

PHẦN THỨ NHẤT
MỞ ĐẦU

1) Lý do cho đề tài:

Bất đẳng thức là một vấn đề hay và khó của toán học phổ thông. Các đề toán về bất đẳng thức xuất hiện ở mọi cuộc thi từ cấp tiểu học cho tới sinh viên đại học và sau đại học. Đặc biệt trong đề thi Đại học, nó thường là những câu dùng để phân loại thí sinh.

Về đẹp và sức hấp dẫn của bất đẳng thức đối với người yêu toán là vô tận, nó luôn mang lại những cảm xúc ngọt ngào khi ta chinh phục được một bài toán bất đẳng thức nào đó. Bất đẳng thức là một lĩnh vực quan trọng của đại số học. Các nhà toán học đều có chung nhận định là: **“Các kết quả của toán học thường được biểu thị bằng những bất đẳng thức chứ không phải bằng những đẳng thức”**. Hay như G.s Hoàng Tụy từng nói: **“các nhà toán học làm việc với bất đẳng thức nhiều hơn là đẳng thức”**. Đó là trong toán học.

Trong cuộc sống của chúng ta cũng vậy. Ta biết đây, trạng thái cân bằng chỉ là tạm thời, là một khoảnh khắc nào đó. Cuộc sống luôn vận động và các trạng thái cân bằng nhanh chóng bị phá vỡ để thay vào đó là trạng thái bất cân bằng được tạo ra và hướng tới trạng thái cân bằng mới. Nó cũng như đẳng thức và bất đẳng thức của cuộc sống vậy.

Do bất đẳng thức là một vấn đề khó, nên để làm tốt các bài toán về bất đẳng thức luôn là một thách thức và mong ước của người học toán. Các lời giải về bất đẳng thức nói chung thường khiến cho học sinh cảm thấy như **“từ trên trời rơi xuống”**. Khi giảng dạy về bất đẳng thức hay tham khảo ở một tài liệu nào đó chúng ta đều thường xuyên gặp phải các lời giải đại loại như: “ta có...”; “ta sẽ chứng minh...”. Học sinh thường xuyên phải chấp nhận những lời giải mang màu sắc áp đặt như thế, và dĩ nhiên là các em và cả chính thầy cô cũng không thoải mái khi đón nhận hoặc trình bày những lời giải như vậy.

Bây giờ ta nói thêm về lời giải **“từ trên trời rơi xuống”**. Thực ra chẳng có lời giải sẵn nào rơi xuống như thế cả, mà đó là kết quả cuối cùng của sự mày mò đi tìm phương pháp, sáng tạo trong mỗi lời giải. Đó là kết quả của sự khổ luyện có phương pháp mới cho ra lò những sản phẩm như vậy.

Để học tốt về bất đẳng thức thì cần phải đảm bảo những yếu tố sau đây:

- Nắm vững kiến thức cơ bản về bất đẳng thức.
- Nắm vững các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.
- Có tổ chất nhất định về môn học.

Ở đây yếu tố đầu là yêu cầu tối thiểu, yếu tố cuối thuộc về bẩm sinh mỗi người. Do đó yếu tố phương pháp là hết sức quan trọng.

Viết về bất đẳng thức từ trước có các thầy Phan Huy Khải, Phan Đức Chính, Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Đức Tấn... Bây giờ có một số tác giả mới như Trần Phương, Phạm Kim Hùng, Trần Tuấn Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Võ Giang Giai...đó đều là những bậc thầy về lĩnh vực bất đẳng thức. Nhưng những vấn đề họ viết đa phần đều rất khó, do đó với năng lực như học sinh trường tôi dạy thì hơi khó lĩnh hội.

Bản thân là giáo viên dạy Toán, được đọc qua sách của một số thầy nêu trên nên có một mong muốn là bằng ngôn ngữ của mình, truyền tải đến học sinh **Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức** để làm dễ hơn vấn đề toán học được xem là rất khó này. Những phương pháp được tác giả chọn để viết ra đây nhằm bổ sung vào các phương pháp vốn được xem là kinh điển như:

- Phương pháp áp dụng các BĐT cổ điển
- Phương pháp tam thức bậc hai.
- Phương pháp lượng giác hóa.
- Phương pháp hàm số.
- Phương pháp hình học.
- Phương pháp quy nạp...

Chính vì lẽ đó nên trong đề tài này tác giả không đề cập đến những phương pháp quen thuộc đó. Ở đây chúng ta sẽ gặp những phương pháp đặc sắc như *chọn phần tử cực hạn*, phương pháp đưa về *đồng bậc*, phương pháp

pháp chuẩn hóa,...Đặc biệt là những kỹ thuật tinh tế trong chứng minh như kỹ thuật *tách ghép*, kỹ thuật *chọn điểm rơi*, kỹ thuật *hệ số bất định* mà hiệu quả của nó thật bất ngờ.

Qua đề tài này, người đọc sẽ thấy được xuất xứ tư duy của các lời giải “*từ trên trời rơi xuống*”, thấy được các suy luận hết sức tự nhiên ẩn chứa trong các lời giải có vẻ thiếu tự nhiên. Tôi có thể ví như chúng ta được thấy toàn bộ hậu trường của một bộ phim với những cảnh quay hoành tráng hoặc lãng mạn. Cuối cùng, tôi tin rằng những phương pháp đặc sắc trên đây sẽ giúp học sinh cảm thấy tự tin hơn khi làm toán về bất đẳng thức. Tôi xin kể một mẩu chuyện nhỏ để thay cho lời kết.

Câu chuyện về nhà triệu phú và người họa sỹ trứ danh.

Một ngày nọ, có một nhà triệu phú tới tìm người họa sỹ tài hoa để hỏi mua một bức tranh. Nhà triệu phú hỏi và được họa sỹ ra giá là 3 triệu USD. Nhà triệu phú gật đầu đồng ý. Sau khi thống nhất giá, nhà triệu phú hỏi người họa sỹ: “Ngài vẽ bức tranh này trong thời gian bao lâu?”. Người họa sỹ trả lời: “Tôi vẽ nó trong một tuần, thưa ngài”. Nghe vậy nhà triệu phú trầm ngâm một lát và nói: “Vậy thì tôi xin trả lại ngài bức tranh, vì nó quá đắt”. Nghe vậy, người họa sỹ gật đầu nhận lại bức tranh và nói: “nhưng để vẽ nó trong một tuần thì tôi đã phải mất 3 năm để suy nghĩ về nó, ngài thực sự không thấy được giá trị của bức tranh”. Quả đúng như vậy, câu chuyện là một thông điệp sâu sắc gửi tới chúng ta: Để có một lời giải hoàn hảo cho một bài toán, những người làm toán đã phải bỏ ra rất nhiều thời gian và công sức để suy nghĩ về nó.

2) Phương pháp nghiên cứu đề tài:

Để nghiên cứu đề tài này, tác giả đã phối hợp các phương pháp:

- Phương pháp tư duy tổng hợp.
- Phương pháp giải quyết vấn đề.
- Phương pháp chọn lọc.
- Phương pháp phân tích, bình luận

3) Mục đích nghiên cứu đề tài:

Chọn đề tài bất đẳng thức để nghiên cứu với những mục đích như sau:

- Muốn có sự đầu tư nhiều hơn về nội dung Bất đẳng thức, một nội dung mà bản thân cảm thấy mình còn vấp phải nhiều khó khăn trong quá trình giảng dạy. Bằng việc nghiên cứu tìm tòi để viết về nó, tôi hi vọng mình sẽ trau dồi thêm kiến thức và kỹ năng về toán Bất đẳng thức.
- Tạo cho mình một tài liệu riêng theo cách hiểu của mình, bằng ngôn ngữ của mình, phục vụ cho quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, luyện thi đại học.
- Có điều kiện để trao đổi, học hỏi kinh nghiệm từ đồng nghiệp gần xa.
- Đưa tới cho học sinh một tài liệu tham khảo đã được bản thân nghiên cứu, trình bày theo ngôn ngữ của mình, giúp các em trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi Đại học.

4) Nhiệm vụ của việc nghiên cứu đề tài:

- Quá trình nghiên cứu đề tài để bản thân trau dồi thêm kiến thức chuyên môn và nghiệp vụ. Cách thức thực hiện một đề tài khoa học là như thế nào. Có điều kiện để trao đổi nhiều hơn với thầy cô trong tổ Toán về các vấn đề Toán. Quan trọng hơn nữa là đưa tới cho học sinh một số dạng bài tập có ứng dụng cao trong các kỳ thi, giúp các em có kết quả tốt hơn.
- Đề tài mà tác giả thực hiện với nhiệm vụ là giúp học sinh cải tiến phương pháp học tập. Biết quan tâm tới bản chất Toán học trong mỗi phát biểu. Cách trình bày của đề tài từ mức độ dễ đến khó, nhằm từng bước giúp học sinh nâng cao và kiến thức và kỹ năng của mình.
- Đề tài khi được công bố, nó phải giúp học sinh nắm vững hơn về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức, giúp các em thấy bất đẳng thức dễ hơn.

5) Phạm vi nghiên cứu:

- Đề tài nghiên cứu hoàn toàn về lĩnh vực Bất đẳng thức, dưới dạng chứng minh Bất đẳng thức thuần túy hoặc dưới dạng bài toán Max, Min. Các Bất đẳng thức đề cập đến trong chuyên đề này là những bất đẳng thức cổ điển thường gặp. Các kỹ thuật chứng minh được phân tích kỹ càng và trình bày dưới dạng các bài học. Thiết nghĩ cách trình bày như vậy sẽ tách bạch được các phương pháp, tránh sự nặng nề không cần thiết.

- Công cụ nghiên cứu chủ yếu là dùng đại số sơ cấp, có một số bài sử dụng tới công cụ giải tích, cụ thể là đạo hàm, nhưng nằm hoàn toàn trong chương trình phổ thông.

PHẦN THỨ HAI NỘI DUNG ĐỀ TÀI

§1. PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN.

1. Phương pháp đồng bậc.

Chứng minh BĐT đồng bậc là một dạng bài tập phổ biến trong thế giới bất đẳng thức. Việc đưa một bất đẳng thức về cùng bậc cũng có rất nhiều ý nghĩa. Vì xét cho cùng thì chỉ những đa thức đồng bậc đem so sánh với nhau thì mới thực sự có ý nghĩa, điều mà ta thường nói là “đẳng cấp”. Hơn nữa khi đem về đồng bậc ta có thể sử dụng những kỹ thuật giúp làm đơn giản phép chứng minh như phép chuẩn hóa.

Trong bài viết này tôi sẽ cố gắng phân tích các quá trình cũng như những suy luận để có thể đưa một BĐT về đồng bậc.

a) Bậc của đa thức:

Đơn thức là một biểu thức mà trong đó các phép toán chỉ bao gồm phép nhân hoặc phép lũy thừa với số mũ không âm.

Ví dụ: $A = x^2 y^3 z^4$ là một đơn thức theo ba biến x, y, z .

Bậc của đơn thức là tổng các số mũ của các biến trong đơn thức đó. Biểu thức A ở trên có bậc là: $2+3+4=9$.

Bậc của biểu thức là kết quả phép chia hai đơn thức bằng hiệu của bậc đơn thức tử với bậc của đơn thức mẫu.

Đa thức là một biểu thức gồm nhiều đơn thức mà trong đó các phép toán được nối với nhau bằng phép cộng hoặc trừ.

Bậc của đa thức là bậc của đơn thức có bậc cao nhất.

Ví dụ: Đa thức $B = xyz - 2x^2 y^3 + 3x^3 y^2 z^4$ có bậc là bậc của đơn thức $3x^3 y^2 z^4$ và bằng 9.

Theo định nghĩa trên một số thực sẽ có bậc bằng 0.

Hai đa thức của cùng các biến được gọi là đồng bậc nếu bậc của chúng bằng nhau.

b) Phương pháp đồng bậc trong bất đẳng thức có điều kiện.

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức có dạng $F(x_1; x_2; \dots; x_n) \geq 0$ (1) với ràng buộc

$G(x_1; x_2; \dots; x_n) \geq a$. Lúc đó từ nhận xét một số thực có bậc bằng 0, ta sẽ biến đổi (1) rồi nhân hoặc chia vào một trong hai về với một đa thức có bậc phù hợp ta đưa về bất đẳng thức đồng bậc.

Để thấy rõ phương pháp, ta đưa ra ví dụ minh họa sau đây:

Ví dụ:

cho các số thực dương a, b sao cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$ (1).

Chứng minh:

Ta thấy VT(1) là đa thức bậc 4, VP(1) là đa thức bậc 3.

Từ $a + b = 2$, suy ra $\frac{a+b}{2} = 1$ là đa thức có bậc là 1. Nhân vào VP(1) đa thức $\frac{a+b}{2}$ ta được:

$$a^4 + b^4 \geq (a^3 + b^3) \frac{a+b}{2} \quad (1'). \text{ Từ đây ta được bất đẳng thức đồng bậc tương đương với (1).}$$

Ta chứng minh (1'): $(1') \Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$ (luôn đúng).

Qua ví dụ trên ta thấy rõ tư tưởng chính của phương pháp đưa về đồng bậc.

Bây giờ ta sẽ dùng phương pháp đồng bậc để chứng minh các bất đẳng thức với ràng buộc đẳng thức.

2) Sử dụng phương pháp đồng bậc vào chứng minh bất đẳng thức với ràng buộc đẳng thức.

Ví dụ 1 : (THTT tháng 1-2004)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng :

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 + \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4). (1)$$

Chứng minh :

Trước hết ta chứng minh BĐT bên trái :

Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $a^2b = a.a.b \leq \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} = \frac{2a^3 + b^3}{3}$.

Tương tự ta có : $b^2c \leq \frac{2b^3 + c^3}{3}$; $c^2a \leq \frac{2c^3 + a^3}{3}$.

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo ta dùng phương pháp đồng bậc chứng minh BĐT bên phải :

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 + \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4) \quad (1').$$

Sử dụng $a + b + c = 2$ ta đưa cả hai vế (1') về bậc 4 như sau:

$$\begin{aligned} (1') &\Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) - (a^4 + b^4 + c^4) \leq \frac{(a + b + c)^4}{8} \quad (2) \\ &\Leftrightarrow VT = a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b) = ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \\ &\leq ab(a^2 + b^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2 + a^2) + ca(c^2 + a^2 + b^2) = (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh: $(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \leq \frac{(a + b + c)^4}{8}$

$$\Leftrightarrow 8(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \leq [(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)]^2$$

Ta đặt $x = 2(ab + bc + ca) \geq 0$; $y = (a^2 + b^2 + c^2)$, ta có kết quả quen thuộc: $4xy \leq (x + y)^2$.

Vậy BĐT (1) hoàn toàn được chứng minh.

Ví dụ 2 : (THTT tháng 4-2003).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $abc = 1$. Chứng minh :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2(1 + a + b + c). (1)$$

Chứng minh :

$$(1) \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 2 + 2(a + b + c) \quad (2)$$

Phân tích để sử dụng phương pháp.

Ta thấy VT(2) có bậc là 3, trong khi VP(2) có bậc là 1, gồm hai phần là bậc 0 và bậc 1.

Từ $abc = 1$ và abc có bậc là 3, ta suy ra $\sqrt[3]{abc}$ có bậc là 1. Từ đó ta đưa (2) về đồng bậc như sau :

$$(2) \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 2abc + 2(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Ta có VT(2) = $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$. Do đó BĐT cần chứng minh tương đương :

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 2(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2}$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b + c) + bc(b + c + a) + ca(c + a + b) \geq 2(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2} + 3abc$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 2(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2} + 3abc \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

$$\Rightarrow (ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 3(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Ta cũng có : $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Từ đó ta có :

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 3(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2} = 2(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2} + (a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2} \\ \geq 2(a + b + c)\sqrt[3]{(abc)^2} + 3abc . \text{ BĐT được chứng minh.}$$

Ví dụ 3 :

Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + 3 \quad (1)$$

Chứng minh:

Phân tích : ta thấy VT(1) có bậc là -2, VP(1) có bậc là 0. Ta lại có $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ mà $a^2 + b^2 + c^2$ có bậc là 2. Vậy ta nhân vào VT(1) lượng $a^2 + b^2 + c^2$ ta có BĐT đồng bậc.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) (a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + 3 .$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b^2 + c^2} + 1 \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + c^2} + 1 \right) + \left(\frac{c^2}{a^2 + b^2} + 1 \right) \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} .$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$$\text{Vậy nên : } \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{a^2}{2ab} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2bc} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 4:

Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a + b + 1} + \frac{1}{b + c + 1} + \frac{1}{c + a + 1} \leq 1 \quad (1).$$

Chứng minh:

Phân tích: Ta thấy VT(1) thì mỗi mẫu thức có bậc là 1, nhưng xét cả phân thức thì không phải có bậc là -1 vì đây là phép cộng. Để mỗi phân thức ở VT có bậc -1 ta phải thay số 1 bởi $\sqrt[3]{abc}$. Sau đó để tạo ra BĐT đồng bậc ta phải chia VP cho $\sqrt[3]{abc}$.

$$\text{Vậy (1) trở thành: } \frac{1}{a + b + \sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{b + c + \sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{c + a + \sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} .$$

Tiếp theo ta đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$; $z = \sqrt[3]{c}$. BĐT trở thành:

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz} \quad (2).$$

Ta chứng minh (2) bằng phương pháp đánh giá đại diện như sau:

Ta có x, y, z là các số dương nên : $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$. Từ đó ta có

$$x^3 + y^3 + xyz \geq xy(x + y) + xyz = xy(x + y + z) .$$

$$\text{Vậy : } \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xy(x + y + z)} + \frac{1}{yz(x + y + z)} + \frac{1}{zx(x + y + z)}$$

$$= \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = \frac{1}{xyz} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 5: (IMO 2005)

Cho $a, b, c > 0$ và $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Chứng minh:

BĐT cần chứng minh tương đương:

$$1 - \frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + 1 - \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + 1 - \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \leq 3$$

$$\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bây giờ ta đưa về đồng bậc như sau:

$$\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} = \frac{1}{\frac{a^5}{abc} + b^2 + c^2} = \frac{1}{\frac{a^4}{bc} + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{\frac{2a^4}{b^2 + c^2} + b^2 + c^2} = \frac{b^2 + c^2}{2a^4 + (b^2 + c^2)^2}.$$

Ta để ý với $x, y > 0$ thì $4x^2 + y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 \geq \frac{2}{3}(x+y)^2$.

