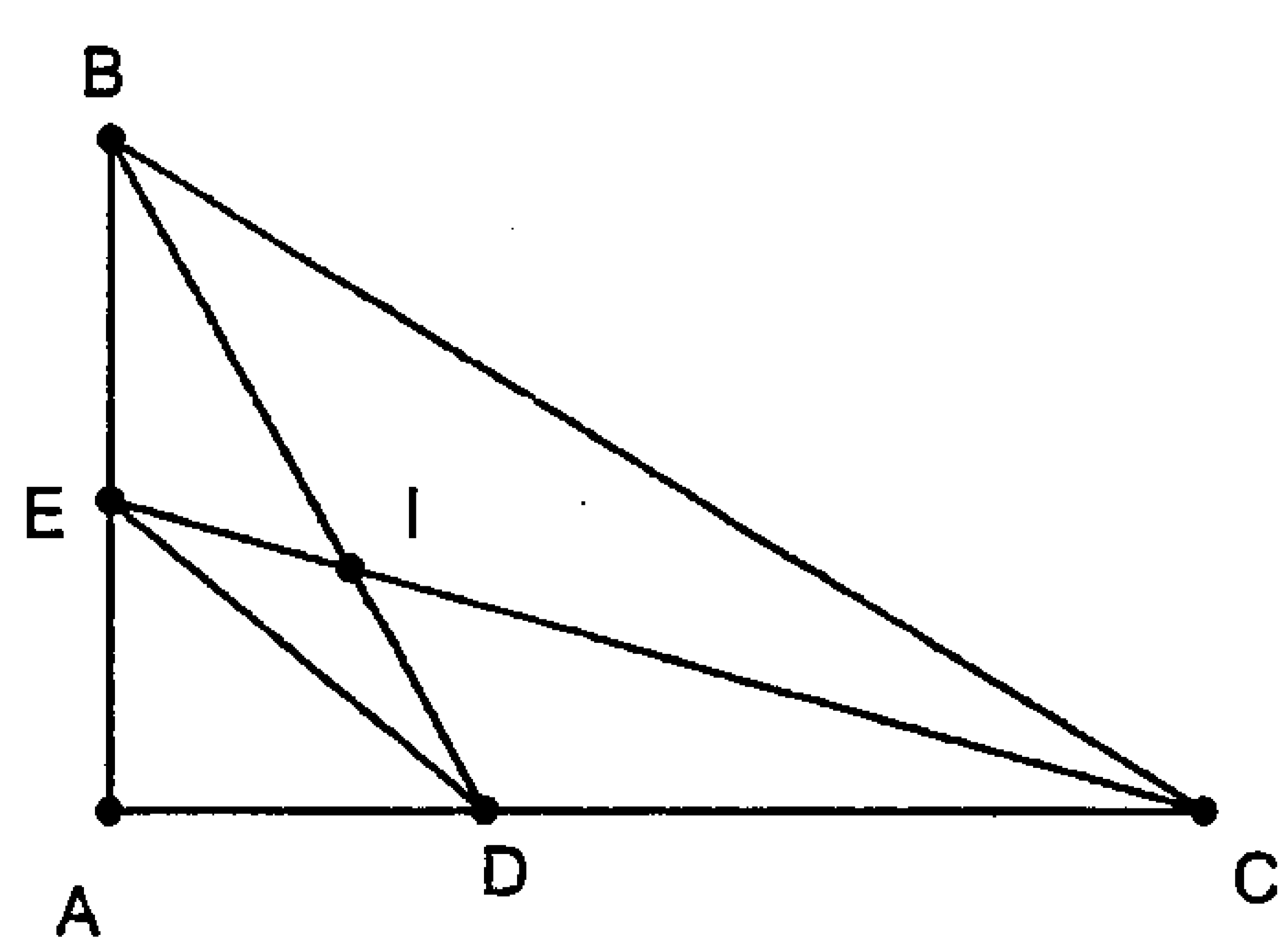
Do đó theo định lí Ceva thì AD, BE, CF đồng quy.
Bài toán 3(Iran 3rd round 2012)
Cho tam giác nhọn ABC với $AB \neq AC$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Qua D kẻ đường vuông góc với EF và cắt AB tại X, giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC là T. CHứng minh rằng $TX \perp TF$.
Chứng minh



Gọi M là trung điểm cung BC không chứa điểm A.
Chúng ta có $\angle AFT = \angle AOT = \angle AET$ vì cùng chắn cung AT suy ra $\angle BFT = \angle MOT = \angle CET$. Lại có $\angle AFT = \angle AMT = \angle ACT$

Bài toán 4(Iran vòng 2, 1992) Cho tam giác ABC vuông ở A. Các đường phân giác góc B và C cắt nhau ở I và lần lượt cắt các cạnh AC và AB tại D và E. Chứng minh rằng $S_{BCDE} = 2S_{BIC}$(S là diện tích).

