

**I. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA**

**Vấn đề 1:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho  $HA = 2HB$ . Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a. (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối A, A<sub>1</sub> năm 2012.)

**Lời giải:** Cách 1 (Phương pháp phổ biến):

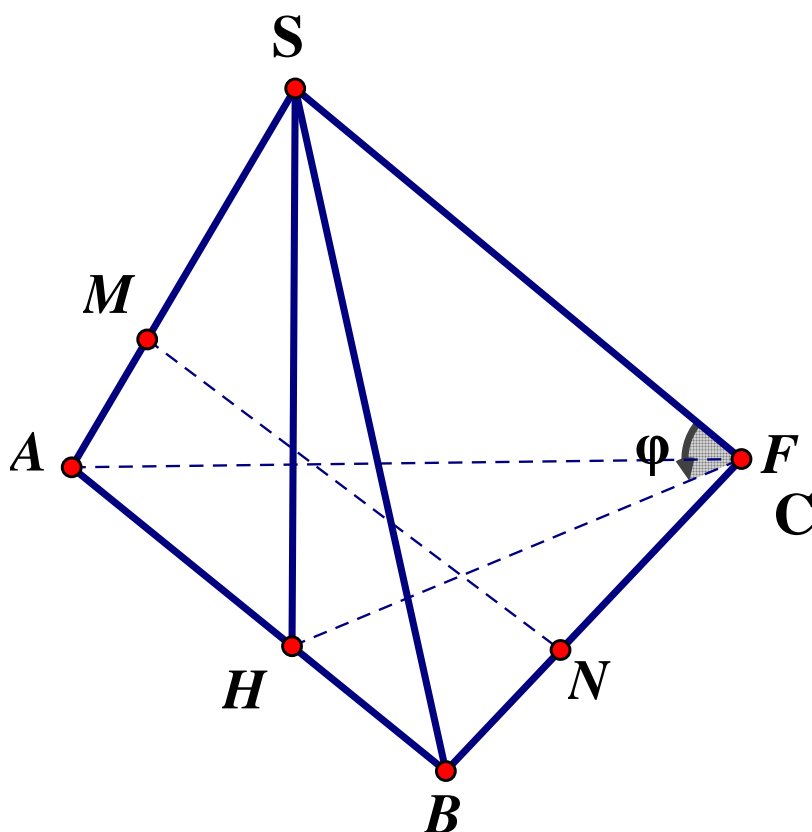
Sử dụng định lý cosin trong  $\triangle AHC$  ta tính được đoạn HC:

$$HC^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{4a^2}{9} + a^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9}$$

Từ đó ta có:  $HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$ . Mặt khác HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC) nên  $[SC, (\widehat{ABC})] = \widehat{SCH} = 60^\circ$

$$\Rightarrow SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}. \text{ Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

Cách 2 (Phương pháp vector): Đặt  $\vec{BC} = \vec{a}$ ,  $\vec{BA} = \vec{b}$ ,  $\vec{SH} = \vec{c}$ . Hiển nhiên:  $BC = BA = |\vec{a}| = |\vec{b}| = a$  và  $SH = |\vec{c}|$ .



Lập luận như cách trên ta có:  $(\vec{SC}; \vec{HC}) = 60^\circ$ . Ta sẽ biểu diễn lần lượt các  $\vec{SC}$  và  $\vec{HC}$  theo các  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .  
 $\vec{SC} = \vec{SH} + \vec{HC} = \vec{SC} + \vec{BC} - \vec{BH} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$ . Còn  $\vec{HC} = \vec{BC} - \vec{BH} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos(\widehat{\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{HC}}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{HC}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})}{|\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}| \cdot |\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})^2}{|\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}| \cdot |\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}|} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{|\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}|}{|\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}|} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})^2 = (\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c})^2 \Leftrightarrow 4(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})^2 = (\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})^2 + c^2 + 2(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})\vec{c} \\ \Leftrightarrow 3(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})^2 &= c^2 \Leftrightarrow 3(a^2 + \frac{1}{9}b^2 - \frac{2}{3}\vec{a}\vec{b}) = c^2 \Leftrightarrow 3(a^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a.a) = c^2 \Leftrightarrow \frac{7a^2}{3} = c^2 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}. \text{ Từ đó tính được } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot |\vec{c}| \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}. \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Mình không khuyến khích các bạn dùng cách này để tính một câu thể tích rất dễ như thế kia có thể giải bằng cách rất thông dụng. Mình giải như thế chỉ để làm rõ phương pháp của chủ đề này cho các bạn hiểu. Nhưng đến câu hỏi tính khoảng cách thì phương pháp này lại rất khả thi trong việc xác định đoạn vuông góc chung và độ dài khoảng cách giữa 2 đường thẳng.