Do đó $2a^4 + (b^2 + c^2)^2 \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Nên $\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} \leq \frac{3(b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}$. Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} \leq \frac{3(c^2 + a^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}; \quad \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3(a^2 + b^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Cộng về theo về ta có: $\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Lời bình:

Qua các ví dụ minh họa ở trên ta thấy phương pháp đồng bậc tỏ ra hiệu quả với các BĐT có ràng buộc đẳng thức. Chúng ta cần tìm đúng bậc của mỗi vế. Việc nhân hay chia một lượng nào đó để tạo ra đồng bậc là rất cần thiết và linh động. Cần rèn luyện tốt kỹ năng này. Sau khi đưa về BĐT đồng bậc, việc chứng minh phần còn lại ta cần sử dụng linh hoạt các BĐT cơ bản.

Sâu đây là một số bài tập tương tự:

Bài tập đề nghị:

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$.

b) $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

2) Cho các số thực dương a, b sao cho $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \geq 2\sqrt{2}. \text{ (THTT tháng 6-2005).}$$

3) cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

4) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$b) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a + b + c) \geq 2\sqrt{2}.$$

$$c) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + (a + b + c) \geq 4\sqrt{3}.$$

§2. ỨNG DỤNG HỆ QUẢ CỦA BĐT BU-NHI-A-CÓP-XKI.

1) Bất đẳng thức B.C.S và hệ quả.

Chúng ta biết bất đẳng thức Bu-nhi-a-cóp-xki được phát biểu như sau:

Cho $2n$ số thực bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$. Khi đó ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = k b_i$; ($i = \overline{1; n}$).

Bất đẳng thức này có tên đầy đủ là Bunhiacopski-Cauchy-Schwarz, thường viết tắt là B.C.S. Thông thường chúng ta thường gặp và áp dụng B.C.S ở dạng (1) mà tôi sẽ gọi đó là dạng chính tắc của B.C.S.

Việc chứng minh (1) được trình bày trong SGK và nhiều sách tham khảo nên tôi không trình bày phép chứng minh ở đây.

Trong bài viết này tôi muốn đề cập tới một dạng khác của B.C.S mà tôi gọi đó là hệ quả. Sở dĩ gọi là hệ quả vì bất đẳng thức này được suy ra từ (1).

Hệ quả:

Cho n số thực bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_n$ và n số thực dương $b_1; b_2; \dots; b_n$. Khi đó ta có :

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} = t \sqrt{b_i} \Leftrightarrow a_i = t b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Chứng minh:

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \sqrt{b_1} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \sqrt{b_2} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \sqrt{b_n} \right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) (b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (\text{đpcm}).$$

Việc áp dụng BĐT(2) giúp ta chứng minh được một lớp các BĐT có biến ở mẫu, khi tử là các bình phương. Chẳng hạn ta có được các BĐT quen thuộc sau:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad \text{với } x, y, z > 0.$$

Bây giờ ta theo dõi việc ứng dụng (2) vào chứng minh BĐT ở phần tiếp theo.

2) Ứng dụng hệ quả bất đẳng thức B.C.S.

Ví dụ 1 (Kỳ thi HSG Toán Lương Thế Vinh lần I- Khối 10).

Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy$.

Giải:

Phân tích bài toán:

Ta thấy có $x^2 + y^2$, cần xuất hiện $2xy$ để có thể sử dụng được $x + y \leq 1$. Mặt khác $x^2 + y^2$ và $2xy$ nằm dưới mẫu nên nghĩ tới áp dụng (2). Từ đó ta có hướng giải như sau:

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} + \frac{3}{2xy} + 4xy \geq \frac{(1+1)^2}{(x+y)^2} + \frac{3}{2xy} + 4xy \geq 4 + \frac{3}{2xy} + 4xy.$$

Bây giờ ta xử lý lượng $\frac{3}{2xy} + 4xy$. Nhiều người sai lầm khi áp dụng ngay BĐT Cô-si. Lý do là dấu “=” không đồng thời xảy ra ở cả 2 BĐT. Điều này tôi sẽ nói sâu hơn ở chủ đề kỹ thuật chọn điểm rơi.

Ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$. Vậy thì khi đó $\frac{2}{3xy} = \frac{8}{3}$ và $4xy = 1$. Cho nên ta tiếp tục tách như sau:

$$\frac{3}{2xy} + 4xy = \left(\frac{3}{12xy} + 4xy \right) + \frac{5}{4xy} \geq 2\sqrt{\frac{3}{12xy} \cdot 4xy} + \frac{5}{4\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = 7.$$

Vậy GTNN của A bằng 11 khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Trên đây ta thấy một áp dụng của (2) để xử lý BĐT có biến ở mẫu rất tốt. Để áp dụng được ta cần có kỹ thuật tách, ghép hợp lý.

Ví dụ 2:

Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$a) \frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq 4(a+b+c).$$

$$b) \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

$$c) \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

$$d) \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Chứng minh:

Áp dụng BĐT(2) ta lần lượt có:

$$a) \frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{a+b+c} = 4(a+b+c).$$

$$b) \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{a^4}{ab} + \frac{b^4}{bc} + \frac{c^4}{ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}.$$

$$\text{Mặt khác: } (ab+bc+ca)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) \Rightarrow (a^2+b^2+c^2) \geq ab+bc+ca.$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2+b^2+c^2 \text{ (đpcm).}$$

$$c) \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$d) \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{a^4}{a(b+c)} + \frac{b^4}{b(c+a)} + \frac{c^4}{c(a+b)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Nhận xét:

Từ việc chứng minh các BĐT ở ví dụ trên ta thấy việc áp dụng BĐT(2) cho ta kết quả gọn gàng và nhanh chóng. Nếu áp dụng BĐT Cô-si ta phải áp dụng cho nhiều trường hợp và lời giải cồng kềnh hơn nhiều.

Các ví dụ trên đều có thể áp dụng trực tiếp BĐT (2) mà không cần biến đổi hoặc biến đổi rất ít là cho kết quả. Sau đây ta sẽ xét tới các bài tập đòi hỏi kỹ năng biến đổi để có thể áp dụng được BĐT(2). Những bài tập như thế đòi hỏi một khả năng biến đổi thành thạo và nhìn nhận tinh tế.

Ví dụ 3:

Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8$ (1)

(Đề thi HSG LỚP 12-TPHCM năm 2003).

Chứng minh:

Phân tích bài toán:

Ta thấy trên tử xuất hiện các số 25; 16; 1 đây đều là những số chính phương.

$$\text{Ta xử lý như sau: (1) } \Leftrightarrow 25\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + 16\left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \frac{c}{a+b} + 1 > 50 \\ \Leftrightarrow \frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} > \frac{50}{a+b+c}$$

$$\text{Thật vậy: Áp dụng BĐT(2) ta có: } \frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{(5+4+1)^2}{2(a+b+c)} = \frac{50}{a+b+c}.$$

Bây giờ ta cần chỉ ra dấu « = » không xảy ra.

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi $\frac{5}{b+c} = \frac{4}{c+a} = \frac{1}{a+b}$, giải được a=0 là trái giả thiết.

Ví dụ 4 :(Đề thi ĐH khối A-2007)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện xyz = 1. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Giải :

Ta có $y+z \geq 2\sqrt{yz} = 2\frac{1}{\sqrt{x}}$, vì $xyz=1$.

Do đó ta có $x^2(y+z) \geq 2x\sqrt{x}$. Tương tự : $y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y}$; $z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z}$.

$$\text{Vậy nên : } P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Ta đặt $a = x\sqrt{x}$; $b = y\sqrt{y}$; $c = z\sqrt{z}$

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó : } P &\geq \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} = \frac{a^2}{a(a+2b)} + \frac{b^2}{b(b+2c)} + \frac{c^2}{c(c+2a)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh : $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

Thật vậy :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq ab+bc+ca + 2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca).$$

Vậy ta có : $P \geq 1$

$P=1$ khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Do đó $x=y=z=1$.

Ví dụ 5 (Toán học tuổi trẻ tháng 10 năm 98).

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn : $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}.$$

Giải :

$$\text{Áp dụng hệ quả ta có : } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{(1+1+1)}{ab+bc+ca} = \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Ta đã có $a^2+b^2+c^2$, bây giờ cần có $2ab+2bc+2ca$ để làm xuất hiện $(a+b+c)^2=1$. Vậy ta tách P như sau :

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} = \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{4}{2ab+2bc+2ca} \right) + \frac{7}{ab+bc+ca} \\ &\geq \left(\frac{(1+2)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \right) + \frac{7}{ab+bc+ca} = \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{7}{ab+bc+ca} \\ &= 9 + \frac{7}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $P \geq 9+21=30$.

P đạt GTNN bằng 30 khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 6: (Đề thi ĐH khối A-năm 2005)

Cho x, y, z là các số dương và thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+z+x} + \frac{1}{2z+x+y} \leq 1.$$

Chứng minh:

Áp dụng hệ quả trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{2x+y+z} \leq \frac{\frac{1}{4}}{x+y} + \frac{\frac{1}{4}}{x+z} = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2}{x+y} \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{y} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z} = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{2y+z+x} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right)$; $\frac{1}{2z+x+y} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

Cộng vế theo vế ta có: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+z+x} + \frac{1}{2z+x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 7: (Thi Olympic Toán quốc tế năm 95 tại Canada).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh:

Ta để ý rằng: $\frac{1}{a^2} = b^2 c^2$; $\frac{1}{b^2} = a^2 c^2$; $\frac{1}{c^2} = a^2 b^2$.

Vế trái BĐT cần chứng minh được viết lại:

$$\frac{b^2 c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2 a^2}{b(c+a)} + \frac{a^2 b^2}{c(a+b)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 8 (Toán học tuổi trẻ tháng 11 năm 2009)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{9}{1-2(ab+bc+ca)} + \frac{2}{abc}.$$

Giải:

Từ giả thiết $a+b+c=1$ ta suy ra $1 = (a+b+c)^2$. Thay vào P ta có:

$$P = \frac{9}{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{9}{a^2+b^2+c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

Áp dụng BĐT hệ quả ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{36}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{(3+6)^2}{(a+b+c)^2} = 81.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của P là 81 khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 9 (Toán học tuổi trẻ tháng 5 năm 2009)

Tìm GTNN của biểu thức $T = \frac{ab+bc}{a^2-b^2+c^2} + \frac{bc+ca}{b^2-c^2+a^2} + \frac{ca+ab}{c^2-a^2+b^2}$, trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn và $abc = 1$.

Giải:

Vì tam giác nhọn nên các biểu thức dưới mẫu luôn dương.

Ta viết lại

$$T = ab\left(\frac{1}{a^2-b^2+c^2} + \frac{1}{c^2-a^2+b^2}\right) + bc\left(\frac{1}{b^2-c^2+a^2} + \frac{1}{a^2-b^2+c^2}\right) + ca\left(\frac{1}{c^2-a^2+b^2} + \frac{1}{b^2-c^2+a^2}\right).$$

Áp dụng BĐT hệ quả ta có:

$$\frac{1}{a^2-b^2+c^2} + \frac{1}{c^2-a^2+b^2} \geq \frac{4}{2c^2} = \frac{2}{c^2}; \quad \frac{1}{b^2-c^2+a^2} + \frac{1}{a^2-b^2+c^2} \geq \frac{2}{a^2}; \quad \frac{1}{c^2-a^2+b^2} + \frac{1}{b^2-c^2+a^2} \geq \frac{2}{b^2}.$$

Vậy: $T \geq 2\left(\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}\right) \geq 6$ (Áp dụng BĐT Cô-si). Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy GTNN của T là 6 khi tam giác đều có cạnh bằng 1.

Ví dụ 10:

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4(a+b)} + \frac{1}{b^4(b+c)} + \frac{1}{c^4(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Toán học tuổi trẻ tháng 4 năm 2010).

Giải:

Ta ký hiệu vế trái là P. Áp dụng BĐT hệ quả ta có:

$$P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2}{2(a+b+c)}.$$

Lại sử dụng BĐT quen thuộc $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = a+b+c.$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét:

Ta có thể đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Đưa về BĐT $\frac{x^4}{y+z} + \frac{y^4}{z+x} + \frac{z^4}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Ta có thể chứng minh được bài toán tổng quát sau:

Cho $x_1; x_2; \dots; x_n$ là các số thực dương và thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x_1^{2n-2}(x_1+x_2)} + \frac{1}{x_2^{2n-2}(x_2+x_3)} + \dots + \frac{1}{x_n^{2n-2}(x_n+x_1)} \geq \frac{n}{2} \quad (\text{với } n \geq 2; n \in \mathbb{N}).$$

Qua các ví dụ trên ta thấy công dụng to lớn của BĐT hệ quả được nêu ra ở trên, nhất là đối với các bất đẳng thức chứa biến ở mẫu.

Sau đây là một số bài tập tương tự.

Bài tập đề nghị:

1) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{2x}{x^6+y^4} + \frac{2y}{y^6+z^4} + \frac{2z}{z^6+x^4} \leq \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}.$$

2) Tìm GTNN của biểu thức: $P = \frac{a^6}{b^3+c^3} + \frac{b^6}{c^3+a^3} + \frac{c^6}{a^3+b^3}$, trong đó a, b, c là các số thực dương và $a+b+c=1$.

3) Cho các số x, y, z, t thỏa mãn $xyzt=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)} + \frac{1}{y^3(xz+zt+tx)} + \frac{1}{z^3(xt+ty+yx)} + \frac{1}{t^3(xy+yz+zx)} \geq \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

4) Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}$, trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

(Thi vào lớp 10 chuyên Toán- ĐHKHTN Hà Nội 2004).

5) Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-b}$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn dương thỏa mãn $a+b+c=1$

(Toán học tuổi trẻ tháng 12-2003).

§3. SỬ DỤNG PHẦN TỬ CỰC HẠN .

1. Bất đẳng thức hoán vị, bất đẳng thức đối xứng.

Bất đẳng thức hoán vị có dạng : $P(a_1; a_2; \dots; a_n) \geq m(1)$.

Trong đó m là hằng số còn $P(a_1; a_2; \dots; a_n)$ là một biểu thức nhận giá trị không đổi khi ta **hoán vị vòng quanh** bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$.

Bất đẳng thức đối xứng là bất đẳng thức có dạng $P(a_1; a_2; \dots; a_n) \geq n(2)$.

Trong đó n là hằng số và $P(a_1; a_2; \dots; a_n)$ là một biểu thức nhận giá trị không đổi khi ta **hoán vị bất kỳ** bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$.

2. Phương pháp phần tử cực hạn trong chứng minh BĐT hoán vị và BĐT đối xứng.

Giả sử ta cần chứng minh BĐT(1). Lúc đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1 = \max \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ hoặc $a_1 = \min \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. Ta đưa về đánh giá P thông qua BĐT theo biến chính là a_1 . Phương pháp thường dùng để đánh giá ở đây là phương pháp làm trội.

Giả sử ta cần chứng minh BĐT(2). Lúc đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ hoặc $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Ta cũng đưa về việc đánh giá thông qua biến a_1 .

BĐT(1) thường sử dụng ký hiệu **cyclic**.

BĐT(2) thường sử dụng ký hiệu **symmetric**.

3. Ứng dụng phương pháp phần tử cực hạn.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

Giải:

Ta thấy BĐT cần chứng minh có dạng hoán vị vòng quanh theo a, b, c .

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a = \max \{a; b; c\}$. Suy ra $a \geq b; a \geq c$.

Vậy nên: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 1 \geq 2 + 1 = 3$.

Nhận xét: Bằng quy nạp toán học ta chứng minh được BĐT tổng quát sau:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n. \text{ Với } a_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n; n \geq 2.$$

Ví dụ 2: (Toán học tuổi trẻ tháng 10 năm 2004)

Cho a, b, c là các số thực không âm và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + 1}{b^2 + 1} + \frac{b^2 + 1}{c^2 + 1} + \frac{c^2 + 1}{a^2 + 1}.$$

Giải:

Biểu thức P hoán vị vòng quanh theo ba biến a, b, c nên ta giả sử $a = \max \{a, b, c\}$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 + 1}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 1} + \left(\frac{1}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \right) \leq a^2 + 1 + b^2 + \frac{1}{a^2 + 1} + \left(\frac{1}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \right) \\ &\leq a^2 + 1 + (b + c)^2 + \frac{1}{a^2 + 1} + \left(\frac{1}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{c^2 + 1} \right) \leq a^2 + 1 + (b + c)^2 + \frac{1}{a^2 + 1} + 1 = a^2 + 1 + (1 - a)^2 + \frac{1}{a^2 + 1} + 1 \\ &= 2a^2 - 2a + 3 + \frac{1}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

Vì $a = \max \{a, b, c\}$ nên ta suy ra $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$. Với điều kiện này lập bảng biến thiên ta tìm được

$$P \leq \frac{7}{2}. \text{ Vậy GTLN của P là } \frac{7}{2} \text{ khi } a = 1; b = c = 0.$$

Kết luận: GTLN của P là $\frac{7}{2}$ khi một trong hai giá trị bằng 0 và giá trị kia bằng 1.