Chứng minh



Để ý rằng I là giao điểm hai đường phân giác trong BD, CE nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, bán kính r. Chúng ta có diện tích tam giác BIC là $S_{\Delta BIC} = \dfrac{1}{2}r.BC$

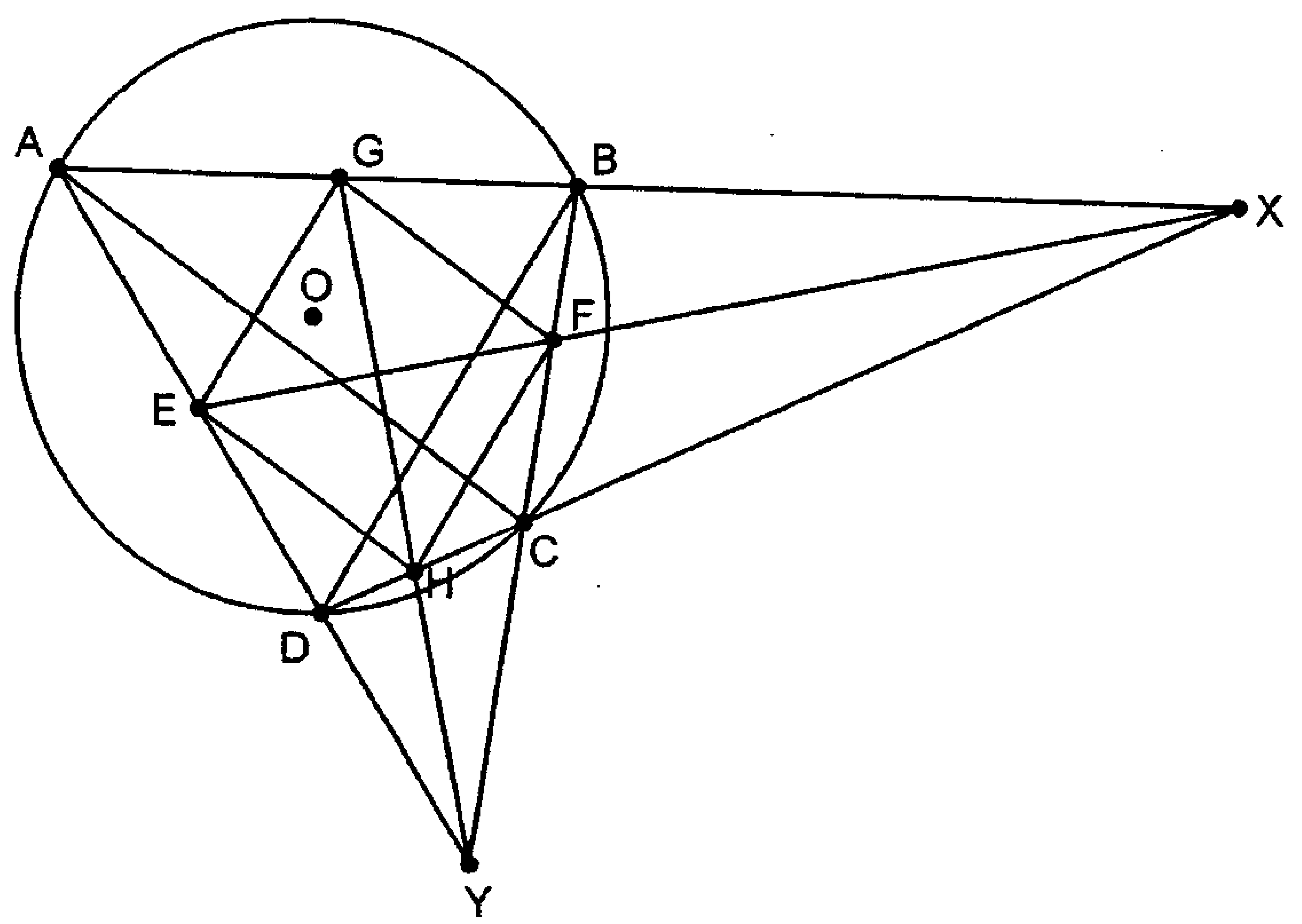
Lại có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = r.p = \frac{1}{2}r\left(AB + BC + CA\right) \Rightarrow r = \frac{AB.AC}{AB + BC + CA}$.
Vậy $S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}\frac{AB.AC.BC}{AB + BC + CA}$.
Mặt khác $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE}$.Bây giờ chúng ta tìm $S_{\Delta ADE}$.
Áp dụng *định lí đường phân giác trong góc B* chúng ta có

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{DA} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} + 1 = \frac{DC}{DA} + 1 \Leftrightarrow \frac{BC + AB}{AB} = \frac{DC + DA}{DA} \Leftrightarrow \frac{BC + AB}{AB} = \frac{AC}{DA}.$$

Từ đó chúng ta tính được $AD = AC.\frac{AB}{AB + BC}$.
Vậy $S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}AD.AE = \frac{1}{2}\frac{AB^2.AC^2}{(AB + BC)(AC + BC)}$.
Tương tự áp dụng *định lí đường phân giác trong góc C*, chúng ta có $AE = AB.\frac{AC}{AC + BC}$.
Do đó

$$\begin{aligned} S_{BCDE} = 2S_{BIC} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC - \frac{1}{2}\frac{AB^2.AC^2}{(AB + BC)(AC + BC)} = \frac{AB.AC}{AB + BC + CA} \\ &\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{aligned}$$