Ta dễ dàng biểu diễn được các vector:  $\overrightarrow{SA} = \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}$  và  $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$

Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên SA và BC thỏa:  $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{SA} = \frac{2x}{3}\vec{b} + x\vec{c}$  và  $\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC} = y\vec{a}$ .

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BN} = \frac{-2x}{3}\vec{b} - x\vec{c} + \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} + y\vec{a} = y\vec{a} - \frac{1}{3}(2x+1)\vec{b} + (1-x)\vec{c} \quad (1)$$

$$\text{Để MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC thì: } \begin{cases} MN \perp SA \\ MN \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{3}\vec{a}\vec{b} - \frac{2}{9}(2x+1)b^2 + (1-x)c^2 = 0 \\ ya^2 - \frac{1}{3}(2x+1)\vec{a}\vec{b} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{3} \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{2}{9}(2x+1)a^2 + (1-x) \cdot \frac{7a^2}{3} = 0 \\ ya^2 - \frac{1}{3}(2x+1) \cdot \frac{a^2}{2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}(1-x) - \frac{2}{9}(2x+1) + \frac{y}{3} = 0 \\ -\frac{1}{6}(2x+1) + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x - \frac{2}{3}(2x+1) + y = -7 \\ -2x + 6y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{25}{3}x + y = \frac{-19}{3} \\ -2x + 6y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{16} \\ y = \frac{7}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay  $x, y$  vào phương trình (1) ta thu được:  $\overrightarrow{MN} = \frac{7}{16}\vec{a} - \frac{7}{8}\vec{b} + \frac{3}{16}\vec{c}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MN &= |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(\frac{7}{16})^2 \cdot a^2 + (\frac{7}{8})^2 \cdot b^2 + (\frac{3}{16})^2 \cdot c^2 - 2\vec{a}\vec{b} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{8}} = \sqrt{(\frac{7}{16})^2 \cdot a^2 + (\frac{7}{8})^2 \cdot a^2 + (\frac{3}{16})^2 \cdot \frac{7}{3} \cdot a^2 - 2 \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{8} \cdot a^2} \\ &= \frac{a\sqrt{42}}{8}. \end{aligned}$$

Các bạn có thể giải câu khoảng cách bằng cách sử dụng tỉ số đường cao hoặc công thức  $h = \frac{3V}{S}$  bằng cách qua A dựng một đường thẳng song song với BC.

**Nhận xét:** Cách này cho ta thấy được chính xác vị trí của các điểm M, N nằm trên cạnh SA và BC. Nên đường vuông góc chung hoàn toàn được xác định. Một lợi thế nữa của phương pháp này so với phương pháp tọa độ là ta không cần phải sử dụng 3 trục vuông góc từng đôi một và xuất phát từ một điểm như hệ trục Decartes mà chỉ cần biết rõ góc giữa các vector. Ta cần phải chọn bộ 3 các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vừa có thể biểu diễn được hoành độ và tung độ của mặt phẳng đáy và cao độ của chiều cao từ đỉnh. Ưu tiên chọn các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có các góc đẹp giữa các vector như  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  và đặc biệt là  $90^\circ$ .

**Lưu ý:** Không chọn 3 vector cùng nằm trong cùng một mặt phẳng hoặc có ít nhất 2 vector nằm cùng phương với nhau.

**Vấn đề 2:** Cho hình chóp S.AB có đáy là tam giác vuông cân tại B,  $AB = BC = 2a$ . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a. (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối A năm 2011.)

**Lời giải:**

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC)$$

Đối với bài này ta chọn hệ vector như sau: Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{SA} = \vec{c}$ . Hiển nhiên ta có:  $BA = BC = |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2a$

Lưu ý: Các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đôi một vuông góc nhau nên tích vô hướng giữa chúng hiển nhiên bằng 0 việc chọn như thế sẽ dễ dàng cho việc tính toán.

Để xác định góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) ta làm như sau:  $(SBC) \cap (ABC) = BC$ . Mặt khác:

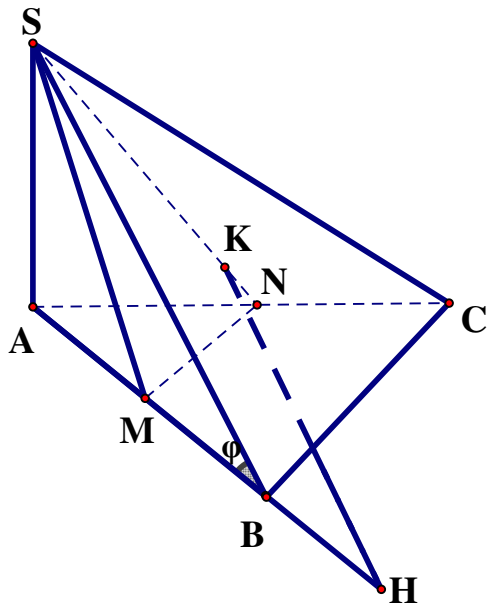
$$\begin{cases} AB \in (ABC), AB \perp BC(gt) \\ BC \perp SB(BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow [(\widehat{SBC}); (\widehat{ABC})] = (\widehat{AB}; \widehat{SB}) = \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Từ đó tính được  $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a \Rightarrow c^2 = 3a^2 = 3b^2$  (với  $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}a$ )

Dễ thấy tứ giác  $BMNC$  là hình thang vuông nên ta có  $S_{BMNC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot (MN + BC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a + 2a) = \frac{3a^2}{2}$

$$V_{SBMNC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{BMNC} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}a \cdot \frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$$

Để tính khoảng cách giữa  $AB$  và  $SN$  ta sẽ biểu diễn các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SN}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .



$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$$

Gọi các điểm  $H \in AB$  và  $K \in SN$  sao cho:  $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} = x\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{SK} = y\overrightarrow{SN} = -\frac{y}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + y\vec{c}$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SN} = -x\vec{a} - \vec{c} - \frac{y}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + y\vec{c} = -(x + \frac{y}{2})\vec{a} + \frac{y}{2}\vec{b} + (y - 1)\vec{c}$$

Để HK là đoạn vuông góc chung của AB và SN thì:  $\begin{cases} HK \perp AB \\ HK \perp SN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{SN} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}(x + \frac{y}{2})a^2 + \frac{y}{4}b^2 + (y - 1)c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}(x + \frac{y}{2}) + \frac{y}{4} + 3(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{7y}{2} = 3 \end{cases}$$

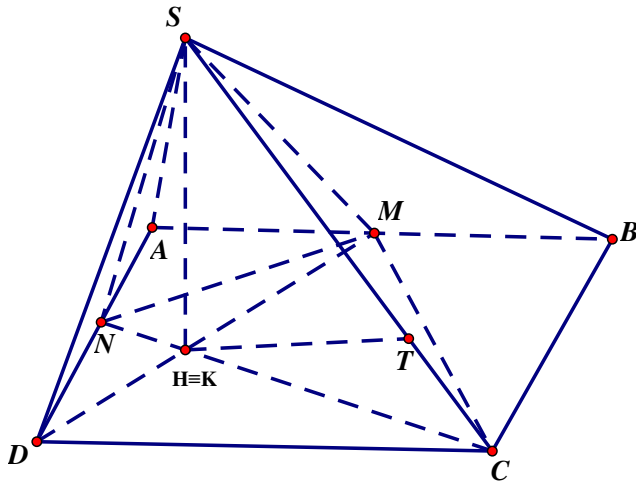
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{13} \\ y = \frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \frac{6}{13}\vec{b} - \frac{1}{13}\vec{c}$$

$$\Rightarrow HK = |\overrightarrow{HK}| = \sqrt{(\frac{6}{13}\vec{b} - \frac{1}{13}\vec{c})^2} = \sqrt{(\frac{6}{13})^2 + 3(\frac{-1}{13})^2} |\vec{b}| = \frac{2\sqrt{39}a}{13}.$$

**Vấn đề 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và  $SH = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a. (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối A năm 2010.)

**Lời giải:** Dễ thấy:  $S_{CDNM} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{BMC} = a^2 - \frac{1}{2}.AM.AN - \frac{1}{2}.BM.BC = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$

Từ đó tính được:  $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}.SH.S_{CDNM} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$



Đặt  $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DN} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{SH} = \vec{c}$ . Hiển nhiên ta có:  $AM = DN = |\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{a}{2}$ ,  $SC = |\vec{c}| = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow c^2 = 12a^2 = 12b^2$ . Ta có:  $\overrightarrow{DM} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CN} = -2\vec{a} + \vec{b}$ . Đến đây ta sẽ biểu diễn lần lượt  $\overrightarrow{DM}$ ,  $\overrightarrow{SC}$  theo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

Nhưng để làm được điều đó ta phải xác định được vị trí điểm H mới có thể biểu diễn được  $\overrightarrow{DH}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  từ đó biểu diễn  $\overrightarrow{DM}$ ,  $\overrightarrow{SC}$ .

Cách xác định điểm H như sau: Đặt  $\overrightarrow{DH} = u(\vec{a} + 2\vec{b})$ ,  $\overrightarrow{CH} = v(-2\vec{a} + \vec{b})$

$$\overrightarrow{HH} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH} = -u(\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{a} + v(-2\vec{a} + \vec{b}) = -(u + 2v - 2)\vec{a} + (-2u + v)\vec{b}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HH} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v - 2 = 0 \\ -2u + v = 0 \end{cases} \quad (\text{Do } \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương ngược hướng})$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{2}{5}, v = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{DH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DM} \text{ và } \overrightarrow{CH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CN}$$

$$\text{Từ đó } \overrightarrow{DM} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HC} = \vec{c} - \frac{4}{5}(-2\vec{a} + \vec{b}) = \frac{4}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\text{Gọi các điểm } K \in DM \text{ và } T \in SC \text{ sao cho: } \overrightarrow{DK} = x\overrightarrow{DM} = x(\vec{a} + 2\vec{b}), \overrightarrow{ST} = y\overrightarrow{SC} = \frac{4y}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) + y\vec{c}$$

$$\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HS} + \overrightarrow{ST} = -x(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{5}(\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{c} + \frac{4y}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) + y\vec{c}$$

$$= (-x + \frac{8y}{5} + \frac{2}{5})\vec{a} + (-2x - \frac{4y}{5} + \frac{4}{5})\vec{b} + (y - 1)\vec{c} \quad (1)$$