Nhận xét:

Bằng phương pháp tương tự ta có thể giải quyết bài toán tổng quát sau:

Cho a, b, c là các số thực không âm và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a^n + 1}{b^n + 1} + \frac{b^n + 1}{c^n + 1} + \frac{c^n + 1}{a^n + 1} \leq \frac{7}{2}.$$

Chứng minh :

Với lời giải như trên ta đánh giá được : $P \leq a^n + 1 + (1-a)^n + \frac{1}{a^n + 1} + 1$ với $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$. Ta cần chứng minh :

$$a^n + 1 + (1-a)^n + \frac{1}{a^n + 1} + 1 \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^n + 1} - \frac{1}{2} \leq (1-a^n) - (1-a)^n \Leftrightarrow \frac{1-a^n}{2(a^n + 1)} \leq (1-a^n) - (1-a)^n.$$

$$\Leftrightarrow (1-a)^n \leq (1-a^n) \left[1 - \frac{1}{2(1+a^n)} \right] \quad (1)$$

Với $n=1$ ta có (1) đúng.

$$\text{Với } n \geq 2 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow (1-a) \left[\frac{(1-a)^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} - 1 + \frac{1}{2(1+a^n)} \right] \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-a)^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} - 1 + \frac{1}{2(1+a^n)} \leq 0 \text{ vì}$$

$$a \leq 1$$

Ta có $1+a+a^2+\dots+a^{n-1} \geq 1+a > 0$ và $(1-a)^{n-1} \leq 1-a$.

$$\text{Vậy } \frac{(1-a)^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} - 1 + \frac{1}{2(1+a^n)} \leq \frac{1-a}{1+a} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1-3a}{2(1+a)} \leq 0.$$

Bài toán tổng quát được chứng minh.

Ví dụ 3 : (Toán học tuổi trẻ tháng 6 năm 2000)

Cho các số $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc$.

Chứng minh :

Ta đặt $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 5abc$ thì $P(a, b, c)$ là biểu thức đối xứng theo ba biến a, b, c . Ta cần chứng minh $P \leq 0$. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $1 \leq c \leq b \leq a \leq 2$.

Trước hết ta chứng minh $P(a, b, c) \leq P(a, b, 1)$, nghĩa là :

$$c^3 - 5abc \leq 1 - 5ab \Leftrightarrow c^3 - 1 - 5ab(c-1) \leq 0 \Leftrightarrow (c-1)(1+c+c^2-5ab) \leq 0 \Leftrightarrow (1+c+c^2-5ab) \leq 0$$

Vì $1+c+c^2 \leq 3c^2 < 5c^2 < 5ab$ nên BĐT đúng.

Tiếp theo ta chứng minh $P(a, b, 1) \leq P(a, 1, 1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 1 - 5ab \leq a^3 + 2 - 5a$

$$\Leftrightarrow b^3 - 5ab \leq 1 - 5a \Leftrightarrow (b-1)(1+b+b^2-5a) \leq 0.$$

Lý luận tương tự ta có kết quả cần chứng minh.

Cuối cùng ta chứng minh $P(a, 1, 1) \leq P(2, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow a^3 + 2 - 5a \leq 0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2 + 2a - 1) \leq 0$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $a \in [1, 2]$.

Ví dụ 4 (Toán học tuổi trẻ tháng 3 năm 2008)

Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh bất đẳng thức $(3a+2b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{45}{2}$ (1). Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

Ta lần lượt chứng minh với giả thiết đã cho thì:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 10 \quad (2) \quad \text{và} \quad (3a+2b+c) \leq \frac{9}{4}(a+b+c) \quad (3).$$

+Chứng minh (2): $(2) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq 7.$

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có: $\frac{b}{a} \leq 1; \frac{c}{b} \leq 1$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{c}{b}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq 1 + \frac{c}{a} \quad (4)$$

Mặt khác do $\frac{a}{b} \geq 1; \frac{b}{c} \geq 1$ nên ta có $\Rightarrow \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{b}{c}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \leq 1 + \frac{a}{c} \quad (5).$

Cộng vế theo vế (4) và (5) ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq 2 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq 2 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \quad (6).$

Vì $a, c \in [1, 2] \Rightarrow 2 \leq 2a, 2c \leq 4$ nên $(a-2c)(c-2a) \geq 0 \Rightarrow 2a^2 + 2c^2 \leq 5ac \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{5}{2} \quad (7).$

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq 2 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 7$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2; c = 1$ hoặc $a = b = 1; c = 2$ và các hoán vị của nó. (2) được chứng minh.

Ta chứng minh (3).

$$(3a+2b+c) \leq \frac{9}{4}(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(b+5c-3a) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $b+5c \geq 6 \geq 3a$. Đẳng thức xảy ra khi $b = c = 1; a = 2$.

Bây giờ ta nhân vế theo vế (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $b = c = 1; a = 2$.

Ví dụ 5 (Đề 150 bộ đề 93)

Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$ và thay đổi. Tìm GTLN của biểu thức:

$$F = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c).$$

Giải :

Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó ta có:

$$\frac{b}{a+c+1} \leq \frac{b}{b+c+1}; \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{c}{c+b+1}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $(1+b+c)(1-b)(1-c) \leq \left(\frac{1+b+c+1-b+1-c}{3}\right)^3 = 1.$

Suy ra $(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{1+b+c} \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-a}{1+b+c}.$

Vậy $F \leq \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+b+1} + \frac{1-a}{1+b+c} = 1$. Dấu (=) xảy ra khi $a = b = c \in [0; 1]$.

Vậy GTLN của F là 1 khi và chỉ khi $a = b = c \in [0; 1]$.

Nhận xét:

Bài toán trên có thể được tổng quát như sau:

Cho $a_i \in [0;1], \forall i = \overline{1;n}$, đặt $S = \sum_{i=1}^n a_i$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{S-a_1+1} + \frac{a_2}{S-a_2+1} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n+1} + (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \leq 1 \quad (*).$$

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{(1-a_2) + (1-a_3) + \dots + (1-a_n) + (S-a_1+1)}{n} \geq \sqrt[n]{(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_n)(S-a_1+1)}.$$

$$\Rightarrow (1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_n)(S-a_1+1) \leq 1 \Rightarrow \frac{1-a_1}{S-a_1+1} \geq (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S-a_1+1} \geq \frac{a_1}{S-a_1+1} + (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_n) \quad (1)$$

Từ $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ta suy ra

$$\frac{a_2}{S-a_1+1} \geq \frac{a_2}{S-a_2+1} \quad (2)$$

$$\frac{a_3}{S-a_1+1} \geq \frac{a_3}{S-a_3+1}.$$

$$\dots\dots\dots \frac{a_n}{S-a_1+1} \geq \frac{a_n}{S-a_n+1} \quad (n).$$

Cộng vế theo vế n bất đẳng thức từ (1) đến n ta có

$$\begin{aligned} \frac{1+a_2+a_3+\dots+a_n}{S-a_1+1} &\geq \frac{a_1}{S-a_1+1} + \frac{a_2}{S-a_2+1} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n+1} + (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \\ \Leftrightarrow \frac{1+S-a_1}{S-a_1+1} &\geq \frac{a_1}{S-a_1+1} + \frac{a_2}{S-a_2+1} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n+1} + (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \frac{a_1}{S-a_1+1} + \frac{a_2}{S-a_2+1} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n+1} + (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Ví dụ 6:

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$P = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \quad (1).$$

Chứng minh:

Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a = \max\{a; b; c\}$. Ta xem P là đa thức bậc 3 theo ẩn a với hệ số bậc cao nhất là b.

Ta có $P(b) = b^2c(b-c) + c^2b(b-c) = bc(b-c)^2$. Tương tự $P(c) = bc(b-c)^2$. Theo định lý Bezu về sự phân tích đa thức ta có $P(a)$ có cùng số dư khi chia cho $a-b$ và $a-c$ là $bc(b-c)^2$. Vậy ta có:

$$P(a) = b(a-b)(a-c) + bc(b-c)^2 \quad (2).$$

Số hạng tự do của đa thức ẩn a trong (1) là $b^2c(b-c)$, trong (2) là $-b^2cx + bc(b-c)^2$. So sánh hệ số tự do ta

được $x = \frac{c(c-b)}{b}$. Từ đó thay vào (2) ta được :

$$P = a(b+c-a)(b-c)^2 + b(a-b)(a-c)(a+b-c).$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có $P \geq 0$. $P = 0$ khi $a = b = c$.

Ví dụ 7:

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z, n thỏa mãn đẳng thức: $x! + y! + z! = 5.n!$ (1), trong đó ký hiệu $k! = 1.2.3....k$

Giải:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó từ (1) ta có $5.n! < 3.x! < 5.x!$. Suy ra $n < x \Rightarrow n+1 \leq x$. Cũng từ (1) ta có $5.n! > x! \geq (n+1)! \Rightarrow 5 > n+1 \Rightarrow n < 4$. Vậy $n \in \{1; 2; 3\}$.

• Với $n = 1$ thì $x! + y! + z! = 5 \Rightarrow x \leq 2$:

+ Nếu $x = 1$ thì $y = z = 1$ do $x \geq y \geq z$ (không thỏa mãn (1)).

+ Nếu $x = 2$ thì $y! + z! = 3$ mà $2 \geq y \geq z$ nên $y = 2; z = 1$. Vậy $(x; y; z) = (2; 2; 1)$.

• Với $n = 2$ thì $x! + y! + z! = 10 \Rightarrow x \leq 3$. Bằng phương pháp thử tương tự ta có $(x; y; z) = (3; 2; 2)$.

• Với $n = 3$ thì $x! + y! + z! = 30 \Rightarrow x \leq 4$. Trường hợp này ta không tìm được bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn.

Tóm lại ta có các bộ $(x; y; z) = (2; 2; 1); (x; y; z) = (3; 2; 2)$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 8:

Tìm GTLN của biểu thức $A = \frac{mn}{(m+1)(n+1)(m+n+1)}$ trong đó m, n là các số tự nhiên.

Giải:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m \leq n$.

Nếu $m = 0$ thì $A = 0$.

Nếu $m = 1$ thì $A = \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có $(n+1) \geq 2\sqrt{n}; (n+2) \geq 2\sqrt{n.2}$, suy ra $(n+1)(n+2) > 4n\sqrt{2}$ (do dấu (=) không xảy ra).

Nên $A < \frac{1}{8\sqrt{2}}$. A không đạt GTLN trong trường hợp này.

Nếu $2 \leq m \leq n$ thì ta có: $\frac{1}{A} = m+n+3 + \frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$; $\frac{m}{8} + \frac{n}{8} + \frac{1}{mn} \geq \frac{3}{4}$; $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{2}{m} + \frac{2}{n} \geq 4$. Đẳng thức xảy ra khi $m = n = 2$ (kỹ thuật dùng để phân tích trên là kỹ thuật chọn điểm rơi).

Cuối cùng vì $m \geq 2; n \geq 2$ nên $\frac{3m}{8} + \frac{3n}{8} \geq \frac{3}{2}$. Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{A} = m+n+3 + \frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq \frac{45}{4} \Rightarrow A \leq \frac{4}{45}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } m = n = 2.$$

Vậy GTLN của A là $\frac{4}{45}$ đạt được khi $m = n = 2$.

Ví dụ 9:

Tìm GTLN và GTN N của biểu thức $P = \max\{a; b; c\} - \min\{a; b; c\}$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2$.

Giải:

Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có: $P = a - c \geq 0$.

Từ hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, kết hợp với giả thiết ta có

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1$. Cũng từ $a + b + c = 2$ nên ta có:

$$4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a + b + c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - c)^2 = 2ab + 2bc - b^2.$$

$$P^2 = (a - c)^2 = b(2a + 2c - b) = b(4 - 3b) = -3\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3}.$$

Vậy GTLN của P là $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a + b + c = 2 \\ a - c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2 + \sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \end{cases}$ và các hoán vị.

Ví dụ 10:

Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn hai điều kiện $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$.

Giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a > b > c$. Lúc đó A được viết lại như sau:

$$A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Sử dụng BĐT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right) + \frac{2}{c-a} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} = 10\left(\frac{1}{a-c} + \frac{1}{\sqrt{4(ab+bc+ca)}}\right) \\ &\geq 10\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}}\right) = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$3(1-b)(1+3b) \leq \left(\frac{3-3b+1+3b}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow (1-b)(1+3b) \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{(1-b)(1+3b)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó ta có $A \geq 10\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a - b = b - c; 3 - 3b = 1 + 3b; a + b + c = 1$.

Tìm được $a = \frac{2 + \sqrt{6}}{6}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{2 - \sqrt{6}}{6}$.

Vậy GTNN của A là $10\sqrt{6}$ khi và chỉ khi $a = \frac{2+\sqrt{6}}{6}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{2-\sqrt{6}}{6}$ và các hoán vị.

Bài tập đề nghị:

1) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

2) Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a(a-c)^2 + b(b-c)^2 \geq (a-c)(b-c)(a+b-c).$$

3) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{c} + \frac{b^2c}{a} + \frac{c^2a}{b} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

§4. BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ VÀ ỨNG DỤNG.

1. Ví dụ mở đầu.

Trước khi đi vào nội dung ta xét bài toán thực tế sau:

Tại trạm bơm xăng dầu có một chiếc xe hơi và một chiếc xe tải cần bơm đầy xăng. Giả sử thời gian bơm đầy xăng của xe hơi, xe tải lần lượt là 10 phút và 15 phút. Hỏi người bán xăng nên bơm theo trình tự nào để tổng thời gian cần bơm là nhỏ nhất.

Người bán xăng có thể có hai cách bơm:

Cách 1: Bơm đầy xăng xe tải mất 15 phút, xe hơi chờ mất 15 phút để bơm đầy cho xe tải, sau đó mất 10 phút để bơm cho xe hơi. Vậy tổng thời gian hao phí là:

$$15 + 15 + 10 = 40 \text{ phút.}$$

Cách 2: Bơm đầy xăng xe hơi mất 10 phút, xe tải chờ mất 10 phút để bơm đầy cho xe hơi, sau đó mất 15 phút để bơm cho xe tải. Vậy tổng thời gian hao phí là:

$$10 + 10 + 15 = 35 \text{ phút.}$$

Như vậy người bán xăng nên bơm cho xe hơi trước để tiết kiệm thời gian hao phí.

Đây là bài toán nhỏ thể hiện một vấn đề toán học là biểu thức hoán vị đạt cực trị tại thời điểm nào?

1. Bất đẳng thức hoán vị.

Trước khi đưa ra bất đẳng thức hoán vị ta có các định lý sau:

Định lý 1:

Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp theo thứ tự cùng chiều, chẳng hạn là hai dãy đơn điệu tăng:

$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ là một hoán vị bất kỳ của $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$. Khi đó ta có

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n \geq a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 + \dots + a_nt_n. (1)$$

Chứng minh:

Với $n=2$: Ta có hai dãy gồm hai phần tử $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq b_2 \end{cases}$.

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_1, b_2)$ thì trong (1) xảy ra dấu (=).

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_2, b_1)$ thì $a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1t_1 + a_2t_2) = a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$

Với $n>2$ ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

Giả sử (1) đúng tới $n-1$, ta sẽ chứng minh (1) đúng tới n .

Thật vậy

$$\text{Đặt } b_1 = t_k \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq a_k \\ t_k = b_1 \leq t_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 t_1 + a_k t_k = a_1 t_1 + a_k b_1 \leq a_1 t_1 + a_k t_1 \quad (a)$$

Sử dụng nguyên lý quy nạp ta có:

$$a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \dots + a_n t_n \leq a_2 b_2 + \dots + a_{k-1} b_{k-1} + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \dots + a_n b_n \quad (b)$$

Cộng vế theo vế (a) và (b) ta được:

$$\begin{aligned} a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots + a_n t_n &\leq a_1 b_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \dots + a_n t_n \\ &\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Định lý 2:

Cho hai dãy số thực được sắp ngược chiều, chẳng hạn $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ là một hoán vị

bất kỳ của $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$. Khi đó ta có:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots + a_n t_n \quad (2)$$

Chứng minh:

Ta dùng kết quả định lý 1 bằng cách sau:

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \\ -b_1 \leq -b_2 \leq -b_3 \leq \dots \leq -b_n \end{cases}$$

Từ kết quả định lý 1 ta có: $a_1(-b_1) + a_2(-b_2) + a_3(-b_3) + \dots + a_n(-b_n) \geq a_1(-t_1) + a_2(-t_2) + a_3(-t_3) + \dots + a_n(-t_n)$

Hay $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots + a_n t_n$ (đpcm).

Bất đẳng thức hoán vị:

Giả sử có hai dãy số thực được sắp thứ tự cùng chiều là:

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

$(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$.

Đặt $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$; $F = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$; $T = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots + a_n t_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức: $F \leq T \leq S$ (3)

Bất đẳng thức (3) được gọi là bất đẳng thức hoán vị.

Dấu (=) xảy ra trong (3) khi và chỉ khi một trong hai dãy là dãy dừng, nghĩa là $a_1 = \dots = a_n$ hoặc $b_1 = \dots = b_n$.

Vì có $n!$ các biểu thức T ứng với số các hoán vị của bộ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nên có tất cả $n!$ bất đẳng thức trong (3).