Điều này luôn đúng vì tam giác ABC vuông ở A. Vậy chúng ta có $S_{BCDE} = 2S_{BIC}$.
Bài toán 5 (Canada 2011) Cho tứ giác nột tiếp $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau, X là giao điểm của AB và CD; Y là giao điểm của AD và BC. Đường phân giác góc AXD lần lượt cắt AD, BC tại E, F; đường phân giác góc AYB lần lượt cắt AB, CD tại G, H. Chứng minh rằng tứ giác $AGHF$ là hình bình hành.
Chứng minh



Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên chúng ta có tam giác XAC đồng dạng tam giác XDB và tam giác YAC đồng dạng tam giác YBD. Từ đó chúng ta có

$$\frac{XA}{XD} = \frac{XC}{XB} = \frac{AC}{DB} = \frac{YA}{YB} = \frac{YC}{YD} \quad (5.1)$$

Áp dụng định lí đường phân giác góc AXD, chúng ta có

$$\frac{EA}{ED} = \frac{XA}{XD} = \frac{XC}{XB} = \frac{FC}{FB} \quad (5.2)$$

Mặt khác áp dụng định lí đường phân giác góc AYB, chúng ta có

$$\frac{GA}{GB} = \frac{YA}{YB} = \frac{YC}{YD} = \frac{CH}{HD} \quad (5.3)$$

Từ $(5.1), (5.2), (5.3)$, chúng ta có

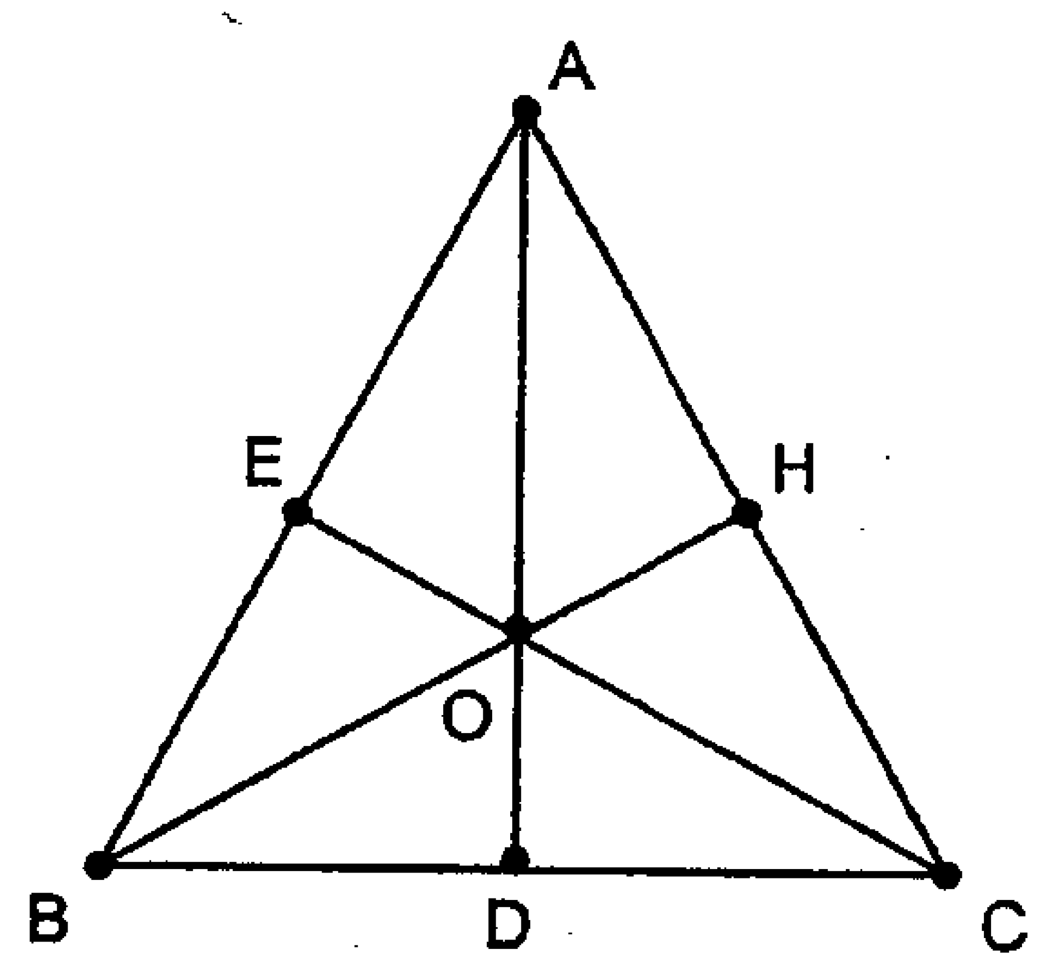
$$\frac{GA}{GB} = \frac{CF}{FB}; \quad \frac{EA}{ED} = \frac{CH}{HD}$$

Do đó chúng ta có $EH//AC//GF$ và $EG//BD//HF$. Vậy tứ giác $AGHF$ là hình bình hành.