Để KT là đoạn vuông góc chung của DM và SC thì:  $\begin{cases} KT \perp DM \\ KT \perp SC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{KT} \cdot \vec{DM} = 0 \\ \vec{KT} \cdot \vec{SC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{8y}{5} + \frac{2}{5} + 2(-2x - \frac{4y}{5} + \frac{4}{5}) = 0 \\ \frac{8}{5}(-x + \frac{8y}{5}) + \frac{-4y}{5}(-2x - \frac{4y}{5} + \frac{4}{5}) + 12(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2 = 0 \\ \frac{76y}{5} - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{15}{19} \end{cases} \Rightarrow \vec{KT} = \frac{24}{19}\vec{a} - \frac{12}{19}\vec{b} - \frac{4}{19}\vec{c} \text{ (Thay x,y vào (1))}$$

$$\text{Suy ra } KT = |\vec{KT}| = \sqrt{(\frac{24}{19}\vec{a} - \frac{12}{19}\vec{b} - \frac{4}{19}\vec{c})^2} = \sqrt{(\frac{24}{19})^2 + (\frac{-12}{19})^2 + 12 \cdot (\frac{-4}{19})^2} \cdot |\vec{a}|$$

$$= \frac{4\sqrt{57}}{19} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{57}a}{19}$$

**Nhận xét:** Từ  $x = \frac{2}{5}$  ta có thể thấy được điểm K mà ta giả định trùng với điểm H. Từ đó thấy được đoạn vuông góc chung cũng chính là đoạn HT.

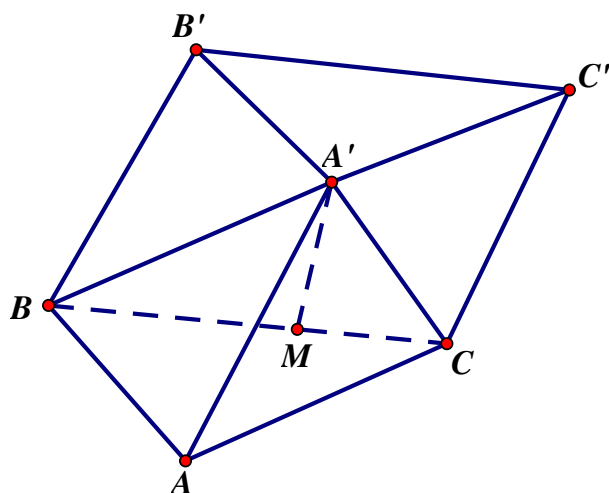
Các bạn nên hiểu rõ rằng phương pháp tính **độ dài vector** trong các vấn đề trên hoàn toàn xuất phát từ **định lý cosin trong tam giác** chứ không có gì mới lạ cả. Ngoài ra phương pháp vector cũng rất hiệu quả trong các trường hợp tính góc. Ta hãy xét các vấn đề tiếp theo để hiểu rõ phương pháp.

**Vấn đề 4:** Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đây là tam giác vuông có AB = a, AC = a√3. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a đường cao khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA", B'C'. (Trích đề thi đại học môn toán khối A năm 2008)

**Lời giải:**

Gọi M là trung điểm của BC theo giả thiết  $A'M \perp (ABC)$ . Ta chọn các vector như sau:  $\vec{A'B'} = \vec{a}$ ,  $\vec{A'C'} = \vec{b}$ ,  $\vec{A'M} = \vec{c}$  (Đây là bộ ba vector đôi một vuông góc nhau nên tích vô hướng giữa chúng sẽ bằng 0)

Từ đó có được  $A'B' = |\vec{a}| = a$ ,  $A'C' = |\vec{b}| = a\sqrt{3}$ ,  $A'M = |\vec{c}|$ .



Ta có:  $\overrightarrow{A'A'} = \overrightarrow{A'M} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ . Mặt khác  $AA' = 2a$  nên  $AA'^2 = 4a^2$   
 $\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}\right]^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})^2 + c^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + c^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(a^2 + 3a^2) + c^2 = 4a^2$   
 $\Leftrightarrow c^2 = 3a^2$  hay  $AM' = |\vec{c}| = a\sqrt{3}$

Để tính cosin góc giữa  $AA', B'C'$  ta sẽ sử dụng công thức:  $\cos(\widehat{AA'B'C'}) = \left| \cos(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{B'C'}}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'C'}|}{|\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{B'C'}|}$ .