2. Ứng dụng của bất đẳng thức hoán vị vào chứng minh bất đẳng thức.

Bất đẳng thức hoán vị được sử dụng đối với những bài toán có dạng hoán vị vòng quanh dưới dạng tích của hai dãy số. chúng ta cần chỉ ra tính tăng giảm trong hai dãy số để sử dụng dạng (1) hay là (2). Sau đây ta theo dõi các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{BĐT Nesbit}).$$

Chứng minh: Có nhiều cách để chứng minh BĐT này, sau đây ta sử dụng BĐT hoán vị để chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $b+c \leq c+a \leq a+b \Rightarrow \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

Áp dụng BĐT hoán vị ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \text{ và } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

Cộng vế theo vế ta có :

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 2 (Thi Toán quốc tế 1975)

Cho $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$. Gọi $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2.$$

Chứng minh:

Ta có $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$. Áp dụng BĐT hoán vị ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots + a_n c_n.$$

$$\text{Do đó } \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i c_i = \sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2 \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3:

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$a + b + c \leq \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} + \frac{a^2 + b^2}{2c} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ và $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$.

Áp dụng BĐT hoán vị cho hai dãy ngược chiều ta có :

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{b} + b^2 \cdot \frac{1}{c} + c^2 \cdot \frac{1}{a} \text{ và } a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b}.$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được : } 2(a + b + c) \leq \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c}.$$

$$\text{Ta lại có } a \geq b \geq c \text{ suy ra } a^3 \geq b^3 \geq c^3 \text{ và } \frac{1}{bc} \geq \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{ab}.$$

Áp dụng BĐT hoán vị cho hai dãy cùng chiều ta có được :

$$a^3 \cdot \frac{1}{bc} + b^3 \cdot \frac{1}{ca} + c^3 \cdot \frac{1}{ab} \geq a^3 \cdot \frac{1}{ac} + b^3 \cdot \frac{1}{ab} + c^3 \cdot \frac{1}{bc} \text{ và } a^3 \cdot \frac{1}{bc} + b^3 \cdot \frac{1}{ca} + c^3 \cdot \frac{1}{ab} \geq a^3 \cdot \frac{1}{ab} + b^3 \cdot \frac{1}{bc} + c^3 \cdot \frac{1}{ca}.$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta thu được : } \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} + \frac{a^2 + b^2}{2c}.$$

Kết hợp lại ta được BĐT cần chứng minh.

Ví dụ 4 :

Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng :

$$\frac{2a^3 - b^3 - c^3}{b^2 + c^2} + \frac{2b^3 - c^3 - a^3}{c^2 + a^2} + \frac{2c^3 - a^3 - b^3}{a^2 + b^2} \geq 0 \text{ (1).}$$

Giải :

Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 < a \leq b \leq c$, suy ra $a^3 \leq b^3 \leq c^3$ (2) và $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Từ đó suy ra

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + c^2 \leq b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{a^2 + c^2} \geq \frac{1}{b^2 + c^2} \quad (3).$$

Áp dụng BĐT hoán vị cho hai dãy ngược chiều (2) và (3) ta có.

$$\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\geq\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Và
$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{c^2+a^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{b^3}{a^2+b^2} + \frac{c^3}{b^2+c^2} + \frac{a^3}{c^2+a^2}.$$

Cộng vế theo vế hai BĐT cuối ta được :

$$\frac{2a^3}{b^2+c^2} + \frac{2b^3}{c^2+a^2} + \frac{2c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^3-b^3-c^3}{b^2+c^2} + \frac{2b^3-c^3-a^3}{c^2+a^2} + \frac{2c^3-a^3-b^3}{a^2+b^2} \geq 0 \text{ (đpcm)}.$$

Một trong những ví dụ kinh điển của việc áp dụng BĐT hoán vị là chứng minh BĐT Trê-bư-sép. Ta hãy theo dõi việc chứng minh qua ví dụ sau :

Ví dụ 5 : (BĐT Trê-bur-sép).

Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng :

1) Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ thì ta có :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \quad (1).$$

2) Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ thì ta có :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \quad (2).$$

Chứng minh :

1) Trường hợp 1) là hai dãy biến thiên cùng chiều nên áp dụng BĐT hoán vị ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1 \\ \vdots \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1} \end{array} \right.$$

Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều ta có :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

2) Chứng minh (2) hoàn toàn tương tự nhưng áp dụng BĐT hoán vị cho hai dãy biến thiên ngược chiều nên ta thu được BĐT đối chiều.

Dấu (=) trong (1) và (2) xảy ra khi và chỉ khi một trong hai dãy $a_1; a_2; \dots; a_n$ hoặc $b_1; b_2; \dots; b_n$ là dãy dừng.

Ví dụ 6 (IMO 64)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc \quad (1).$$

Giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$

$$(1) \Leftrightarrow a(a^2 + bc) + b(b^2 + ac) + c(c^2 + ab) \geq a(b^2 + ac) + b(c^2 + ab) + c(a^2 + bc) \quad (2).$$

Ta cần phải chứng minh (2).

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là $a \geq b \geq c$.

+ Với $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \\ a^2 + bc \geq b^2 + ca \end{cases}$. Áp dụng BĐT hoán vị ta có :

$$a(a^2 + bc) + b(b^2 + ac) \geq a(b^2 + ac) + b(a^2 + bc). \quad (3)$$

+ Với $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq c \end{cases} \Rightarrow ab + c^2 \geq ac + bc \Rightarrow c(ab + c^2) \geq c(ac + bc). \quad (4).$

Cộng vế theo vế (3) và (4) ta thu được (2). Do đó (1) được chứng minh.

Ví dụ 7: (IMO 1978)

Cho $a_1; a_2; \dots; a_n$ là n số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Giải:

Gọi $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ là một hoán vị của $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ sao cho $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Lúc đó ta có $b_k \geq k; \forall k = \overline{1; n}$. Ta

cũng có $\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \dots > \frac{1}{n^2}$ cho nên áp dụng BĐT hoán vị ta có :

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{b_1}{1^2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Vì các số thực phân biệt nên dấu (=) không xảy ra trong BĐT trên.

Bây giờ ta sẽ áp dụng BĐT hoán vị vào chứng minh BĐT giữa các yếu tố trong tam giác. Trước hết ta có những nhận định sau:

Cho tam giác ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh lần lượt đối diện với các đỉnh A, B, C . Gọi $l_a; l_b; l_c$ và $m_a; m_b; m_c$ lần lượt là các phân giác và các trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C . Khi đó ta có:

$$a) \quad a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b.$$

$$b) \quad m_a \leq m_b \Leftrightarrow l_a \leq l_b.$$

Chứng minh:

$$a) \quad \text{Áp dụng công thức diện tích tam giác ta có được } l_a = \frac{2S}{(b+c)\sin \frac{A}{2}}. \text{ Tương tự ta có được } l_b = \frac{2S}{(a+c)\sin \frac{B}{2}}.$$

Do đó :

$$l_a \geq l_b \Leftrightarrow (b+c)\sin \frac{A}{2} \leq (c+a)\sin \frac{B}{2} \Leftrightarrow (\sin B + \sin C)\sin \frac{A}{2} \leq (\sin C + \sin A)\sin \frac{B}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \sin C(\sin \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2}) + 2\sin \frac{A}{2}\sin \frac{B}{2}(\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2}) \geq 0 (*)$$

Nếu như $a \geq b$ thì $\frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2}$ và $\cos \frac{A}{2} \leq \cos \frac{B}{2}$ (*) không thỏa mãn. Vậy $a \leq b$.

$$b) \quad m_a \leq m_b \Leftrightarrow m_a^2 \leq m_b^2 \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \leq \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow l_a \leq l_b.$$

4) Ứng dụng của đẳng thức Trê-bur-sep.

Trong phần trình bày trên ta có nói đến phép chứng minh BĐT Trê-bur-sep. Thực ra BĐT Trê-bur-sep là kết quả của việc áp dụng BĐT hoán vị, nhưng ứng dụng của nó vào việc chứng minh BĐT là thường xuyên. Vì thế ta cần xét những ứng dụng của nó theo một chủ đề riêng biệt.

Để áp dụng được BĐT Trê-bur-sep, BĐT phải có dạng hoán vị vòng quanh, và chúng ta phải chỉ ra đó là tích của các số hạng của hai dãy đơn điệu.

Kỹ thuật thường xuyên sử dụng đó là giả sử $a \geq b \geq c$ hoặc $a \leq b \leq c$.

Sau đây ta cùng theo dõi các ứng dụng của nó:

Ví dụ 1:

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - bc}{3a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{3b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{3c^2 + a^2 + b^2} \leq 0 \quad (1)$$

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó ta chứng minh được $(a^2 - bc)(b + c) \geq (b^2 - ca)(c + a) \geq (c^2 - ab)(a + b)$. (1)

Trong tam giác ta dễ ý rằng $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a(b + c - a) + b(c + a - b) + c(a + b - c) > 0$.

Bây giờ ta xét:

$$(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c) - (3b^2 + c^2 + a^2)(a + c) = (a - b)[2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)] \geq 0.$$

Do đó $(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c) \geq (3b^2 + c^2 + a^2)(a + c)$ (2)

Tương tự: $(3b^2 + c^2 + a^2)(a + c) \geq (3c^2 + a^2 + b^2)(a + b)$ (3).

Từ (1), (2), (3) áp dụng BĐT Trê-bur-sep cho hai dãy:

$$(a^2 - bc)(b + c) \geq (b^2 - ca)(c + a) \geq (c^2 - ab)(a + b)$$

$$\text{Và } \frac{1}{(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c)} \leq \frac{1}{(3b^2 + c^2 + a^2)(c + a)} \leq \frac{1}{(3b^2 + c^2 + a^2)(c + a)}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} VT(1) &= \frac{(a^2 - bc)(b + c)}{(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c)} + \frac{(b^2 - ca)(c + a)}{(3b^2 + c^2 + a^2)(c + a)} + \frac{(c^2 - ab)(a + b)}{(3b^2 + c^2 + a^2)(c + a)} \leq \\ &\leq \frac{1}{3} [(a^2 - bc)(b + c) + (b^2 - ca)(c + a) + (c^2 - ab)(a + b)] \\ &\quad \left[\frac{1}{(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c)} + \frac{1}{(3b^2 + c^2 + a^2)(c + a)} + \frac{1}{(3b^2 + c^2 + a^2)(c + a)} \right] = 0 \end{aligned}$$

(vì $[(a^2 - bc)(b + c) + (b^2 - ca)(c + a) + (c^2 - ab)(a + b)] = 0$)

BĐT được chứng minh.

Bài tập đề nghị:

1) Với các ký hiệu như ví dụ 7 ở trên, chứng minh rằng:

$$a) \quad al_a + bl_b + cl_c \leq al_b + bl_c + cl_a.$$

$$b) \quad \frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} \geq \frac{l_a}{b} + \frac{l_b}{c} + \frac{l_c}{a}.$$

$$c) \quad m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq m_a l_b + m_b l_c + m_c l_a.$$

$$d) \frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \leq \frac{l_a}{m_b} + \frac{l_b}{m_c} + \frac{l_c}{m_a}.$$

2) Ngoài ra ta còn có các kết quả sau trong tam giác:

$$a) \frac{a.A+b.B+c.C}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3} \text{ (tam giác bất kỳ).}$$

$$b) \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{1}{3 \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C} \text{ (tam giác nhọn).}$$

$$c) a \cos A + b \cos B + c \cos C \leq \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ (tam giác bất kỳ).}$$

$$d) 18S \leq (a+b+c)(h_a + h_b + h_c) \text{ (tam giác bất kỳ).}$$

§5. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐẠI DIỆN.

Trong quá trình chứng minh BĐT, ta gặp những bài toán mà biểu thức cần chứng minh là tổng của các biểu thức có dạng tương tự nhau. Lúc đó ta sẽ đánh giá một biểu thức, các biểu thức còn lại có kết quả tương tự. Phương pháp như vậy ta gọi là **Phương pháp đánh giá đại diện**.

Cái cốt lõi trong phương pháp này là ta phải biết đại diện đó được đánh giá như thế nào. Muốn vậy ta cần kết hợp với giả thiết đã cho, về phải cần đạt, các bất đẳng thức cơ bản và **cái nhìn tinh tế** để sau khi cộng về theo về ta có thể thu được kết quả mong muốn. Do đó ta cần có kỹ năng nhất định về đánh giá đại diện mà nói nôm na là “quen”. Tuy nhiên cần phải nói tới là sự phán đoán và con mắt quan sát để đưa ra đánh giá.

Bài viết nhỏ này nhằm cung cấp một số kỹ năng cho việc đánh giá đại diện thông qua các ví dụ minh họa điển hình.

Ví dụ 1:

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 1$.

Giải:

Phân tích: Ta thấy về phải là 1, cũng tức là $\frac{a+b+c}{a+b+c}$. Với nhận định như vậy ta có thể đưa ra đánh giá đại diện:

$\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b}{a+c} > \frac{b}{a+b+c} \text{ và } \frac{c}{a+b} > \frac{c}{a+b+c}.$$

Cộng về theo về ta được: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 1$.

Nhận xét: Đây là ví dụ đơn giản, khởi đầu cho phương pháp đánh giá đại diện.

Dĩ nhiên ta chứng minh được bất đẳng thức chặt hơn đó là:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{BĐT Nesbit}).$$

Ví dụ 2 (Đề 35, bộ đề 93)

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3} \quad (1).$$

Giải:

Phân tích: Với phương pháp đánh giá đại diện, đầu tiên ta thường nghĩ tới việc đánh giá

$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a}{3}$ (hoặc $\geq \frac{b}{3}$ hoặc $\geq \frac{c}{3}$). Tuy nhiên sau khi kiểm tra ta thấy đánh giá đó chưa đúng. Lúc đó ta nghĩ tới đại diện khác là $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3}$ (2).

Thật vậy : (2) $\Leftrightarrow 3a^3 \geq (a^2+ab+b^2)(2a-b) \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$ (đúng).

Tương tự ta có: $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{3}$ (3) và $\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2c-a}{3}$.

Cộng vế theo vế (2), (3) và (4) ta có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.

Tại sao trong (2) lại chọn đại lượng cần đánh giá là $\frac{2a-b}{3}$. Điều này được giải thích là vì bên VT chỉ có biến a và b nên VP cũng chỉ có a và b. Hơn nữa ta cần ước lượng để sau khi cộng vế theo vế ra đúng $\frac{a+b+c}{3}$.

Ví dụ 3: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$.

Giải:

Đây là bài toán mà một học sinh lớp 10 đã hỏi tôi. Lúc xem đề tôi nghĩ là chứng minh bằng áp dụng BĐT Cô-si. Nhưng ngay sau đó tôi nghĩ tới phương pháp đánh giá đại diện. Cũng như ví dụ trên, tôi cố gắng chứng minh $\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \sqrt{3}.x$ (hoặc $\geq \sqrt{3}.y$ hoặc $\geq \sqrt{3}.z$) nhưng tất cả đều không cho kết quả. Sau đó tôi nghĩ tới đại diện khác là:

$\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ (2) và lần này thu được kết quả mong muốn.

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \sqrt{3}(x+y) \Leftrightarrow 4(x^2+xy+y^2) \geq 3(x+y)^2$
 $\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có: $\sqrt{y^2+yz+z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)$ (3).

và $\sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x)$ (4).

Cộng vế theo vế (2), (3) và (4) ta được:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z) \text{ (đpcm)}.$$

Để đưa ra việc đánh giá với $\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ là để sau khi cộng vế theo vế ta được $\sqrt{3}(x+y+z)$.

Tất nhiên khi làm toán ta cần phải mò mẫm để đưa ra lời giải đúng, nhiều khi có cả sự thất bại. Những lúc đó cần có sự kiên trì.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng với n là số nguyên dương ta có:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

$$c) \frac{3n+1}{2(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Chứng minh:

a) Ta thấy khi $n=1$ thì xảy ra dấu (=).

Khi $n>1$ ta đánh giá đại diện như sau:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \text{ với } k \geq 2.$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + 2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 2\sqrt{n} - 1.$$

Vậy BĐT được chứng minh.

b) Ta nhận thấy mỗi số thừa số đều có dạng $\frac{2k-1}{2k}$, ta đánh giá đại diện như sau:

$$\left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 = \frac{(2k-1)^2}{(2k)^2} < \frac{(2k-1)^2}{(2k)^2 - 1} = \frac{2k-1}{2k+1}, \text{ với } 1 \leq k \leq n.$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right)^2 < \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2}{2n(2n+1)} < \frac{1}{2n+1}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 5:

Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng :

$$a) \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

$$b) \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)$$

Chứng minh:

a) Trước hết ta có: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b) + abc} = \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{abc(a + b + c)} \quad (1)$$

$$\text{Lập luận tương tự ta có: } \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)} = \frac{a}{abc(a + b + c)}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ac(a + b + c)} = \frac{b}{abc(a + b + c)} \quad (3).$$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{a + b + c}{abc(a + b + c)} = \frac{1}{abc}.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$$b) \text{ Ta có } \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = (a + b) \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}(a + b) \quad (2) \quad \left(\forall \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3} \right).$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{1}{3}(b + c) \quad (3)$$

$$\frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{1}{3}(a + c) \quad (4).$$

Cộng vế theo vế (2), (3), (4) ta được :

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2}{3}(a + b + c) \text{ (đpcm).}$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6:

Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(Đề thi HSG tỉnh Đồng Nai)

Chứng minh:

Ta đánh giá đại diện $\frac{x}{1-x^2}$ như sau:

$$\text{Ta có } 2x^2(1-x^2)(1-x^2) \leq \left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 \Rightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{1-x^2} = \frac{x^2}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{y}{1-y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2 \text{ và } \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2.$$

Cộng vế theo vế ta được :

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nhận xét: Với giả thiết $xy + yz + zx = 1$ và $0 < x, y, z < 1$ ta có thể nghĩ tới việc đặt

$$x = \tan \alpha; y = \tan \beta; z = \tan \gamma \text{ với } \alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

Bài tập đề nghị :

$$1) \quad \text{Chứng minh rằng với } a, b, c, d > 0 \text{ thì: } 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+a+b} < 2.$$

$$2) \quad \text{Chứng minh với } n \text{ nguyên dương ta có } \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

$$3) \quad \text{Chứng minh rằng nếu } a, b, c \text{ là độ dài ba cạnh của tam giác và } x, y, z \text{ là độ dài các đường phân giác trong thì } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

§6. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH.