Bài toán 6

Cho tam giác ABC có AD, BH lần lượt là đường phân giác góc A, đường cao hạ từ đỉnh B xuống cạnh AC, E là trung điểm AB. Giả sử các đường thẳng AD, BH, CE cắt nhau tại điểm O. Chứng minh rằng $AC.\cos A = BC.\cos C$.

Chứng minh



Áp dụng định lí Xeva, chúng ta có

$$\frac{AE}{EB}\frac{BD}{DC}\frac{CH}{HA} = 1. \quad (6.1)$$

Do E là trung điểm AB nên $EA = EB$, suy ra $\dfrac{AE}{EB} = 1 \quad (6.2)$.

Mặt khác áp dụng định lí đường phân giác góc BAC, chúng ta có

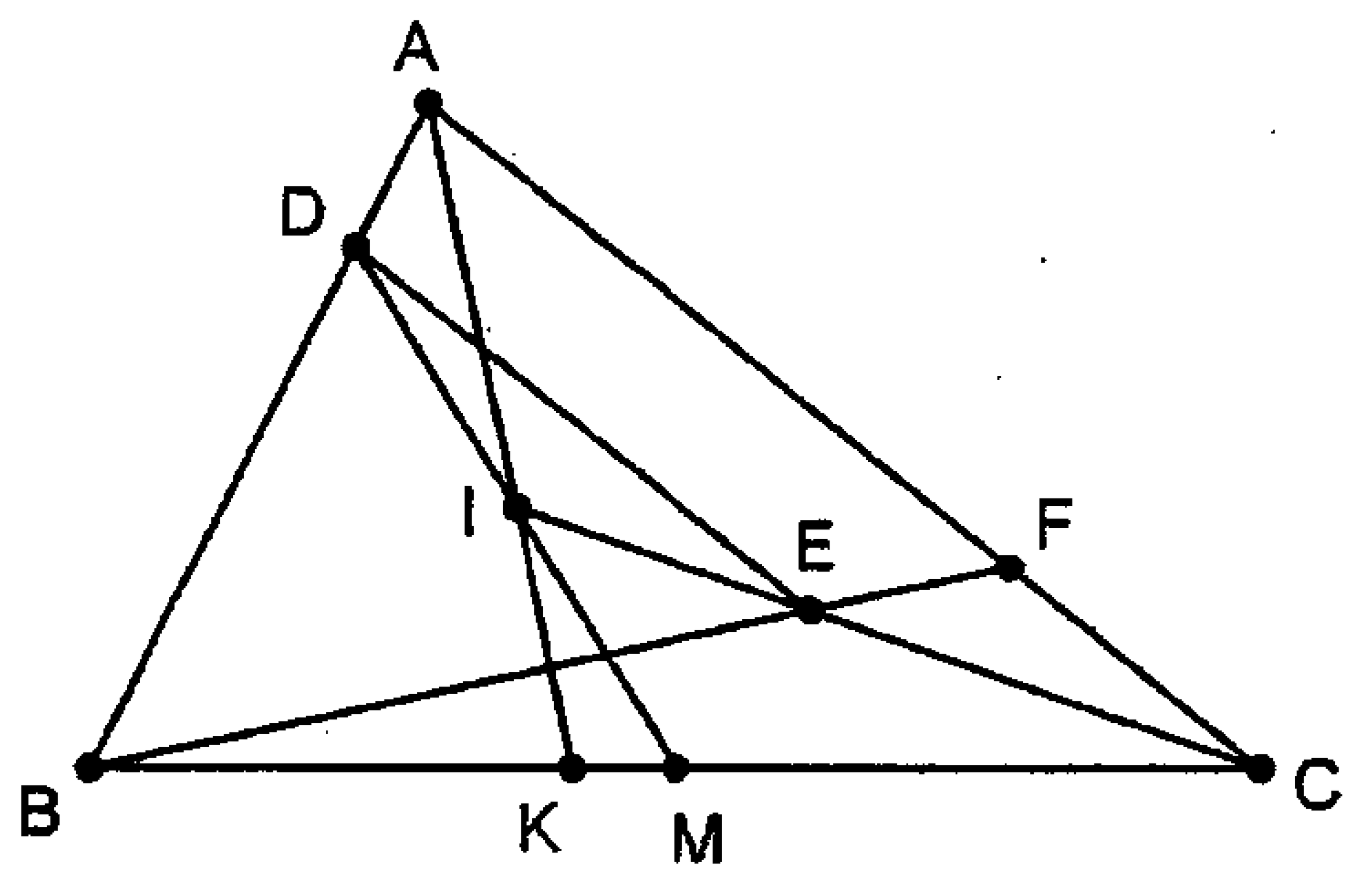
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (6.3)$$

Lại do $BH \perp AC$ nên chúng ta có $CH = BC.\cos C$ và $AH = AB.\cos A$. (6.4)
Thay (6.2), (6.3), (6.4) vào (6.1) chúng ta được

$$\frac{AB}{AC}\frac{BC.\cos C}{AB.\cos A} = 1 \Leftrightarrow AC.\cos A = BC.\cos C$$

Bài toán 7 (Crux problem 2915)
Cho tam giác ABC có $AB < AC$, I là tâm đường tròn nội tiếp và M là trung điểm cạnh BC. D là giao điểm của IM với AB. Một đường thẳng qua B vuông góc với AI và cắt CI ở E. Chứng minh $DE//AC$.