Ta sẽ biểu diễn  $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{B'C'}$  theo các  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Ta có:  $\overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \overrightarrow{B'C'} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}b^2 = -a^2$$

$$AA' = |\overrightarrow{AA'}| = 2a. B'C' = |\overrightarrow{B'C'}| = \sqrt{(\vec{b} - \vec{a})^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{AA'B'C'}) = \left| \cos(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{B'C'}}) \right| = \frac{|-a^2|}{4a^2} = \frac{1}{4}.$$

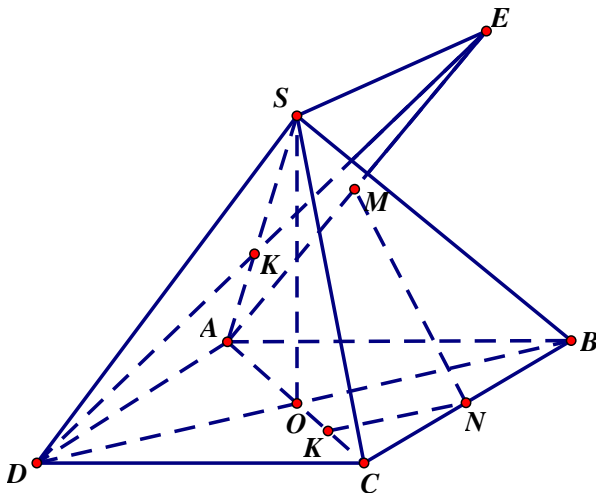
Lưu ý: Đối với 1 số bài toán có hình vẽ phức tạp yêu cầu chứng minh quan hệ vuông góc thì phương pháp này cũng tỏ ra rất hiệu quả.

**Vấn đề 5:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo (a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC. (Trích đề thi đại học môn toán khối B năm 2007)

**Lời giải:**

Gọi O là tâm hình vuông, K là trung điểm SA theo giả thiết ta có:  $SO \perp (ABCD)$ . Do K vừa là trung điểm SA vừa là trung điểm DE nên tứ giác ADSE là hình bình hành.  $\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})$ . Và  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})$ .

Ta sẽ chọn hệ vector như sau:  $\overrightarrow{OC} = \vec{a}, \overrightarrow{OD} = \vec{b}, \overrightarrow{SO} = \vec{c}$ . Ta sẽ lần lượt biểu diễn  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}$  theo các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



Ta có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(3\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(3\vec{a} + \vec{c})$ . Và  $\overrightarrow{BD} = 2\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{b}(3\vec{a} + \vec{c}) = 0$  (Do các vector

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vuông góc từng đôi một nên tích vô hướng giữa chúng sẽ bằng 0)

Để tìm và tính đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng MN và AC ta làm như sau:

Gọi các điểm  $H \in MN$  và  $K \in AC$  sao cho:  $\overrightarrow{MH} = x\overrightarrow{MN} = \frac{x}{2}(3\vec{a} + \vec{c})$ ,  $\overrightarrow{AK} = y\overrightarrow{AC} = 2y\vec{a}$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{x}{2}(3\vec{a} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + 2y\vec{a} = \frac{1}{2}(-3x + 4y)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}(x-1)\vec{c} \quad (1)$$

Để HK là đoạn vuông góc chung của MN và AC thì: 
$$\begin{cases} HK \perp MN \\ HK \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}(-3x + 4y)a^2 - \frac{1}{4}(x-1)c^2 = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{b} \quad (\text{Thay vào (1)})$$

$$\Rightarrow HK = |\overrightarrow{HK}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Nhận xét: Từ hệ phương trình trên ta có thể giải ra và thấy  $x = 1$  nghĩa là điểm  $H \equiv N$ ,  $y = \frac{3}{4}$  nên điểm K là trung điểm của đoạn OC. Dễ dàng thấy được đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng MN và AC là NK.

Lưu ý: Ngoài ra nếu gặp câu hỏi về khoảng cách từ điểm tới mặt ta có thể dựng một mặt phẳng song song rồi chuyển về tìm đoạn vuông góc chung giữa hai đoạn thẳng bằng phương pháp trên. Một cách làm nghe có vẻ "ngược đời" nhưng hoàn toàn có thể thực hiện được bằng phương pháp trên. Ta xét tiếp các vấn đề kế tiếp sẽ thấy rõ hiệu quả.