I. Giới thiệu phương pháp hệ số bất định:

Chúng ta vẫn thường áp dụng phương pháp hệ số bất định trong việc phân tích tổng bình phương để giải phương trình, trong tính nguyên hàm và tích phân, trong khi viết phương trình đường thẳng, mặt phẳng, trong khử dạng vô định của giới hạn vv... Đó là những phạm vi quen thuộc.

Trong bài viết này tôi xin trình bày phương pháp hệ số bất định được dùng trong việc chứng minh BĐT. Chúng ta vẫn còn nhớ trong phương pháp đánh giá đại diện, chúng ta thường gặp khó khăn khi đánh giá đại diện đó như thế nào? Bài viết này nhằm cung cấp một phương pháp nhỏ để mở đầu những suy nghĩ có thể áp dụng trong những tình huống như thế.

Qua bài viết này, ta thấy được toàn bộ quá trình tư duy đi tìm lời giải cho các bài toán, do đó ta thấy được các lời giải là tự nhiên và gần gũi chứ không hề xa lạ.

Cách trình bày của mỗi ví dụ, tác giả chú trọng sự phân tích, bình luận cho quá trình tìm lời giải chứ việc trình bày bài giải chỉ là sắp xếp lại mà thôi.

Chúng ta hình thành phương pháp qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng với các số dương a, b, c thì :

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c \quad (1).$$

Chứng minh:

Phân tích bài toán:

Cấu trúc bài toán này gợi cho ta phương pháp đánh giá đại diện. Bây giờ ta đánh giá thử đại diện $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2}$. Ta thấy rằng bậc của tử là 3, bậc của mẫu là 2. Suy ra bậc của cả biểu thức là 1. Do đó ta nghĩ tới việc đánh giá với đa thức bậc 1 có dạng $\alpha a + \beta b$. Tức là

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq \alpha a + \beta b \quad (2). \text{ Để tìm } \alpha; \beta \text{ ta sử dụng phương pháp hệ số bất định.}$$

Do vai trò tương tự ta cũng có $\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq \alpha b + \beta c$ và $\frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq \alpha c + \beta a$.

Cộng vế theo vế ba BĐT đánh giá ở trên ta được :

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq (\alpha + \beta)(a + b + c) \quad (3).$$

Nhìn vào BĐT cần chứng minh ta thấy nếu tìm được cặp $(\alpha; \beta)$ mà $\alpha + \beta = 1$ là lời giải thành công. Thế

$\beta = 1 - \alpha$ vào (2) ta có: $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$ (4). BĐT (4) phải đúng với mọi giá trị a, b nên ta thay những giá trị đặc biệt.

Cho $a = 1; b = 2$ ta được $\alpha \leq -\frac{11}{14}$.

Chọn $a = 2; b = 1$ ta được $\alpha \geq -\frac{8}{5}$.

Từ đó ta có thể chọn $\alpha = -1$, suy ra $\beta = 2$.

Như vậy ta có đánh giá $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq -a + 2b$. Việc chứng minh BĐT này là đơn giản.

Như vậy , bằng phương pháp hệ số bất định , đã mở cho ta còn đường đi tìm lời giải cho bài toán trên một cách tự nhiên chứ không theo kiểu áp đặt giống như kiểu hay gặp ở hầu hết các cuốn sách : " *Ta sẽ chứng minh:*

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq -a + 2b "$$

Ví dụ 2:

Cho các số dương a, b, c , chứng minh rằng $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Phân tích:

Bất đẳng thức này ta đã gặp trong ví dụ 2c) của bài §2. Bây giờ nếu sử dụng phương pháp đánh giá đại diện bằng kỹ thuật hệ số bất định ta có thể đưa ra đánh giá $\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$. Các đại diện khác được đánh giá tương tự. Từ đó cho ta kết quả của bài toán một cách nhanh chóng.

Ví dụ 3:

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5. (1)$$

Phân tích :

Cấu trúc bài toán dẫn đến việc suy nghĩ đánh giá một đại diện là $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3}$. Sẽ có một suy nghĩ tự nhiên xuất

hiện khi quan sát về phải đó là đánh giá $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} (2)$.

Tuy nhiên nếu phân tích kỹ ta thấy nếu suy nghĩ đó đúng thì dẫn tới giả thiết $a+b+c=3$ là thừa(!). Và thực tế kiểm chứng điều suy nghĩ đó là chưa đúng vì ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này không đúng với mọi } a > 0.$$

Do đó ta đánh giá lại như sau:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + xa + y (3). \text{ Tương tự } \frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{5}{3} + xb + y (4) \text{ và } \frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{5}{3} + xc + y (5).$$

Cộng vế theo vế (3),(4), (5) ta thu được :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5 + x(a+b+c) + 3y = 5 + 3(x+y). (6)$$

So sánh vế phải của (6) và (1) ta cần có $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$, thế vào (3) ta được :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + x(a-1). (7)$$

Vấn đề còn lại là phải xác định được x để (7) đúng với mọi a .

Ta thấy dấu (=) xảy ra khi $a=b=c=1$ (thông thường là như thế với BĐT có các biến bình đẳng). Do đó gọi cho ta khi biến đổi (7) sẽ xuất hiện nhân tử $(a-1)$. Quả vậy:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + x(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left(\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} - x \right) \geq 0.$$

Cho $a = 1$ ta tìm được $x = -\frac{2}{3}$.

Cuối cùng cần kiểm chứng $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$. (8) là xong.

Đúng vậy : $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2} \geq 0$ (luôn đúng với $a > 0$).

Đến đây quá trình mò mẫm đi tìm lời giải cho bài toán đã được hoàn thành.

Ví dụ 4:

Cho $a, b, c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 \geq 1$. Chứng minh rằng $5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27 - 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. (1)

Phân tích bài toán:

Ta có $5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27 - 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow 5(a^2 + b^2 + c^2) + 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 27$. (2)

Ta đưa ra đánh giá $5a^2 + \frac{4}{a} \geq 9 + x(a^3 - 1)$. (2).

Vì sao trong (2) ta không đánh giá : $5a^2 + \frac{4}{a} \geq 9 + xa^3$.

Bởi vì ta thấy dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Do đó khi thay $a = 1$ thì $5a^2 + \frac{4}{a} - 9 = 0$. Nghĩa là trong nhóm $5a^2 + \frac{4}{a} - 9$ đã tự xuất hiện nhân tử $(a - 1)$. Chính vì lẽ đó nên ta sử dụng luôn $x(a^3 - 1)$ để xuất hiện nhân tử chung $(a - 1)$.

Trở lại (2) ta có $5a^2 + \frac{4}{a} \geq 9 + x(a^3 - 1) \Leftrightarrow (a - 1)\left(\frac{5a^2 + 5a - 4}{a} - x(a^2 + a + 1)\right) \geq 0$. Cho $a = 1$ thì

$\frac{5a^2 + 5a - 4}{a} - x(a^2 + a + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$. Ta dự đoán với $x = 2$ thì (2) sẽ đúng và cần đi kiểm chứng.

Khi đó (2) trở thành $5a^2 + \frac{4}{a} \geq 7 + 2a^3 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(-2a^2+a+4)}{a} \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối đúng vì từ giả thiết ta suy ra $0 < a < \sqrt[3]{3} \Rightarrow -2a^2 + a + 4 < 0$.

Như vậy ta có lời giải cho bài toán trên.

Ví dụ 5: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Vĩnh Phúc 2006)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2}(a + b + c) \geq \frac{15}{2} \quad (1).$$

Phân tích:

Từ điều kiện của giả thiết ta suy ra $a, b, c \in (0; \sqrt{3})$. Sử dụng phương pháp hệ số bất định và đánh giá đại diện, đồng thời kết hợp giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, ta đánh giá:

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{2}a \geq x(a^2 - 1) + \frac{5}{2} \quad (2); \quad \frac{1}{b} + \frac{3}{2}b \geq x(b^2 - 1) + \frac{5}{2} \quad (3); \quad \frac{1}{c} + \frac{3}{2}c \geq x(c^2 - 1) + \frac{5}{2} \quad (4).$$

Sở dĩ ta chọn nhân tử $x(a^2 - 1)$ vì ta dự đoán dấu (=) xảy ra khi $a = b = c = 1$, và khi đó $\frac{1}{a} + \frac{3}{2}a - \frac{5}{2}$ có nhân tử $(a - 1)$

Xét tiếp (2) :

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{2}a \geq x(a^2 - 1) + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{2}a - \frac{5}{2} \geq x(a^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)(3a-2)}{2a} \geq x(a^2 - 1).$$

$$(a-1) \left[\frac{3a-2}{2a} - x(a+1) \right] \geq 0.$$

Thay $a = 1$ ta tìm được $x = \frac{1}{4}$. Như vậy ta có đánh giá:

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{2}a \geq \frac{1}{4}(a^2 - 1) + \frac{5}{2} \text{ hay là } \frac{1}{a} + \frac{3}{2}a \geq \frac{a^2}{4} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(a-4)}{4a} \leq 0 \text{ (BDT đúng)}.$$

Vậy ta đã tìm ra được lời giải cho bài toán trên.

Bài tập đề nghị :

1) Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng : $\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c$.

2) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh:

$$\frac{4a}{b + c - a} + \frac{9b}{c + a - b} + \frac{16c}{a + b - c} \geq 26.$$

3) Cho các số thực dương a, b, c và $a + b + c = 3$. Chứng minh : $\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq \frac{3}{2}$.

4) Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 2$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{3a^2 + 1} + \frac{1}{3b^2 + 1} + \frac{1}{3c^2 + 1} + \frac{1}{3d^2 + 1} \geq \frac{16}{7}$$

§7. CHUẨN HÓA TRONG BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT.

Trên đây ta đã thấy được phương pháp hệ số bất định cho ta lời giải rất tự nhiên của việc chứng minh bất đẳng thức. Tuy nhiên các ví dụ được nêu ra ở trên tương đối đơn giản. Khi gặp những bài toán phức tạp hơn, đặc biệt là những bài toán khá cồng kềnh, chúng ta cần làm đơn giản nó trước khi chứng minh. Một trong những kỹ thuật làm đơn giản đó là kỹ thuật **chuẩn hóa trong bất đẳng thức thuần nhất**.

Đặt vấn đề:

Ở đây ta đặt vấn đề cho đa thức thuần nhất ba biến, trường hợp nhiều biến được mở rộng tương tự.

Hàm số $f(x; y; z)$ được gọi là hàm số thuần nhất bậc k theo ba biến $(x; y; z)$ nếu $\forall t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f(tx; ty; tz) = t^k f(x; y; z) \quad (1).$$

Bất đẳng thức $f(x; y; z) \geq 0 \quad (2)$ được gọi là bất đẳng thức thuần nhất.

Giả sử bây giờ ta cần chứng minh $f(x; y; z) \geq 0$ với $x, y, z \in D$. Ta đặt $x = ta; y = tb; z = tc \quad (t > 0)$, khi đó ta có :

$f(x; y; z) \geq 0 \Leftrightarrow t^k f(a; b; c) \geq 0 \Leftrightarrow f(a; b; c) \geq 0 \quad (3)$, trong đó a, b, c là bộ số thỏa mãn một điều kiện đơn giản nào đó.

Như vậy từ việc chứng minh (2) với ràng buộc $x, y, z \in D$ ta chuyển về việc chứng minh (3) với ràng buộc nào đó của (a, b, c) . Quá trình chuyển đổi như vậy ta gọi là **phép chuẩn hóa**.

Thông thường trong bất đẳng thức thuần nhất (đồng bậc) ta thường sử dụng các phép chuẩn hóa sau :

$a + b + c = k$; $a^n + b^n + c^n = k$; $abc = k$; $ab + bc + ca = k$, trong đó k là hằng số , thường được chọn sao cho biểu thức trong bài toán trở nên đơn giản.

Bây giờ ta theo dõi kỹ thuật chuẩn hóa thông qua các ví dụ.

Ví dụ 1:

Giả sử a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}.$$

Chứng minh:

Ta thấy cả 2 vế là những biểu thức đồng bậc (bậc 1). Vậy đây là bất đẳng thức thuần nhất bậc 1.

Tuy nhiên trở ngại lớn nhất đó là sự xuất hiện của hai căn không đồng bậc. Muốn hữu tỷ hóa ta cần lũy thừa bậc 6 và cho biểu thức phức tạp. Vậy trước tiên ta cần làm đơn giản biểu thức nhờ kỹ thuật chuẩn hóa.

Chuẩn hóa $ab + bc + ca = 3$ thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8 \text{ (rất gọn!)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 8$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)3 - abc \geq 8.$$

Vì $ab + bc + ca = 3$ nên $abc \leq 1$. Do đó BĐT cần chứng minh tương đương :

$$\Leftrightarrow (a+b+c)3 \geq 9 \Leftrightarrow a+b+c \geq 3.$$

BĐT cuối đúng vì $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9$.

Nhận xét:

Nhờ kỹ thuật chuẩn hóa , ta đưa ra phép chọn $ab + bc + ca = 3$, từ đó ta thu được BĐT gọn hơn rất nhiều. Qua đó ta thấy tác dụng to lớn của phép chuẩn hóa trong BĐT thuần nhất.

Ví dụ 2 (VMO năm 2002- bảng B)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c thì ta có:

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 27abc + (a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

Chứng minh:

Phân tích:

Ở đây vì đại lượng $(a^2+b^2+c^2)$ có số mũ hữu tỉ nên ta chọn $a^2+b^2+c^2$ là số chính phương để $(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}$ là một số hữu tỉ, giúp cho biểu thức thu được gọn gàng hơn.

Ta chọn phép chuẩn hóa $(a^2+b^2+c^2) = 9$. Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành :

$$2(a+b+c) - abc \leq 10 \quad (2).$$

Chứng minh (2)

Không mất tính tổng quát ta giả sử $|a| \leq |b| \leq |c|$ (*)

Áp dụng BĐT B.C.S ta có

$$\begin{aligned} [2(a+b+c) - abc]^2 &= [2(a+b) + c(2-ab)]^2 \leq [(a+b)^2 + c^2][4 + (2-ab)^2] \\ &= (9+2ab)(4-4ab+a^2b^2) = 2(ab)^3 + (ab)^2 - 20ab + 72 = (ab+2)^2(2ab-7) + 100 \end{aligned}$$

Từ (*) ta có $c^2 \geq 3$ nên $2ab \leq a^2 + b^2 = 9 - c^2 \leq 6 \Rightarrow (ab + 2)^2 (2ab - 7) \leq 0$.

Như vậy ta có $[2(a + b + c) - abc]^2 \leq 100$ hay $2(a + b + c) - abc \leq 10$.

Ví dụ 3 :

Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ ta có :

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} \leq \frac{6}{5} \quad (\text{Olympic 30/4- 2006}).$$

Chứng minh:

Thực hiện phép chuẩn hóa $a + b + c = 3$. Bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+c^2} \leq \frac{6}{5}.$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta đánh giá :

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+a^2} \leq xa + y; \quad \frac{b(3-b)}{9-6b+b^2} \leq xb + y; \quad \frac{c(3-c)}{9-6c+c^2} \leq xc + y.$$

Bằng suy luận tương tự như ở trên ta tìm được $x = \frac{9}{25}; y = \frac{21}{25}$.

Như vậy ta có đánh giá : $\frac{a(3-a)}{9-6a+a^2} \leq \frac{21+9a}{25} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(2a^2-6a+9)} \geq 0$ (luôn đúng).

Từ đó ta có lời giải cho bài toán trên.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$ (1); $\forall a, b, c > 0$.

Chứng minh:

Thực hiện phép chuẩn hóa $a + b + c = 3$. BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a^2}{a^2 + (3-a)^2} + \frac{b^2}{b^2 + (3-b)^2} + \frac{c^2}{c^2 + (3-c)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Đánh giá đại diện:

Bằng phương pháp hệ số bất định ta đi tới đánh giá $\frac{a^2}{a^2 + (3-a)^2} \geq \frac{12a-7}{25}$ (2).

Ta kiểm chứng đánh giá trên là đúng.

$$\frac{a^2}{a^2 + (3-a)^2} \geq \frac{12a-7}{25} \Leftrightarrow (a-1)^2(8a-21) \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Từ $a + b + c = 3$ ta suy ra $c \leq 1 \leq a$.

+ Nếu $c \geq \frac{21}{8}$ thì dẫn đến $(8a-21) \geq 0$ nên (2) đúng.

+ Nếu $\max\{a, b, c\} \leq \frac{21}{8}$.

Khi đó $\frac{12a-7}{25} \leq \frac{49}{50}$, trong khi đó $\frac{a^2}{a^2 + (3-a)^2} = \frac{a^2}{2a^2 - 6a + 9}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 - 6t + 9}$ với $0 < t \leq \frac{21}{8}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-6t^2 + 18t}{(2t^2 - 6t + 9)^2} > 0$ với $0 < t \leq \frac{21}{8}$.