Chứng minh



Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi $K = AI \cap BC; F = BE \cap AC$.
Tam giác ABF có AI vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên tam giác ABF cân ở A, từ đó ta có $AB = AF = c$ nên $FC = b - c$
Tam giác ABC có IC là đường phân giác trong góc $\angle ACB$ nên EC là đường phân giác trong góc $\angle FCB$.
Áp dụng *định lí đường phân giác góc* $\angle FCB$ của tam giác FCB, chúng ta có

$$\frac{EB}{EF} = \frac{CB}{CF} = \frac{a}{b-c}. \qquad (7.1)$$

Áp dụng *định lí đường phân giác góc* $\angle BAC$ của tam giác ABC, chúng ta có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{KB}{KC} \Leftrightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC} \Leftrightarrow KB = AB.\frac{KC}{AC} = \frac{c(a-BK)}{b}.$$

Từ đó ta có

$$BK = \frac{ac}{b+c}.$$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác ABA', chúng ta có

$$\frac{MB}{MK}.\frac{IK}{IA}.\frac{DA}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{MB}{MK}.\frac{IK}{IA}$$

tức là

$$\frac{DB}{DA} = \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} - BK}\right).\frac{BK}{c} = \left(\frac{1}{1 - \frac{2c}{b+c}}\right)\left(\frac{a}{b+c}\right) = \frac{a}{b+c-2c} = \frac{a}{b-c} \qquad (7.2)$$

Từ (7.1) và (7.2), chúng ta có

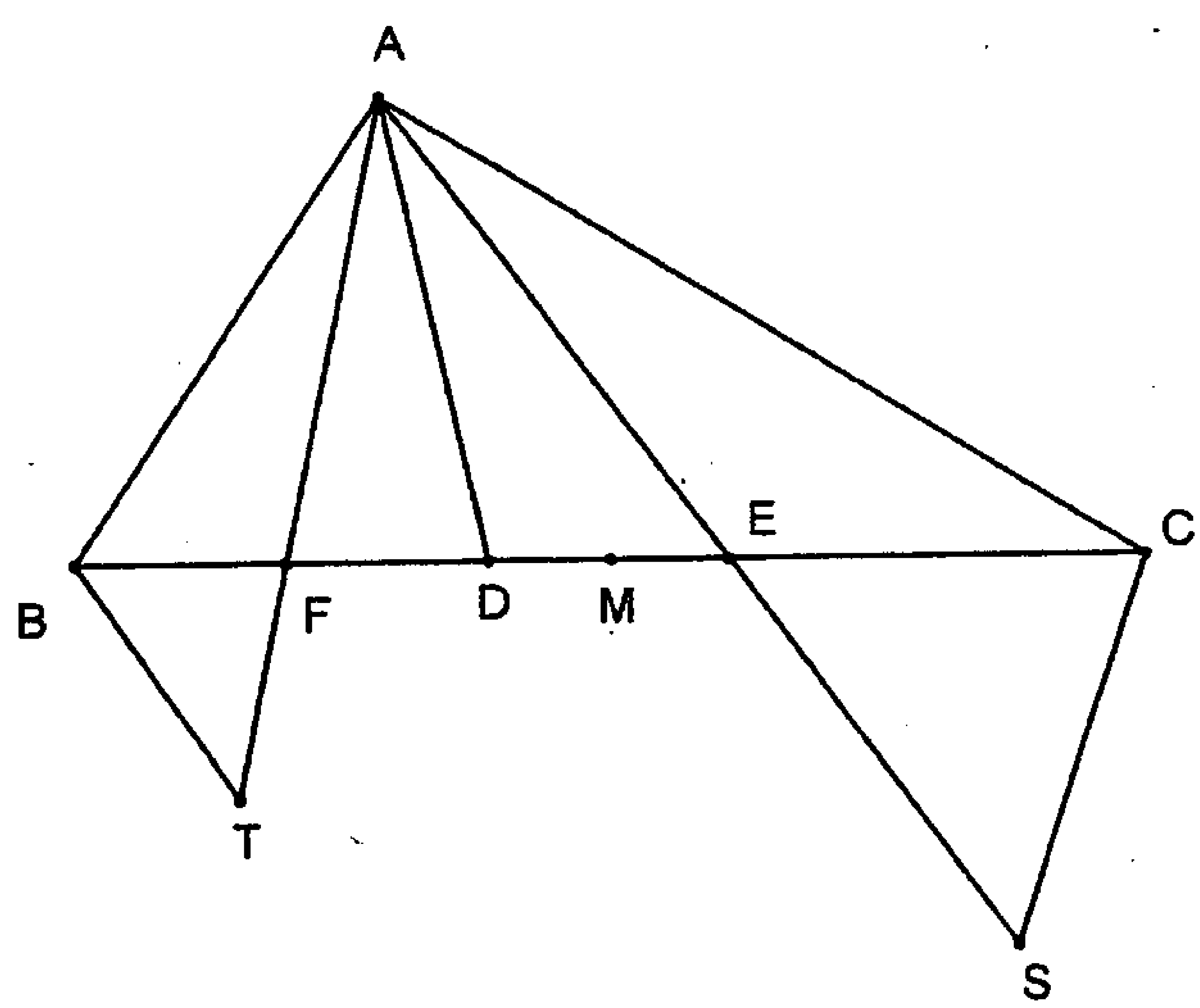
$$\frac{EB}{EF} = \frac{DB}{DA} = \frac{a}{b-c}.$$

Suy ra $DE//AC$. (Đpcm.)