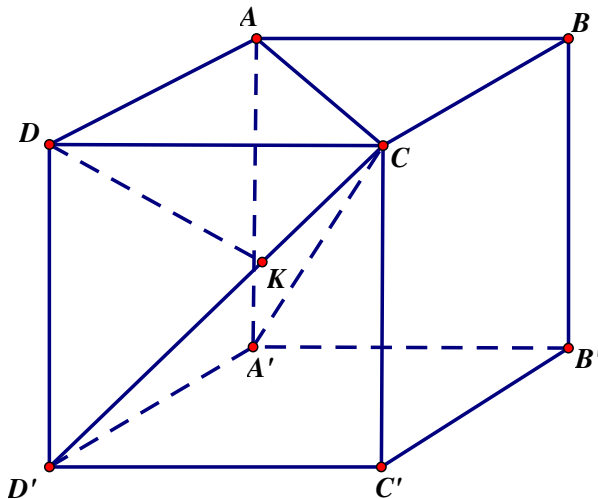
**Vấn đề 6:** Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C=a. Tính thể tích của khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a. (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối D năm 2012.)

Lời giải:

Do  $\triangle AA'C$  vuông cân tại A nên ta tính được:  $AA' = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  và cạnh của hình vuông  $AB = \frac{a}{2}$

Theo đề bài  $AB \perp BB'$  và  $AB \perp BC$  nên dễ dàng suy ra được:  $AB \perp (BB'C'C)$ .

$$\text{Suy ra: } V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{\triangle BB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$$



Để tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') ta có thể tính khoảng cách giữa hai đường AD và CD' (vì

$(AD \parallel (BCD'))$ .

Ta chọn hệ vector như sau:  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$  với  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{a}{2}$ ,  $|\vec{c}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Hay  $c^2 = 2|\vec{a}|^2$ .

Ta có:  $\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \vec{a} + \vec{c}$ .

Gọi các điểm  $H \in AD$  và  $K \in CD'$  sao cho:  $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AD} = x\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CK} = y\overrightarrow{CD'} = y(\vec{a} + \vec{c})$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -x\vec{b} + \vec{b} - \vec{a} + y(\vec{a} + \vec{c}) = (y-1)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} \quad (1)$$

Để HK là đoạn vuông góc chung của AD và CD' thì: 
$$\begin{cases} HK \perp AC \\ HK \perp CD' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ y-1+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{c}) \text{ (thế x, y vào từ (1))}$$

$$\Rightarrow HK = |\overrightarrow{HK}| = \frac{1}{3}\sqrt{(-2\vec{a} + \vec{c})^2} = \frac{1}{3} \cdot |\vec{a}| \cdot \sqrt{4+2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d[A; (BCD')] = HK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Nhận xét: Từ hệ trên ta thấy ngay điểm  $H \equiv D$  nên đoạn vuông góc chung của AD và CD' là đoạn DK cũng chính là đường cao kẻ từ đỉnh D trong  $\triangle CDD'$ .

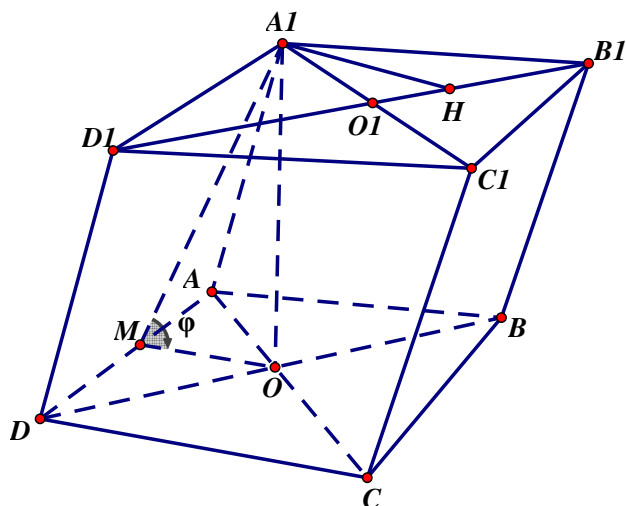
**Vấn đề 7:** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có đáy ABCD là hình chữ nhật.  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A_1$  trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng  $(ADD_1A_1)$  và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm  $B_1$  đến mặt phẳng  $(A_1BD)$  theo a. (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối B năm 2011.)

**Lời giải:**

Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD và M là trung điểm AD ta dễ dàng chứng minh được:  $A_1O \perp (ABCD)$ ,  $OM \perp AD$  và  $A_1M \perp AD$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ADD_1A_1)$  và (ABCD) là  $(\widehat{A_1M}; \widehat{OM}) = \widehat{A_1MO} = 60^\circ$ .

$$\Rightarrow A_1O = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}.$$

Để tính khoảng cách từ điểm  $B_1$  đến mặt phẳng  $(A_1BD)$  ta có thể chuyển về tính khoảng cách giữa hai đường thẳng





$B_1D_1$  và  $A_1B$  (vì  $B_1D_1 \parallel (A_1BD)$ ).