Do đó $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 - 6t + 9} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{t} - 1\right)^2}$ là hàm số đồng biến. Nên bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-3b)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2 + (b+a)^2} \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Chứng minh:

Đây là bất đẳng thức thuần nhất bậc 0. Để đơn giản biểu thức ta thực hiện phép chuẩn hóa. Giả sử $a+b+c=3$.

Thay vào BĐT(1) ta có:

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2 + (3-a)^2} + \frac{(3-4b)^2}{2b^2 + (3-b)^2} + \frac{(3-4c)^2}{2c^2 + (3-c)^2} \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Bây giờ ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để đánh giá

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2 + (3-a)^2} \geq \frac{8}{6}a - \frac{7}{6} \quad (\text{tìm hệ số bên phải theo phương pháp hệ số bất định}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+b)} \geq 0 \quad (\text{BĐT đúng vì do giả thiết}).$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{(3-4b)^2}{2b^2 + (3-b)^2} \geq \frac{8}{6}b - \frac{7}{6}; \quad \frac{(3-4c)^2}{2c^2 + (3-c)^2} \geq \frac{8}{6}c - \frac{7}{6}.$$

Từ đó ta suy ra điều cần chứng minh.

Dấu (=) xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 6:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a+2b)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 8 \quad (1).$$

(Vô định Mỹ 2003).

Chứng minh:

Ta chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó BĐT được viết lại:

$$\frac{(1+a)^2}{2a^2 + (1-a)^2} + \frac{(1+b)^2}{2b^2 + (1-b)^2} + \frac{(1+c)^2}{2c^2 + (1-c)^2} \leq 8 \quad (2)$$

$$\text{Đánh giá đại diện: } \frac{(1+a)^2}{2a^2 + (1-a)^2} \leq 4a + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2 + (1-a)^2} \geq 0 \quad (\text{BĐT đúng}).$$

Tương tự cho những đại diện khác, ta suy ra điều phải chứng minh.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 7:

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức :

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}.$$

Giải:

Thực hiện phép chuẩn hóa $x + y + z = 1$.

Bài toán trở thành tìm GTLN, GTNN của biểu thức $Q = x^3 + y^3 + 16z^3$ với $x + y + z = 1$.

+ Tìm GTNN của Q .

Do vai trò bình đẳng của x và y nên ta đánh giá x, y rồi đưa về z .

$$\text{Ta có } x^3 + y^3 \geq \frac{(x + y)^3}{4} = \frac{1}{4}(1 - z)^3.$$

$$\text{Nên } Q \geq \frac{1}{4}[(1 - z)^3 + 64z^3] = \frac{1}{4}f(z) \text{ với } 0 \leq z \leq 1.$$

Đánh giá hàm số $f(z)$.

$$f'(z) = 3[64z^2 - (1 - z)^2]; f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{9}$$

$$\text{Sử dụng bảng biến thiên ta có } f(z) \geq \frac{64}{81} \Rightarrow Q \geq \frac{16}{81}.$$

$$Q = \frac{16}{81} \text{ khi và chỉ khi } x = y = \frac{4}{9} \text{ và } z = \frac{1}{9}.$$

+ Tìm GTLN của Q :

Dự đoán GTLN đạt được tại điểm biên $(0; 0; 1)$.

$$\text{Ta có } Q = x^3 + y^3 + 16z^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 15z^3 \leq (x + y + z)^3 + 15z^3 = 16.$$

Bài tập đề nghị :

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1) (a + b)(b + c)(c + a) + abc \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^3$$

$$2) \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2 \text{ với } a, b, c > 0$$

$$3) a, b, c > 0: \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right) \leq 2$$

$$4) a, b, c > 0: (a + b + c) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) + \frac{4abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \leq 5.$$

§8. PHÉP ĐỔI BIẾN TRONG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG.

Trong phạm vi bài viết này ta chủ yếu đề cập đến đa thức đối xứng theo ba biến.

Đa thức $P(x; y; z)$ được gọi là đa thức đối xứng theo ba biến $(x; y; z)$ nếu ta có

$P(x; y; z) = P(x'; y'; z')$ trong đó $(x'; y'; z')$ là một hoán vị bất kỳ của bộ $(x; y; z)$.

Ta đặt $p = x + y + z$; $q = xy + yz + zx$; $r = xyz$.

Khi đó các biểu thức p ; q ; r được gọi là các biểu thức đối xứng sơ cấp.

1) Hằng đẳng thức giữa các biểu thức đối xứng sơ cấp.

Với phép đặt $p = x + y + z$; $q = xy + yz + zx$; $r = xyz$ cho ta mối quan hệ giữa $p; q; r$ như sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2q; \quad x^3 + y^3 + z^3 = p^3 - 3pq + 3r; \quad xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = pq - 3r.$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) = pq - r; \quad x^4 + y^4 + z^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr.$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = q^2 - 2pr; \quad x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) = p^2q - 2q^2 - pr.$$

$$x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2) = pq^2 - 2(p^2 + q)r.$$

$$x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) = p^3q - 3pq^2 + (5q - p^2)r$$

$$x^5 + y^5 + z^5 = p^5 - 5p^2q + 5pq^2 + 5(p^2 - q)r.$$

2) Các bất đẳng thức cơ bản giữa các biểu thức $p; q; r$.

Với phép đặt $p = x + y + z$; $q = xy + yz + zx$; $r = xyz$, ta có các bất đẳng thức cơ bản sau:

$$p^2 \geq 3q; \quad p^3 \geq 27r; \quad q^2 \geq 3pr; \quad 2p^3 + 9r \geq 7pq; \quad p^2q + 3pr \geq 4q^2; \quad p^2q \geq 3pr + 4p^2q;$$

$$p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q; \quad pq^2 + 3q^2 \geq 4p^2q; \quad pq^2 \geq 2p^2r + 3qr; \quad 2p^3 + 9r \geq 7pq; \quad q^3 + 9r^2 \geq 4pqr;$$

$$p^3q + q^3 \geq 6pqr; \quad p^3 - 4pq + 9r \geq 0; \quad p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0; \quad pq - 9r \geq 0.$$

3) Ứng dụng của các bất đẳng thức đối xứng sơ cấp vào chứng minh bất đẳng thức.**Ví dụ 1 : (Iran 96)**

Chứng minh rằng với $x, y, z > 0$ ta có:

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Chứng minh:

Đặt $p = x + y + z$; $q = xy + yz + zx$; $r = xyz$, BĐT được viết lại :

$$q \left[\frac{(p^2 + q)^2 - 4p(pq - r)}{(pq - r)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow pq(p^3 - 4pq + 9r) + q(p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr) + r(pq - 9r) \geq 0$$

Theo các bất đẳng thức cơ bản và $p; q; r > 0$ ta có BĐT cuối cùng đúng.

Ví dụ 2:

Cho các số thực dương $x; y; z$. Chứng minh rằng ta có:

$$(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z) \quad (1)$$

Chứng minh:

Đây là BĐT đối xứng theo ba biến $x; y; z$. Đặt $p = x + y + z$; $q = xy + yz + zx$; $r = xyz$.

Biến đổi BĐT đã cho ra được BĐT tương đương.

$$(p^2 - 2q)^2 - 2(p^2 - 2q) - 2(q^2 - 2pr) + 3 \leq 1 + p + q + r.$$

Vì $p = 1$ nên BĐT trở thành $(1 - 2q)^2 - 2(1 - 2q) - 2(q^2 - 2r) \leq q + r - 1$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - q + 3r \leq 0 \quad (2)$$

Ta chú ý $pq - 9r \geq 0 \Rightarrow 3r \leq \frac{q}{3}$. Nên $(2) \Leftrightarrow 2q^2 - q + \frac{q}{3} \leq 0 \Leftrightarrow 2q^2 - \frac{2q}{3} \leq 0 \Leftrightarrow q \leq \frac{1}{3}$ (vì $q > 0$).

Điều này đúng vì $p^2 \geq 3q$. BĐT được chứng minh.

Ví dụ 3 :

Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng ta có :

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh :

Bất đẳng thức đã cho tương đương :

$$\frac{(1+y)^2(1+z)^2 + (1+x)^2(1+z)^2 + (1+x)^2(1+y)^2 + 2(1+x)(1+y)(1+z)}{(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (1+y)^2(1+z)^2 + (1+x)^2(1+z)^2 + (1+x)^2(1+y)^2 + 2(1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2.$$

Ta có : $r = 1$

$$(1+y)^2(1+z)^2 + (1+x)^2(1+z)^2 + (1+x)^2(1+y)^2 = 2p^2 + q^2 + 2pq + 2p - 3$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + p + q + r = 2 + p + q.$$

Do đó BĐT được viết lại như sau:

$$2p^2 + q^2 + 2pq + 2p - 3 + 2(2 + p + q) \geq (2 + p + q)^2 \Leftrightarrow p^2 \geq 2q + 3 \quad (2)$$

Vì $r = 1$ nên $q \geq 3$ (BĐT Cô-si).

Do đó : $p^2 \geq 3q \geq 2q + 3$ (đpcm).

Ví dụ 4:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 12 \geq 3(a + b + c) + 3(ab + bc + ca) \quad (1).$$

(thi Toán vùng Balkan)

Chứng minh :

Đặt $p = a + b + c$; $q = ab + bc + ca$; $r = abc$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$2(p^2 - 2q) + 12 \geq 3p + 3q \Leftrightarrow 2p^2 - 3p - 7q + 12 \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức cơ bản ta có $p^3 + 9r \geq 4pq \Rightarrow q \leq \frac{p^3 + 9r}{4p} = \frac{p^3 + 9}{4p}$.

Do đó BĐT cuối đúng nếu ta chứng minh được : $2p^2 - 3p - 7\frac{p^3 + 9}{4p} + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(p-3)(p^2 - 9p + 21)}{4p} \geq 0 \quad (2)$

Theo BĐT Cô-si ta có: $p \geq 3\sqrt[3]{r} = 3$ nên (2) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5 :

Cho $a; b; c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3}{a+b+c} \quad (1).$$

Chứng minh :

Đây là BĐT thuần nhất có bậc là -1, trước hết ta chuẩn hóa $ab+bc+ca=3 \Leftrightarrow q=3$.

Với phép đổi biến như trên ta có BĐT được viết lại như sau :

$$\frac{p^2+q}{pq-r} \geq \frac{p}{2q} + \frac{3}{p} \Leftrightarrow \frac{p^2+q}{pq-r} \geq \frac{p}{2q} + \frac{3}{p} \Leftrightarrow 3p^3 + p^2r - 36p + 18r \geq 0 \quad (2)$$

Theo BĐT cơ bản ở trên ta có $p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \Leftrightarrow p^3 - 12p + 9r \geq 0$.

Ta cũng có $p^2 \geq 3q = 9$ nên $(2) \Leftrightarrow 3(p^2 - 12p + 9r) + r(p^2 - 9) \geq 0$ (đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b; c=0$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 6 :

Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{4(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3} \geq 5 \quad (1).$$

Chứng minh :

Ta nhận thấy đây là bất đẳng thức thuần nhất đối xứng có bậc là 0. Thực hiện phép chuẩn hóa $p=1$. Theo các hằng đẳng thức cơ bản ta có :

$$\frac{1-2q+3r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 4. \quad (2)$$

Để sử dụng được BĐT Cô-si cho việc chứng minh (2) ta cần một số lưu ý sau:

Ta có :

$$p, q, r > 0 ; q \leq \frac{p^2}{3} = \frac{1}{3} ; \text{ từ } 2p^3 + 9r \geq 7pq \Rightarrow r \geq \frac{7q-2}{9}. \text{ Do đó } 1-3q+3r > 0 \text{ và } q-r > 0.$$

Vậy áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq \frac{1-3q+3r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 4.$$

(2) được chứng minh.

Ví dụ 7:

Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh BĐT sau:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 9 \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 5 \quad (1)$$

Chứng minh:

Ta chuẩn hóa $p=1$. BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1-3p+3r}{q-r} + \frac{9q}{1-2q} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1-3p+3r}{q-r} + 3 + \frac{9q}{1-2q} \geq 8$$

$$\frac{1}{q-r} + \frac{9q}{1-2q} \geq 8.$$

$$\text{Nhưng ta có : } \frac{1}{q-r} + \frac{9q}{1-2q} \geq \frac{1}{q} + \frac{9q}{1-2q} = 2 + \frac{1-2q}{q} + \frac{9q}{1-2q} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{1-2q}{q} \cdot \frac{9q}{1-2q}} = 8.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{1-2q}{q} = \frac{9q}{1-2q} \\ r=0 \\ p=t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ r=0 \\ p=t^2 \end{cases}.$$

Từ đó ta có dấu đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} t; t; 0 \right)$ và các hoán vị.

Ví dụ 8 :

Cho các số thực $a; b; c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c} \geq 2.$$

Chứng minh:

Ta đặt $p = a + b + c; q = ab + bc + ca; r = abc$. Khi đó $q = 1$. Sử dụng các hằng đẳng thức cơ bản ta có bất đẳng thức được viết lại:

$$\frac{1+p^2}{pq-r} - \frac{1}{p} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{p^3 - 2p^2 + r(1+2p)}{(p-r)p} \geq 0 \Leftrightarrow p^3 - 2p^2 + r(1+2p) \geq 0.$$

Đặt $f(p) = p^3 - 2p^2 + r(1+2p)$.

Nếu $p \geq 2$ thì hiển nhiên $f(p) \geq 0$.

Nếu $\sqrt{3} \leq p \leq 2$

Ta có bất đẳng thức cơ bản $p^3 + 9r \geq 4pq \Rightarrow r \geq \frac{4p - p^3}{9}$.

$$\text{Vậy } f(p) \geq p^3 - 2p^2 + (1+2p) \frac{4p - p^3}{9} = \frac{-2p(p-2)(p-1)^2}{9} \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = (1; 1; 0)$ và các hoán vị.

Ví dụ 9:

Cho các số thực không âm $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx \geq 12(x^3 + y^3 + z^3)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Chứng minh:

Sử dụng phép đặt $p; q; r$ như trên ta có bất đẳng thức trở thành:

$$q \geq 12(p^3 - 3pq + 3r)(q^2 - 2pr) \Leftrightarrow q \geq 12(1 - 3q + 3r)(q^2 - 2r) \quad (2)$$

Ta để ý $pq - 9r \geq 0 \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{q}{9}$ nên (2) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$q \geq 12\left(1 - 3q + \frac{q}{3}\right)(q^2) \Leftrightarrow 32q^2 - 12q + 1 \geq 0 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(q) = 32q^2 - 12q + 1$ có $f'(q) = 64q - 12$.

$f(q)$ đồng biến trên $\left(\frac{3}{16}; +\infty\right)$ và $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

Nên nếu $q \geq \frac{1}{4} \Rightarrow f(q) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. BĐT (3) đúng.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} p=1 \\ q=\frac{1}{4} \\ r=\frac{q}{9}=\frac{1}{36} \end{cases}$, do đó $(a;b;c) =$ và các hoán vị của ba nghiệm phương trình:

$$t^3 - t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{36} = 0.$$

Nếu $0 \leq \frac{1}{4} \leq q$ thì lúc này ta viết (2) như sau:

$$q \geq 12q^2(1-3q) + 12r(3q^2 + 6q - 12) - 72r^2 \quad (4)$$

$$\text{Vì } 12q(1-3q) = 4.3q.(1-3q) \leq 4.\left(\frac{3q+1-3q}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 12q^2(1-3q) \leq q.$$

Với $0 \leq \frac{1}{4} \leq q$ thì $3q^2 + 6q - 12 < 0$ nên (4) đúng.

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp này là } \begin{cases} p=1 \\ 3q=1-3q \\ 12r(3q^2+6q-12)-72r^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=\frac{1}{6} \\ r=0 \\ r=\frac{-131}{72}(\text{loại}) \end{cases} \quad \text{Do đó}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}; 0\right) \text{ và các hoán vị.}$$

Bài tập đề nghị :

$$1) \text{ Cho } a, b, c > 0 \text{ và } abc = 1. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

$$2) \text{ Cho các số } x, y, z \text{ thỏa mãn } x^2 + y^2 + z^2 = 9. \text{ Chứng minh rằng } 2(x+y+z) - xyz \leq 10.$$

$$3) \text{ Cho } a, b, c \geq 0 \text{ và } abc = 1. \text{ Chứng minh rằng :}$$

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

§9. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI- KỸ THUẬT TÁCH GHÉP.

Ta vẫn thường nghe tới khái niệm điểm rơi trong thể thao như là điểm rơi phong độ, điểm rơi khi cầu thủ dùng đầu chơi bóng. Trong bất đẳng thức ta hiểu đơn giản điểm rơi là điểm mà tại đó dấu đẳng thức xảy ra. Như vậy điểm rơi là điểm rất đặc biệt, là điểm mà tại đó, trạng thái cân bằng được thiết lập.

Trong chứng minh Bất đẳng thức, nếu ta nhìn thấy điểm rơi, sẽ giúp ta hình dung được những đại lượng cần thiết xuất hiện trong quá trình chứng minh, kết hợp với kỹ thuật tách ghép giúp ta có được lời giải của bài toán.

Một tác dụng của việc nhìn thấy điểm rơi nữa là giúp ta tránh được những sai lầm gặp phải khi áp dụng vội vàng các Bất đẳng thức cổ điển, mặc dầu dấu đẳng thức không đồng thời xảy ra tại các thời điểm đó.