Bài toán 8 (Crux)

Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD ($D \in BC$), M là trung điểm cạnh BC và E là điểm đối xứng với D qua M. Gọi F là điểm nằm trên BC sao cho $\angle BAF = \angle EAC$. Chứng minh rằng $\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{c^3}{b^3}$.

Chứng minh



Trên AE ta lấy điểm S và trên AF ta lấy điểm T sao cho $SC//AB$ và $TB//AC$. Khi đó ta có $\angle ABT + \angle BAC = 180^0$ và $\angle ACS + \angle BAC = 180^0$ nên $\angle ABT = \angle ACS$. Từ đó ta có $\angle BAT = \angle BAF = \angle CAE = \angle CAS$. Vì vậy tam giác ABT đồng dạng với tam giác ACS nên

$$\frac{BT}{CS} = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{c}. \quad (8.1)$$

Từ $BT//AC$, ta có

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BT}{AC} = \frac{BT}{b} \quad (8.2)$$

Từ $AB//SC$, ta có

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CS} = \frac{c}{CS}. \quad (8.3)$$

Theo giả thiết M là trung điểm BC, E là điểm đối xứng với D qua M nên ta có $EC = BD$ và $BE = DC$. Vì vậy

$$\frac{BE}{EC} = \frac{DC}{DB}.$$

Áp dụng *định lí đường phân giác trong* góc BAC, ta có

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Suy ra

$$\frac{BE}{EC} = \frac{b}{c}. \quad (8.4)$$

Từ (8.3) và (8.4), ta có

$$\frac{c}{CS} = \frac{b}{c} \quad \text{hay} \quad CS = \frac{c^2}{b}$$

vậy từ (8.1) ta có $BT = \frac{c^3}{b^2}$ và thay vào (8.2) ta có $\frac{BF}{FC} = \frac{c^3}{b^3}$ (Đpcm).