Ta chọn hệ vector như sau:  $\overrightarrow{OD} = \vec{a}, \overrightarrow{B_1A_1} = \vec{b}, \overrightarrow{A_1O} = \vec{c}$  với  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a, |\vec{c}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Hay  $c^2 = \frac{3}{4}|\vec{a}|^2$ .

Dễ thấy  $\widehat{A_1B_1D_1} = 60^\circ$  nên suy ra  $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 60^\circ$  từ đó lưu ý rằng  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}a^2$

Ta có:  $\overrightarrow{B_1D_1} = 2\vec{a}$  và  $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{c}$

Gọi các điểm  $H \in B_1D_1$  và  $K \in A_1B$  sao cho:  $\overrightarrow{B_1H} = x\overrightarrow{B_1D_1} = 2x\vec{a}, \overrightarrow{A_1K} = y\overrightarrow{A_1B} = y(-\vec{a} + \vec{c})$

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1K} = -2x\vec{a} + \vec{b} + y(-\vec{a} + \vec{c}) = -(2x + y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$  (1)

Để HK là đoạn vuông góc chung của  $B_1D_1$  và  $A_1B$  thì:  $\begin{cases} HK \perp B_1D_1 \\ HK \perp A_1B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(2x + y)a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2x + y)a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + yc^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2x + y) + 1 = 0 \\ 2x + y - \frac{1}{2} + \frac{3y}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x + \frac{7y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$

Thay  $x, y$  vào (1) ta được:  $\overrightarrow{HK} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow HK = |\overrightarrow{HK}| = \sqrt{(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 - \frac{1}{2}a^2}$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d[B_1; (A_1BD)] = HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

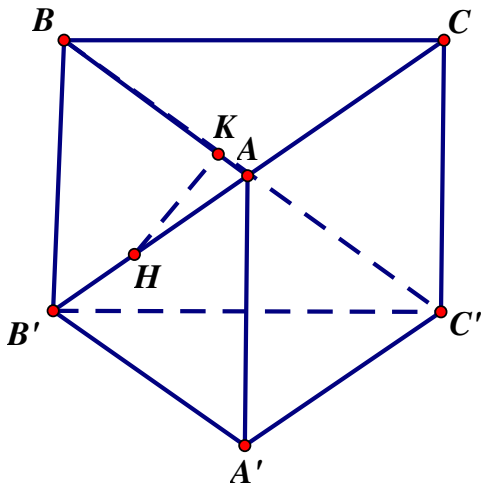
*Nhận xét:* Từ hệ trên ta có thể thấy được điểm  $H$  là trung điểm của đoạn  $O_1B_1$  (với  $O_1$  là tâm của hình chữ nhật  $A_1B_1C_1D_1$  và  $K \equiv A_1$  nên đoạn vuông góc chung tìm được ở đây là đoạn  $A_1H$ ).

Để tổng kết phương pháp ta sẽ đi đến vấn đề cuối cùng và sau đó là một vài **bài tập tự luyện** để các bạn có thể hiểu và nắm chắc phương pháp này.

**Vấn đề 8:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$ . Cạnh đáy có độ dài là  $a$ , biết góc giữa 2 đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  là  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  theo  $a$ .

**Lời giải:**

Để xử lý dữ kiện góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  ta sẽ sử dụng công thức:  $\cos(\widehat{AB''; BC'}) = \left| \cos(\widehat{AB''; BC'}) \right| =$



$$\frac{|\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{1}{2}.$$

Ta chọn hệ vector như sau:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$  và  $AB = AC = |\vec{a}| = |\vec{b}| = a$

Để ý rằng  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ . Do  $\vec{c}$  vuông với 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$  nên tích vô hướng của  $\vec{c}$  đối với hai vector này đều bằng 0.

Ta biểu diễn  $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}$  theo các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Dễ thấy  $\overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{c}$  và  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = -a^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + c^2 = -\frac{a^2}{2} + c^2. \quad |\overrightarrow{AB'}| = \sqrt{a^2 + c^2}. \quad |\overrightarrow{BC'}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{AB'; BC'}) = \left| \cos(\widehat{\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{BC'}}) \right| = \frac{\left| c^2 - \frac{a^2}{2} \right|}{a^2 + c^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0 \text{ (loại) hoặc } c^2 = 2a^2 \Rightarrow |\vec{c}| = a\sqrt{2}$$

$$\text{Từ đó ta có: } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$$

Để tìm và tính đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  ta làm như sau:

Gọi các điểm  $H \in AB'$  và  $K \in BC'$  sao cho:  $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB'} = x(\vec{a} + \vec{c})$ ,  $\overrightarrow{BK} = y\overrightarrow{BC'} = y(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = -x(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} + y(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -(x+y-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c} \quad (1)$$

$$\text{Để HK là đoạn vuông góc chung của } AB' \text{ và } BC' \text{ thì: } \begin{cases} HK \perp AB' \\ HK \perp BC' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+y-1)a^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot y + (y-x)c^2 = 0 \\ (x+y-1)a^2 + yb^2 + (y-x)c^2 - (x+2y-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+y-1) + \frac{1}{2}y + 2(y-x) = 0 \\ (x+y-1) + y + 2(y-x) - \frac{1}{2}(x+2y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + \frac{3}{2}y = -1 \\ -\frac{3}{2}x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\text{Thay } x, y \text{ vào (1) ta có: } \overrightarrow{HK} = \frac{1}{9}(4\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow HK = |\overrightarrow{HK}| = \frac{1}{9}\sqrt{(4\vec{b} - \vec{c})^2} = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{16b^2 + c^2} = \frac{1}{9}|\vec{b}| \cdot \sqrt{16+2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

**TỔNG KẾT:** Qua các ví dụ trên mình muốn cho các bạn thấy rằng một bài toán hình học không gian có thể được giải bằng nhiều cách từ đó các bạn có thể chọn được phương pháp giải phù hợp đề bài trong mỗi trường hợp cụ thể. Chúc các bạn ôn thi có kết quả cao và ***nắm chắc được 1 điểm phần hình học không gian trong đề thi Đại Học sắp tới năm 2013.*** Sau cùng là một vài bài tập cho các bạn tự luyện để đánh giá mức độ nhận biết.

## II. CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Tự luyện 1:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông,  $AB = BC = a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính theo  $a$  thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM, B'C$ . (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối D năm 2008).

$$\text{Đáp số: } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}, d(AM; B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

**Tự luyện 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $2a$ ,  $SA = a$ ,  $SB = a\sqrt{3}$  và mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ . Tính thể tích khối chóp  $S.BMDN$  và tìm cosin của góc giữa hai đường thẳng  $SM, DN$ . (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối B năm 2008).

$$\text{Đáp số: } V_{S.BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}, \cos(\widehat{AM; B'C}) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

**Tự luyện 3:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm số đo của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(BA'C)$  và  $(DAC)$ . (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối A năm 2003).

$$\text{Đáp số: } [(\widehat{BA'C}); (\widehat{D''AC})] = 60^\circ$$

**Tự luyện 4:** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng  $a\sqrt{5}$ ,  $AC = 4a$  và chiều cao của hình chóp là  $SO = 2\sqrt{2}a$ , ở đây  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $SC$ . Tìm góc và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BM$  theo  $a$ . (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối A năm 2004).

$$\text{Đáp số: } (\widehat{SA; BM}) = 30^\circ, d(SA; BM) = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

**Tự luyện 5:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có cạnh bằng  $a$ . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A_1B$  và  $B_1D$  (Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối B năm 2002).

Đáp số:  $d(A_1B; B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

**Tự luyện 6:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN (**Trích đề tuyển sinh Đại Học môn Toán khối A năm 2006**). Đáp số:  $d(A'C; MN) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

**Tự luyện 7:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ , cạnh SA vuông góc với đáy và  $SA = 2a$ . Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC.

Đáp số:  $d(AB; SC) = a\sqrt{2}$ .

**Tự luyện 8:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' các mặt bên đều là các hình vuông cạnh a. Gọi D, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C'. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng A'B và B'C'.

Đáp số:  $d(A'B; B'C') = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .

**Tự luyện 9:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA theo a. Biết  $SA = a$  và tạo với mặt phẳng đáy một góc  $30^\circ$ .

Đáp số:  $d(BC; SA) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Tự luyện 10:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $4\sqrt{2}a$ , cạnh bên SC vuông góc với đáy và  $SC = 2a$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Đáp số:  $(\widehat{SM; CN}) = 45^\circ, d(SM; CN) = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ .

**Tự luyện 11:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có  $SA = 4a$ . Điểm D nằm trên cạnh SC,  $CD = 3a$ . Khoảng cách từ A đến BD bằng  $2a$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Đáp số:  $V_{S.ABC} = \frac{3\sqrt{174}}{16}a$

**Tự luyện 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O. Biết  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ , tam giác SAO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy. Góc giữa SD và đáy bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa SB, AC theo a.

Đáp số:  $d(SB; AC) = \frac{3a}{4}$

**Tự luyện 13:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A với  $AB = AC = a$  và góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ , cạnh bên  $BB' = a$ . Gọi I là trung điểm của CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông tại A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

Đáp số:  $\cos[(ABC); (AB'I)] = \frac{\sqrt{30}}{10}$ .

Tài liệu tham khảo:

*Đề tuyển sinh Đại Học môn Toán các năm 2002 - 2012 của BỘ GD và ĐT.*

*Phân dạng và phương pháp giải các chuyên đề hình học (Nguyễn Phú Khánh - Nguyễn Tất Thu - Nguyễn Tấn Siêng)*

*Tài liệu tham khảo trên internet.*

*Người viết: iceage3*

**Hết**

**CHÚC CÁC BẠN THÀNH CÔNG**