Trong bất đẳng thức mà vai trò các ẩn là như nhau thì điểm rơi thường dễ tìm, còn trong bất đẳng thức mà vai trò các ẩn là không bình đẳng thì việc nhìn ra điểm rơi tương đối khó. Bài viết này cũng nhằm tới trang bị một số kỹ năng nhìn điểm rơi cũng như kỹ thuật tách ghép, giúp hoàn thiện hơn kỹ năng chứng minh bất đẳng thức.

Tôi xin bắt đầu bằng ví dụ sau:

Đề thi HK2 lớp 10 năm 2011 tỉnh Bình Dương có câu sau:

Tìm tập xác định và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = \frac{x+6}{\sqrt{x-3}}$.

Bài này một học sinh khá sẽ tách và dùng BĐT Cô-si như sau:

$$y = \frac{x+6}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-3} + \frac{9}{\sqrt{x-3}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x-3} \cdot \frac{9}{\sqrt{x-3}}} = 6.$$

$$y = 6 \text{ khi và chỉ khi } \sqrt{x-3} = \frac{9}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow x = 12.$$

Đây là lời giải đúng vì $x = 12 \in (3; +\infty)$. Nhưng nếu người ra đề thử cho hàm số xét trên miền không chứa số 12 thì học sinh không thể giải đơn giản như vậy được nữa.

Chẳng hạn :

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = \frac{x+6}{\sqrt{x-3}}$ với $x \in [19; +\infty)$.

Rõ ràng với đề ra như vậy học sinh nếu giải theo cách trên sẽ gặp phải sai lầm vì $GTNN = 6$ tại $x = 12 \notin [19; +\infty)$.

Lúc này muốn có lời giải đúng ta cần nhìn thấy điểm rơi.

Vẫn sử dụng kỹ thuật tách như trên ta có: $y = \frac{x+6}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-3} + \frac{9}{\sqrt{x-3}}$.

Ta dự đoán GTNN đạt được tại $x = 19$.

Tới đây ta thấy nếu $x = 19$ thì $\sqrt{x-3} = 4$ và $\frac{9}{\sqrt{x-3}} = \frac{9}{4}$. Vì $4 > \frac{9}{4}$ nên ta cần tách $\sqrt{x-3}$ ra

$$\sqrt{x-3} = \frac{9}{16}\sqrt{x-3} + \frac{7}{16}\sqrt{x-3}. \text{ Rõ ràng đây là điều không dễ nghĩ tới(!).}$$

Cuối cùng ta có lời giải như sau:

$$y = \frac{x+6}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-3} + \frac{9}{\sqrt{x-3}} = \frac{9}{16}\sqrt{x-3} + \frac{7}{16}\sqrt{x-3} + \frac{9}{\sqrt{x-3}}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{9}{16}\sqrt{x-3} + \frac{9}{\sqrt{x-3}} \geq 2\sqrt{\frac{9}{16}\sqrt{x-3} \cdot \frac{9}{\sqrt{x-3}}} = \frac{9}{2}.$$

Mặt khác vì $x \geq 19$ nên $\sqrt{x-3} \geq 4$.

Vậy $y \geq \frac{9}{2} + \frac{7}{16} \cdot 4 = \frac{25}{4}$ và $y = \frac{25}{4}$ khi và chỉ khi $x = 19$.

Trên đây là một ví dụ chứng tỏ rằng việc phát hiện điểm rơi sẽ giúp tìm ra lời giải chính xác. Ta theo dõi tiếp ví dụ sau đây để làm quen dần với phương pháp sử dụng điểm rơi cũng như kỹ thuật tách – ghép.

(Kỳ thi HSG Toán Lương Thế Vinh lần I- Khối 10).

Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy$.

Đây là ví dụ được chọn minh họa trong bài hệ quả bất đẳng thức B.C.S. Bây giờ ta quan sát kỹ hơn về kỹ thuật chọn điểm rơi và tách ghép.

Trước hết ta dự đoán điểm rơi tại $x = y = \frac{1}{2}$ và khi đó $A = 11$.

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} + \frac{3}{2xy} + 4xy.$$

Áp dụng hệ quả B.C.S ta có $\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \geq \frac{(1+1)^2}{(x+y)^2} \geq 4$ (vì $x + y \leq 1$).

Bây giờ còn lại $\frac{3}{2xy} + 4xy$ ta đánh giá như thế nào?

Sẽ là sai lầm nếu áp dụng ngay BĐT Cô-si như sau : $\frac{3}{2xy} + 4xy \geq 2\sqrt{\frac{3}{2xy} \cdot 4xy} = 2\sqrt{6}$, nhưng ở đây dấu (=) xảy

ra khi $\frac{3}{2xy} = 4xy \Leftrightarrow xy = \frac{3}{8}$ không thỏa mãn $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy ta xử lý như sau :

Tại $x = y = \frac{1}{2}$ thì $\frac{3}{2xy} = 6$ và $4xy = 1$, do đó ta cần tách $\frac{3}{2xy} = \frac{3}{12xy} + \frac{15}{12xy} = \frac{1}{4xy} + \frac{15}{12xy}$.

Vậy nên $\frac{3}{2xy} + 4xy = \frac{1}{4xy} + \frac{15}{12xy} + 4xy = \left(\frac{1}{4xy} + 4xy\right) + \frac{15}{12xy} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4xy} \cdot 4xy} + \frac{15}{12\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = 2 + 5 = 7$.

Kết hợp lại ta được $A \geq 4 + 7 = 11$. Dấu (=) xảy ra tại $x = y = \frac{1}{2}$.

Qua hai ví dụ trên ta đã hình dung được phương pháp chọn điểm rơi cũng như kỹ thuật tách ghép, qua đó cũng thấy được các sai lầm thường vấp phải.

Trong các ví dụ tiếp theo, các kỹ thuật đó được vận dụng qua quá trình biến đổi mà không phân tích kỹ càng như ở trên nữa.

4) Điểm rơi trong bất đẳng thức đối xứng.

Thông thường trong BDT đối xứng thì điểm rơi thường tại các biến nhận giá bằng nhau (chỉ trừ những trường hợp đơn biến).

Ví dụ 1 :

Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Hãy tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z.$$

Sai lầm dễ gặp phải ở đây là áp dụng BĐT Cô-si cho 6 số $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z \geq 6$. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ (không thỏa mãn giả thiết).

Ta dự đoán điểm rơi tại $x = y = z = \frac{1}{2}$. Khi đó $\frac{1}{x} = 2$. Nên ta phải tách $\frac{1}{x}$ như sau: $\frac{1}{x} = \frac{1}{4x} + \frac{3}{4x}$.

cũng tương tự đối với $\frac{1}{y}$ và $\frac{1}{z}$.

$$\text{Vậy: } P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z = \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} + x + y + z \right) + \frac{3}{4x} + \frac{3}{4y} + \frac{3}{4z}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 6 số ta có:

$$\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} + x + y + z \right) \geq \frac{6}{2} = 3.$$

Cũng áp dụng BĐT Cô-si:

$$\frac{3}{4x} + \frac{3}{4y} + \frac{3}{4z} \geq 3 \cdot \frac{3}{4\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{9}{4\sqrt[3]{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3}} = \frac{9}{2}.$$

Kết hợp ta được $P \geq 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$ và $P = \frac{15}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{15}{2}.$$

Bình luận:

Ta có thể tách theo kiểu sau:

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 4x + 4y + 4z \right) - (3x + 3y + 3z).$$

Sau đó áp dụng BĐT Cô-si cho từng bộ phận trong ngoặc ta cũng thu được kết quả.

Ví dụ 2:

Cho $a, b, c > 0$ biến thiên và thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq 1.$$

Chứng minh:

Phân tích:

Ta cần làm mất các tổng ở mẫu, điều đó có thể được thực hiện bằng cách cộng vào các biểu thức tương ứng rồi áp dụng BĐT Cô-si.

Dự đoán điểm rơi tại $a = b = c = \frac{2}{3}$. Khi đó $\frac{a^2}{b+c} = \frac{1}{3}$ và $b+c = \frac{4}{3}$, nên ta thêm bớt như sau:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a.$$

Tương tự ta có: $\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b$; $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$.

Cộng về theo về ta được:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} = 1.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Bình luận:

Nếu áp dụng hệ quả B.C.S thì lời giải còn ngắn gọn hơn nữa:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)}{2} = 1.$$

Ví dụ 3:

Tìm GTNN của biểu thức :

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}}$$

trong đó a, b, c là các số dương và thỏa mãn $a+b+c \leq \frac{3}{2}$.

Phân tích:

Do a, b, c bình đẳng nên ta dự đoán điểm rơi tại $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Khi đó $a^2 = \frac{1}{4}$ và $\frac{1}{a^2} = 4$. Như vậy ta phải tách $\frac{1}{a^2}$ ra làm 16 số bằng nhau mới áp dụng được BĐT Cô-si.

Vậy ta có lời giải :

$$S = \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}}_{16 \text{ số}}} + \sqrt{b^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}}_{16 \text{ số}}} + \sqrt{c^2 + \underbrace{\frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}}_{16 \text{ số}}}$$

$$\geq \sqrt{17} \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16} a^{32}}} + \sqrt{17} \sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16} b^{32}}} + \sqrt{17} \sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16} c^{32}}} = \sqrt{17} \left(\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}} \right)$$

$$\geq \sqrt{17} \left(3 \sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{abc}{16^{24} b^{16} c^{16} a^{16}}}} \right) = \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Vậy GTNN của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

5) Điểm rơi trong bất đẳng thức không đối xứng.

So với BĐT đối xứng thì việc tìm điểm rơi trong BĐT không đối xứng gặp nhiều khó khăn hơn. Ta phải thực hiện các phép thử để xem dấu đẳng thức có xảy ra tại đó không. Nếu có một bộ phận biến nào đó vai trò bình đẳng thì thông thường điểm rơi tại điểm các biến đó nhận giá trị bằng nhau.

Sau khi tìm được điểm rơi rồi, ta tiếp tục sử dụng kỹ thuật tách, ghép, thêm, bớt để chứng minh.

Ta cùng theo dõi phương pháp qua các thí dụ minh họa.

Ví dụ 4 :

Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn $a+2b+3c \geq 20$. Chứng minh rằng :

$$S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13.$$

Phân tích :

Tại $a = 2; b = 3; c = 4$ thì cả giả thiết và cả BĐT đều xảy ra dấu (=).

Tại $a = 2$ thì $\frac{3}{a} = \frac{3}{2}$ nên $a = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{a}$, nên ta tách $a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}a$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có $\frac{3}{4}a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{a}} = 3$, còn dư ra $\frac{1}{4}a$.

Tại $b = 3$ thì $\frac{9}{2b} = \frac{3}{2}$ nên $b = 2 \cdot \frac{9}{2b}$. Ta tách $b = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $\frac{b}{2} + \frac{9}{2b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{9}{2b}} = 3$, còn dư $\frac{b}{2}$.

Tại $c = 4$ thì $\frac{4}{c} = 1$ nên $c = 4 \cdot \frac{4}{c}$, ta tách $c = \frac{c}{4} + \frac{3c}{4}$.

Áp dụng BĐT ta có: $\frac{c}{4} + \frac{4}{c} \geq 2$, còn dư $\frac{3c}{4}$.

Phần dư còn lại: $\frac{1}{4}a + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4} = \frac{a + 2b + 3c}{4} \geq \frac{20}{4} = 5$.

Kết hợp lại ta được: $S \geq 3 + 3 + 2 + 5 = 13$ (đpcm).

Ví dụ 5 :

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$S = 30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 84.$$

Phân tích :

Tại $a = 1; b = 2; c = 3$ thì $S = 84$. Ta dự đoán điểm rơi tại đó.

Ta sẽ kết hợp 2 số hạng chứa a , 1 số hạng chứa b^2 , 2 số hạng chứa $\frac{1}{ab}$ để áp dụng BĐT Cô-si. Cái ta cần là tìm hệ số của các số hạng đó.

Với $a = 1$; $b = 2$ thì $b^2 = 4$ và $\frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$. Để cân bằng ta dùng $a; \frac{b^2}{4}; \frac{2}{ab}$.

Cụ thể như sau :

Áp dụng BĐT Cô-si cho 5 số ta được :

$$a + a + \frac{b^2}{4} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} \geq 5\sqrt[5]{\frac{4a^2b^2}{4(ab)^2}} = 5.$$

Bây giờ tới mục tiêu làm mất bc ở mẫu. Bằng suy luận tương tự ta có :

$$\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^3}{27} + \frac{c^3}{27} + \underbrace{\frac{6}{bc} + \dots + \frac{6}{bc}}_{6 \text{ số}} \geq 11\sqrt[11]{\left(\frac{b^2}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^3}{27}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{bc}\right)^6} = 11.$$

Cuối cùng ta làm mất ac ở mẫu.

$$\frac{c^3}{27} + a + a + a + \frac{3}{ca} + \frac{3}{ca} + \frac{3}{ca} \geq 7\sqrt[3]{\frac{c^3}{27} \cdot a^3 \cdot \left(\frac{3}{ca}\right)^3} = 7.$$

Từ các BĐT vừa chứng minh ta suy ra :

$$9\left(2a + \frac{b^2}{4} + \frac{4}{ab}\right) + \left(\frac{3b^2}{4} + \frac{2c^2}{27} + \frac{36}{bc}\right) + 4\left(\frac{c^3}{27} + 3a + \frac{9}{ca}\right) \geq 45 + 11 + 28 = 84.$$

$$\text{Hay : } S = 30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 84.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$.

Ví dụ 6 :

Cho các số $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq 12 \quad (1)$$

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c \geq 0$.

Khi đó ta có $0 \leq b^2 - bc + c^2 \leq b^2$; $0 \leq c^2 - ca + a^2 \leq a^2 \Rightarrow 0 \leq (b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq a^2 b^2$.

$$\text{Vậy } VT(1) \leq (a^2 - ab + b^2)a^2 b^2 = \frac{4}{9}(a^2 - ab + b^2) \cdot \frac{3ab}{2} \cdot \frac{3ab}{2} \leq \frac{4}{9} \left(\frac{(a^2 - ab + b^2) + \frac{3ab}{2} + \frac{3ab}{2}}{3} \right)^3$$

$$\frac{4}{9} \left[\frac{(a+b)^2}{3} \right]^3 \leq \frac{4}{9} \left[\frac{(a+b+c)^2}{3} \right]^3 = 12.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị.

Bình luận:

Qua quá trình chứng minh và đặc biệt là điểm rơi tại biên chứ không phải tại tâm đã khiến chúng ta không khỏi giật mình vì cả giả thiết và kết luận của bài toán đều là những biểu thức bình đẳng với các biến. Tuy nhiên ta vẫn nhận ra nguyên do là biểu thức chỉ bình đẳng giữa các biến thôi chứ không phải là các biểu thức đối xứng.

6) Kỹ thuật cân bằng hệ số trong quá trình chọn điểm rơi.

Qua hai mục trên ta nhận thấy điểm rơi gặp phải là những giá trị không phải là quá khó tìm vì đều là các số nguyên. Bây giờ ta đặt tình huống khi điểm rơi không phải là số nguyên nữa mà thậm chí là số vô tỉ thì chắc chắn việc tìm không thuận tiện như thế nữa. Chuyên mục này trang bị kiến thức cơ sở của việc tìm điểm rơi được tự nhiên và thuận lợi hơn.

Ta gọi đó là **phương pháp cân bằng hệ số** (có sự tương đồng như là đồng nhất hai vế).

Ta sẽ rút ra phương pháp thông qua các ví dụ minh họa.

Ví dụ 7:

Cho $x \in [0; 1]$. Tìm GTLN của biểu thức $S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$.

Ta chưa biết $\max S$ là bao nhiêu, cũng chưa thể biết điểm rơi ở đâu vì không có cơ sở dự đoán. Chính vì vậy ta cần quá trình mò mẫm đi tìm điểm rơi.

Chọn $p; q$ là các ẩn giả định.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$13\sqrt{x^2 - x^4} = \frac{13}{p} \sqrt{p^2 x^2 (1 - x^2)} \leq \frac{13}{p} \cdot \frac{p^2 x^2 + (1 - x^2)}{2} = \frac{13(p^2 - 1)x^2 + 13}{2p}.$$

$$9\sqrt{x^2+x^4} = \frac{9}{q}\sqrt{q^2x^2(x^2+1)} \leq \frac{9}{q} \frac{q^2x^2+(x^2+1)}{2} = \frac{9(q^2+1)x^2+9}{2q}.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$S \leq \left[\frac{13(p^2-1)}{2p} + \frac{9(q^2+1)}{2q} \right] x^2 + \frac{13}{2p} + \frac{9}{2q}$$

Ta cần tìm $p; q$ sao cho

$$\begin{cases} p^2x^2 = (1-x^2) \\ q^2x^2 = (x^2+1) \\ \frac{13(p^2-1)}{2p} + \frac{9(q^2+1)}{2q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p^2+1)x^2 = (q^2-1)x^2 = 1 \\ \frac{13(p^2-1)}{2p} + \frac{9(q^2+1)}{2q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p^2+1) = (q^2-1) \\ \frac{13(p^2-1)}{2p} + \frac{9(q^2+1)}{2q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ và $S = 16$.

Vậy $\max S = 16$ khi và chỉ khi $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 8:

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$. Chứng minh rằng :

$$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 \geq \frac{12}{\sqrt{407}}.$$

Chứng minh:

Phân tích:

ta cần chuyển từ $a^3; b^3; c^3$ từ điều phải chứng minh về thành $a^2; b^2; c^2$ để có thể sử dụng giả thiết.