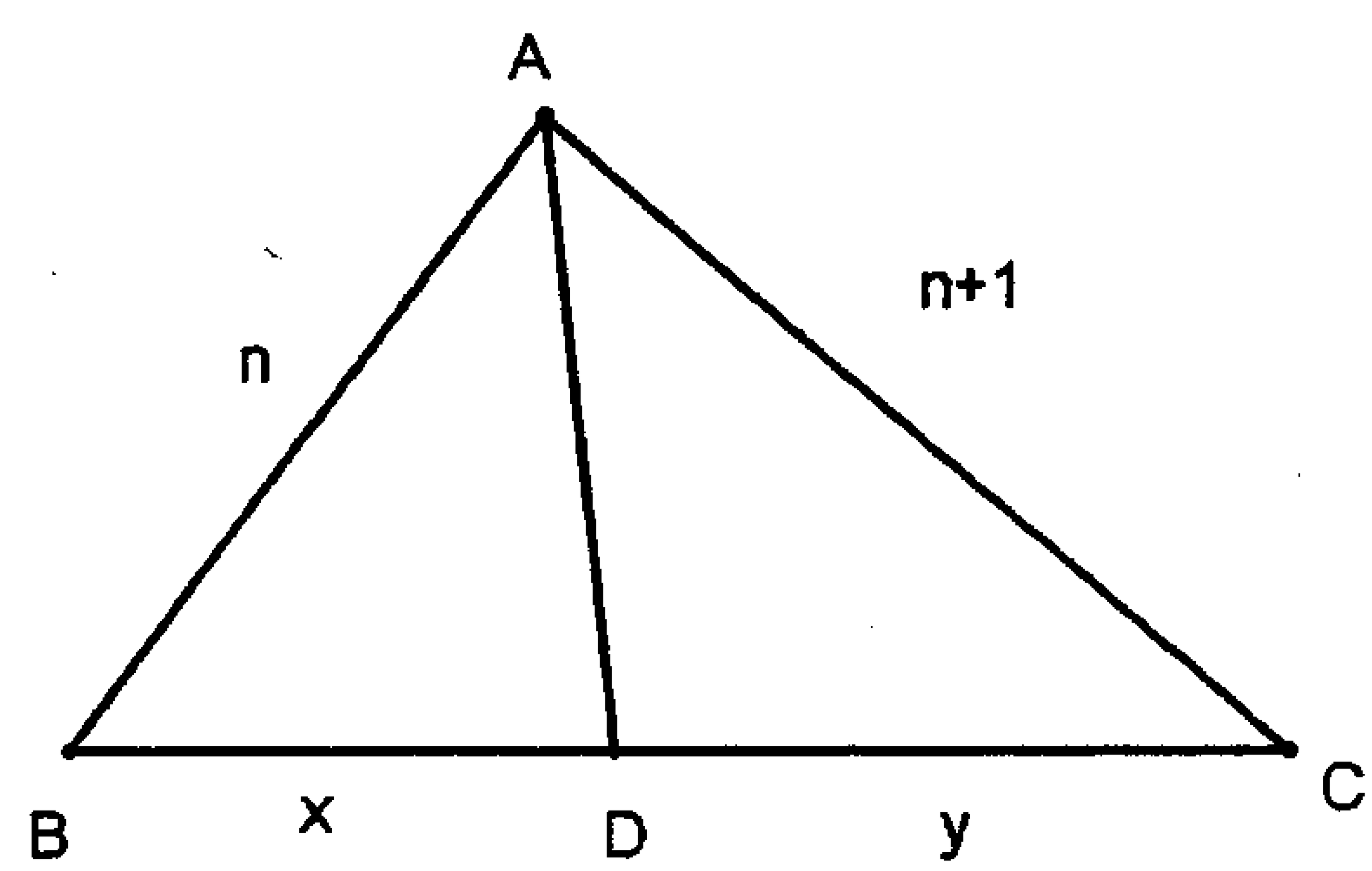
Bài toán 9

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) lần lượt lấy các điểm D, E, F và M, N, P lần lượt là các giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với các đường thẳng AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\frac{AD}{MD} + \frac{BE}{NE} + \frac{CF}{PF} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh



Trong tam giác ABC , để ý rằng $\frac{AD}{MD} = \frac{d(A, BC)}{d(M, BC)}$ mà $d(A, BC)$ không đổi nên phân số $\frac{AD}{MD} = \frac{d(A, BC)}{d(M, BC)}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi mẫu số $d(M, BC)$ lớn nhất hay M là trung điểm cung BC. Tương tự cho N, P lần lượt là trung điểm các dây cung CA, AB.

Do đó ta chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với AD, BE, CF là các đường phân giác.

Ta có $\angle MBD = \frac{\angle BAC}{2} = \angle MAB$ nên hai tam giác MBD và MAB đồng dạng, từ đó ta có

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{MD} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2.$$

Áp dụng *định lí đường phân giác* góc ABC, ta có $\frac{AB}{BD} = \frac{b+c}{a}$ Tương tự ta có $\frac{BC}{CE} = \frac{c+a}{b}; \frac{CA}{AF} = \frac{a+b}{c}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ ta có

$$\sum_{cyc} \frac{PA}{PD} = \sum_{cyc} \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} \frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} \frac{b+c}{a}\right)^2.$$

Ta có

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)^2 = \frac{1}{3}\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\right]^2 \geq \frac{1}{3}.36 = 12$$

Vậy

$$\frac{MA}{MD}+\frac{NB}{NE}+\frac{PC}{PF} \geq 12$$

tương đương

$$\frac{MA}{MD}-1+\frac{NB}{NE}-1+\frac{PC}{PF}-1 \geq 9$$

tương đương

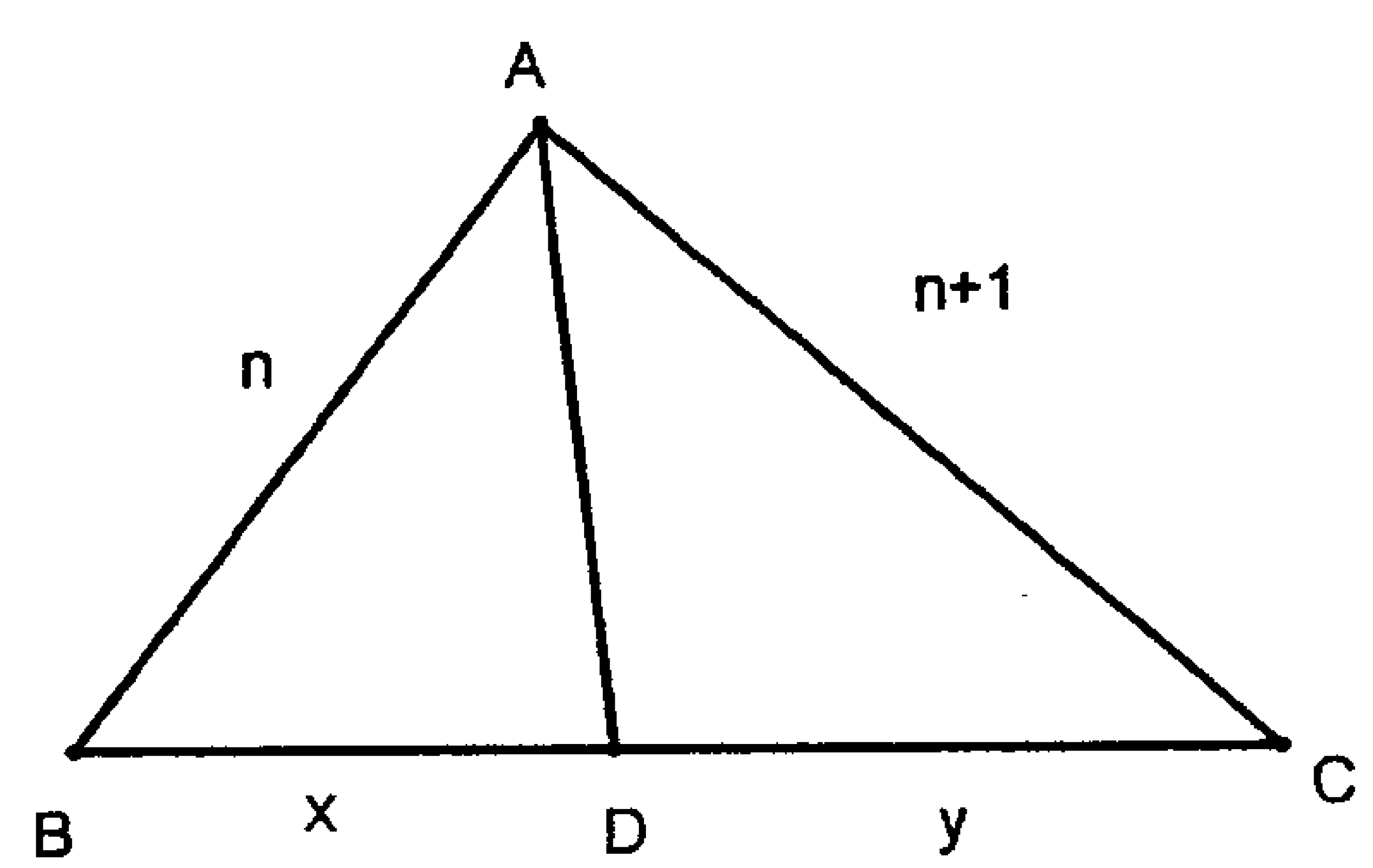
$$\frac{AD}{MD}+\frac{BE}{NE}+\frac{CF}{PF} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AD, BE, CF là các đường phân giác và tam giác ABC đều.

Bài toán 10 (Crux)

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là ba số nguyên dương liên tiếp. Số đo góc lớn nhất bằng hai lần số đo góc nhỏ nhất. Xác định độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Chứng minh



Trong tam giác ABC đặt độ dài các cạnh lần lượt là $AB = n, AC = n+1$ và $BC = n+2$ với $n \geq 2$ và n là số nguyên dương. Góc nhỏ nhất là $\angle ACB = \theta$ và góc lớn nhất là $\angle BAC = 2\theta$.

Kẻ AD là đương phân giác trong góc $\angle BAC$, $D \in BC$.

Đặt $BD = x, CD = y$. Để ý rằng $BC = AB + 2$. Do đó $x + y = n + 2$.

Áp dụng *định lí đường phân giác trong* góc BAC, ta có $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$ nên $\frac{n+1}{n} = \frac{y}{x}$.

Vậy ta có

$$\frac{n+1}{n}+1 = \frac{y}{x}+1$$

tương đương

$$\frac{2n+1}{n}=\frac{x+y}{x}=\frac{n+2}{x}.$$

Suy ra

$$x=\frac{n\left(n+2\right)}{2n+1},y=\frac{n+1}{n}x=\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2n+1}.$$

Mặt khác, ta có $\angle BAD=\angle BCA=\theta$ nên tam giác BAD đồng dạng tam giác BCA. Do đó ta có

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BA}{BC}\Leftrightarrow\frac{n\left(n+2\right)}{n\left(2n+1\right)}=\frac{n}{n+2}\Leftrightarrow\left(n+2\right)^2=n\left(2n+1\right)$$

Suy ra $n^2+4n+4=2n^2+n$ hay $n^2-3n-4=0$. Từ đó $n=4$ (Do n nguyên dương). Vậy độ dài các cạnh tam giác là $4,5$ và 6.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1 (Belarus 2000) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau ở M. Đường phân giác góc ACD cắt đoạn AB ở K. Giả sử $MA.MC+MA.CD=MB.MD$. Chứng minh rằng $\angle BKC=\angle CDB$.

Bài 2 (Rusian 1998) Cho tam giác ABC với $AB>BC$, BM là đường trung tuyến và BL là đường phân giác. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BL tại D, đường thẳng qua L song song với BC cắt BM tại E. Chứng minh rằng $ED\perp BL$.

Bài 3 (Kazakhtan 2009) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng AD và BC cắt nhau tại M, đường thẳng AB cắt CD tại N, và đường thẳng AC cắt BD tại P, đường thẳng OP cắt MN tại K. Chứng minh rằng $\angle AKP=\angle PKC$.

Bài 4 Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh AB, và CD là đường cao, $(D\in AB)$. Chứng minh rằng $\angle A=2\angle B$ khi và chỉ khi $AC=2MD$.

Bài 5 (Ibero American 2012 - Problem 5)

Cho tam giác ABC có P và Q lần lượt là các giao điểm của các đường qua A song song với BCvà cắt các đường phân giác ngoài của các góc B và C, tương ứng. Đường thẳng vuông góc với BP tại P và đường thẳng vuông góc với CQ tại Q cắt nhau tại R. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AI=AR$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Titu Andreescu, Zuming FengProblems and Solutions From Around the World 1995–2001
.

[2] Vikto Prasolov, Problems in Plane and Solid Geometry.

[3] Tạp chí toán học tuổi trẻ.

[4] Tạp chí Crux mathematicorum .

[5] Một số đề thi các nước trên mạng internet.