Ta sử dụng biến số giả $p; q; r$ để cân bằng hệ số.

$$a^3 + a^3 + p^3 \geq 3pa^2; \quad \frac{3b^3}{2} + \frac{3b^3}{2} + \frac{3q^3}{2} \geq \frac{9qb^2}{2}; \quad 2c^3 + 2c^3 + 2r^3 \geq 6rc^2.$$

Cộng vế theo vế ta có ::

$$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + p^3 + \frac{3q^3}{2} + 2r^3 \geq 3pa^2 + \frac{9qb^2}{2} + 6rc^2 = 3p.a^2 + \frac{9q}{4}.2b^2 + 2r.3c^2.$$

$$\text{Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} p = a; q = b; r = c \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p^2 + 2q^2 + 3r^2 = 1.$$

$$\text{Bài toán được giải quyết nếu ta tìm được } p; q; r \text{ sao cho } \begin{cases} p^2 + 2q^2 + 3r^2 = 1 \\ 3p = \frac{9q}{4} = 2r = k > 0 \end{cases} \Rightarrow 3p = \frac{9q}{4} = 2r = k = \frac{18}{\sqrt{407}}.$$

$$\text{Từ đó ta tìm được } p = \frac{6}{\sqrt{407}}; q = \frac{8}{\sqrt{407}}; r = \frac{9}{\sqrt{407}}.$$

Đến đây xem như lời giải đã được tìm ra, ta chỉ cần sắp xếp, chuyển vế.

$$\text{Vậy : } 2a^3 + 3b^3 + 4c^3 \geq \frac{12}{\sqrt{407}} \text{ và dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi } a = \frac{6}{\sqrt{407}}; b = \frac{8}{\sqrt{407}}; c = \frac{9}{\sqrt{407}}.$$

Bình luận:

Với điểm rơi tìm được như trên hầu như chúng ta không thể tìm ra qua quan sát trực giác hay phán đoán.

Ví dụ 9:

Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức: $T = \sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + \sqrt{bc}$.

Giải:

$$\text{Ta có } \sqrt{ab} = \sqrt{ap} \sqrt{\frac{b}{p}} \leq \frac{ap + \frac{b}{p}}{2}; \quad \sqrt{bc} = \sqrt{qb} \sqrt{\frac{c}{q}} \leq \frac{qb + \frac{c}{q}}{2}; \quad 2\sqrt{ca} = a + c.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$T \leq \frac{1}{2} \left[(p+2)a + \left(\frac{1}{p} + q \right) b + \left(\frac{1}{q} + 2 \right) c \right].$$

$$\text{Ta cần tìm } p, q \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} pa = \frac{b}{p}; qb = \frac{c}{q}; \\ a = c; a + b + c = 3 \\ p + 2 = \frac{1}{p} + q = \frac{1}{q} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \sqrt{3} - 1 \\ q = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{2} (a + b + c) = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2}.$$

Bài tập đề nghị:

1) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $2(ab + bc + ca) + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9$.

2) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1 + a^2 + 2bc} + \sqrt{1 + b^2 + 2ca} + \sqrt{1 + c^2 + 2ab} \leq 6.$$

3) Cho $a, b, c \in (0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{3}{3+abc}.$$

4) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30.$$

5) Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

$$\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c} + 2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b}} \geq 2.$$

6) Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2(b-c) + b^2(c-b) + c^2(1-c) \leq \frac{108}{529}.$$

7) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$S = 4ab + 8bc + 6ca.$$

§10. ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ TẠI BIÊN VÀ TIẾP TUYẾN HÓA.

I. ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ TẠI BIÊN.

- Nguyên lý chung:
 - Bất phương trình $f(x) \geq m$, $\forall x \in D$ xảy ra khi và chỉ khi $\min_{x \in D} f(x) \geq m$.
 - Bất phương trình $f(x) \leq m$, $\forall x \in D$ xảy ra khi và chỉ khi $\max_{x \in D} f(x) \leq m$.
- Đối với hàm số bậc nhất ta có các kết quả sau:
 - Hàm số $f(x) = ax + b \geq 0$, $\forall x \in [m; n]$ xảy ra khi và chỉ khi $\min\{f(m); f(n)\} \geq 0$.
 - Hàm số $f(x) = ax + b \leq 0$, $\forall x \in [m; n]$ xảy ra khi và chỉ khi $\max\{f(m); f(n)\} \leq 0$.
- Đối với hàm số bậc hai ta có các kết quả sau:
 - Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) với $x \in [m; n]$ thì ta có $f(x) \leq \max\{f(m); f(n)\}$.
 - Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) với $x \in [m; n]$ thì ta có $f(x) \geq \min\{f(m); f(n)\}$.

Trong bài viết này, nội dung tư tưởng chính là đổi biến số, đưa một vế của bất đẳng thức về theo biến số vừa đổi và xét hàm số tương ứng. Dựa vào các nhận định ở trên ta có sự đánh giá hàm số đang xét.

Ta theo dõi các ví dụ sau, từ đó rút ra phương pháp.

Ví dụ 1 :

Chứng minh rằng $2(a+b+c) - (ab+bc+ca) \leq 4$; $\forall a, b, c \in [0; 2]$.

Chứng minh :

Ta xem a là ẩn chính và xét hàm số bậc nhất theo biến a là:

$$f(a) = (2-b-c)a + 2(b+c) - bc; \forall a \in [0; 2].$$

Ta luôn có $f(a) \leq \max\{f(0); f(4)\}$.

Mà $f(0) = 2(b+c) - bc = 4 - (2-b)(2-c) \leq 4$; vì $b, c \in [0; 2]$.

Lại có $f(2) = 4 - bc \leq 4$.

Như vậy $f(a) \leq \max\{f(0); f(4)\} \leq 4$. BĐT được chứng minh.

Ví dụ 2 : (Tiếp Khắc 84).

Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca-abc \leq \frac{7}{27}$.

Chứng minh :

Ta có vế trái của (1) được viết lại là $a(b+c) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)bc$.

$$\text{Đặt } x = bc \text{ thì } bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(1-a)^2}{4}.$$

Xét hàm số $f(x) = a(1-a) + (1-2a)x$; với $0 \leq x \leq \frac{(1-a)^2}{4}$.

$$\text{Ta có } \max f(x) \leq \max \left\{ f(0); f\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right) \right\}.$$

$$\text{Ta lại có } f(0) = a(1-a) \leq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}. \quad f\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right) = \frac{-2a^3 + a^2 + 1}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{28}{27} - 2\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \left(a + \frac{1}{6}\right) \right] \leq \frac{7}{27}.$$

Như vậy BĐT xem như được chứng minh.

Ví dụ 3 :

Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1$; $a, b, c, d \in [0; 1]$.

Chứng minh:

Xem về trái là hàm số bậc nhất theo a ta xét hàm số sau:

$$f(a) = [1 - (1-b)(1-c)(1-d)]a + (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d; a \in [0; 1].$$

Ta có $\min f(a) = \min \{f(0); f(1)\}$.

Với $f(1) = b + c + d + 1 \geq 1$. Ta lại có $f(0) = (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d$. Ta cần chứng minh $f(0) \geq 1$. Thật vậy:

$$\text{Xét hàm số } g(b) = [1 - (1-c)(1-d)]b + (1-c)(1-d) + c + d; b \in [0; 1].$$

Bằng lập luận tương tự ta đi đến xét $g(1) = c + d + 1 \geq 1$ và $g(0) = 1 + cd \geq 1$.

Như vậy ta có kết luận $f(0) \geq 1$.

Do đó $\min_{[0;1]} f(a) = \min \{f(0); f(1)\} \geq 1$. BĐT được chứng minh.

Ví dụ 4 :

Cho các số không âm a, b, c và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$.

Chứng minh:

Về trái được viết lại: $(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 + 6abc = (1-c)^3 - 3(1-c)ab + c^3 + 6abc$.

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } ab(9c-3) + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0.$$

Đặt $x = ab$ thì $x \in \left[0; \frac{(1-c)^2}{4}\right]$. Ta có hàm số $f(x) = (9c-3)x + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4}$ với $x \in \left[0; \frac{(1-c)^2}{4}\right]$.

Bằng lý luận như trên ta đi tới kiểm tra:

$$f(0) = 3(1-c)^2 \geq 0 \text{ và } f\left(\frac{(1-c)^2}{4}\right) = (9c-3)\frac{(1-c)^2}{4} + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} > 0.$$

Phép chứng minh kết thúc.

Bài tập đề nghị:

1. Cho các số không âm a, b, c và $a + b + c = 1$. Chứng minh:

a) $1 + 9abc \geq 4(ab + bc + ca)$.

b) $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}$.

c) $7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc$.

2. Cho $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc$.

II. TIẾP TUYẾN HÓA.

Giả sử đồ thị hàm số $y = f(x)$ có phương trình tiếp tuyến là $y = g(x)$. Khi đó ta xét hiệu $f(x) - g(x) = h(x)$.

Do tính chất của tiếp tuyến nên hiệu trên có thể phân tích được thành $h(x) = (x - x_0)^2 \cdot k(x)$, trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm. Bây giờ ta chỉ cần đánh giá $k(x)$ là có thể biết được dấu của nó. Bậc của $k(x)$ bây giờ bé

hơn rất nhiều so với $f(x)$. Đây là một điều thuận lợi. Sau khi xét dấu của $k(x)$, ta suy ra dấu $h(x)$, từ đó có sự so sánh cần thiết giữa $f(x)$ và $g(x)$.

Trong một số bài toán bất đẳng thức đối xứng, biểu thức cần chứng minh thường xuất hiện dưới dạng hàm số của một biến nào đó. Bằng kỹ thuật tiếp tuyến mà ý tưởng như ở trên ta có thể chứng minh được bất đẳng thức đó.

Ví dụ 1: (Hồng Kông 2005)

Cho các số dương a, b, c, d và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq \frac{1}{8}.$$

Chứng minh:

Xét hàm số đặc trưng $f(x) = 6x^3 - x^2$; với $x \in (0; 1)$.

Từ bất đẳng thức trên ta dự đoán điểm rơi tại $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Ta xét phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

trên tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{4}$. Tiếp tuyến là $y = \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$.

Xét hiệu $f(x) - \left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(4x - 1)^2(3x + 1) \geq 0$ với $x \in (0; 1)$. Suy ra $f(x) \geq \left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}\right)$.

Như vậy $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5}{8}(a + b + c + d) - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$.

BĐT được chứng minh.

Ví dụ 2: (MỸ 2003)

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$.

Chứng minh:

Đây là bất đẳng thức thuần nhất bậc 0. Ta chuẩn hóa $a + b + c = 3$.

BĐT trở thành $\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \leq 24$$

Xét hàm số đặc trưng $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}$; $x \in (0; 3)$.

Dự đoán điểm rơi tại $a = b = c = 1$, nên xét tiếp tuyến tại $x = 1$ có phương trình $y = 4x + 4$.

Xét hiệu $f(x) - (4x + 4) = \frac{-(x-1)^2(4x+3)}{x^2-2x+3} \leq 0$; $x \in (0; 3)$.

Do đó $\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 4(a+b+c) + 12 = 24$. đpcm.

Ví dụ 3: (Rumani 2005).

Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Chứng minh:

Do $a, b, c > 0$ nên hiển nhiên $a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 = 9$. Do đó nếu trong 3 số a, b, c có ít nhất một số nhỏ hơn $\frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9$. BĐT đúng.

Xét khi $a, b, c \geq \frac{1}{3}$. Ta suy ra $\frac{1}{3} \leq a, b, c \leq \frac{7}{3}$

Ta xét hàm số đặc trưng $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}; x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$. Ta dự đoán điểm rơi tại $a = b = c = 1$. Tiếp tuyến tại $x = 1$ có phương trình là $y = -4x + 4$. Từ đó ta xét hiệu:

$$f(x) - (-4x + 4) = \frac{(x-1)^2 [2 - (x-1)^2]}{x^2} \geq 0. \text{ Do đó } f(x) \geq -4x + 4.$$

Vậy $f(a) + f(b) + f(c) \geq -4(a + b + c) + 12 = 0$. BĐT được chứng minh.

Bài tập đề nghị:

1. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5$.
2. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq 2$.
3. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$.
4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$.

§11. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ÉT.

Việc sử dụng định lý Vi-ét vào chứng minh bất đẳng thức được tác giả đưa vào trong đề tài “Định lý Vi-ét và ứng dụng”. Trong chuyên đề này xin một lần nữa được nhắc lại ứng dụng này.

Ví dụ 1:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 5$ và $xy + yz + zx = 8$. Chứng minh rằng $1 \leq x, y, z \leq \frac{7}{3}$.

Giải:

Từ giả thiết ta xem z là tham số, ta có hệ phương trình ẩn x, y .

$$\begin{cases} x + y = 5 - z \\ xy + z(x + y) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 - z \\ xy = 8 - z(5 - z) \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét thì x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 - (5 - z)t + 8 - z(5 - z) = 0.$$

Do phương trình có nghiệm đối với x, y nên:

$$\Delta = (5 - z)^2 - 4[8 - z(5 - z)] \geq 0. \Leftrightarrow 1 \leq z \leq \frac{7}{3}$$

Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên ta có kết luận tương tự đối với x và y .

Nhận xét: Ta có thể thay đổi yêu cầu bài toán thành:

Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình: $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$.

Ví dụ 2:

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \in [2; +\infty)$. Chứng minh rằng :

$$(4a - b)(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}) \geq 2(4a - 2b + c) \quad (1).$$

Giải:

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Biến đổi bất đẳng thức (1) bằng cách chia hai vế cho a ta được:

$$(4 - \frac{b}{a})(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}) \geq 2(4 - 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a})$$

$$\Leftrightarrow (4 + x_1 + x_2)(2 + \sqrt{x_1 x_2}) \geq 2(4 + 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_2) \Leftrightarrow \frac{(2 + x_1) + (2 + x_2)}{(2 + x_1)(2 + x_2)} \geq \frac{2}{2 + \sqrt{x_1 x_2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2 + x_1} + \frac{1}{2 + x_2} \geq \frac{2}{2 + \sqrt{x_1 x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{x_1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{x_2}{2}} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2}}}.$$

Đặt $u = \frac{x_1}{2}; v = \frac{x_2}{2}$ ta thu được bất đẳng thức quen thuộc: $\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} \geq \frac{2}{1+\sqrt{uv}}$.

(Có thể chứng minh bằng biến đổi tương đương).

Ví dụ 3:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức: $A = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}.$

Giải:

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Biến đổi biểu thức A ta được:

$$A = \frac{(1 - \frac{b}{a})(2 - \frac{b}{a})}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1 + x_1 + x_2)(2 + x_1 + x_2)}{1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} = 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} \leq 2 + \frac{x_1 + x_2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2}$$

$$\leq 2 + \frac{1 + x_1 x_2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} \leq 3. \text{ Lại có với } b = -2a = -2c \text{ thì } A = 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 3.

Ví dụ 4:

Giả sử phương trình: $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ có ba nghiệm dương.

Chứng minh rằng: $\frac{2a - 3b + 1}{a - b + 2} \leq \frac{3}{4}. (2)$

Giải:

Giả sử 3 nghiệm là x_1, x_2, x_3 . Theo định lý Vi-ét ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a; x_1x_2x_3 = -b.$$

$$\begin{aligned} \text{Thay vào (2) ta được: } & \frac{2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2x_3 + 1} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + x_1 + x_2 + x_3} \\ \Leftrightarrow & \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \frac{x_3}{1+x_3} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + x_1 + x_2 + x_3} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x_1} + 1 - \frac{1}{1+x_2} + 1 - \frac{1}{1+x_3} \leq 3 - \frac{9}{3 + x_1 + x_2 + x_3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \geq \frac{9}{3 + x_1 + x_2 + x_3} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 5:

Cho đa thức bậc n có n nghiệm thực:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + 1 \text{ với } a_i > 0; i = 1, 2, \dots, n.$$

Chứng minh rằng: $P(x) \geq (x+1)^n; \forall x \geq 0$.

Giải:

Để chứng minh bài toán ta cần có bất đẳng thức Minkowski phát biểu như sau:

Cho $2n$ số dương $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$ ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$), ta có:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \quad (2)$$

Ta chứng minh (2). Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có:

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n + b_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}}$$

$$\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n + b_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}}$$

Cộng vế theo vế ta có:

$$n \geq n \left(\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} \right).$$

Giản ước và quy đồng ta thu được điều cần chứng minh (2).

Bây giờ trở lại bài toán (1).

Do các a_i dương nên suy ra các nghiệm x_i của phương trình đều âm.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n$. Theo bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \sqrt[n]{(x+|x_1|)(x+|x_2|)\dots(x+|x_n|)} \geq \sqrt[n]{x.x\dots x} + \sqrt[n]{|x_1.x_2\dots n_n|} = x+1$$

Vậy : $P(x) \geq (x+1)^n \quad (1) ; x \geq 0$.

Ví dụ 6:

Giả sử phương trình : $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$ có n nghiệm thực dương. Chứng minh rằng : $\left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n \geq \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$.

Giải:

Áp dụng định lý Vi-ét và bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_0} &= x_1x_2\dots x_{n-1} + x_2x_3\dots x_n + \dots + x_nx_1\dots x_{n-2} = x_1x_2\dots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq x_1x_2\dots x_n \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}} \\ &= n \cdot (x_1x_2\dots x_n)^{\frac{n-1}{n}} = n \cdot \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \text{ Từ đó suy ra : } \left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n \geq \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Ví dụ 7:

Giả sử $x_1; x_2; x_3$ là ba nghiệm dương của phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; a \neq 0 \quad (1)$. Chứng minh rằng : $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5} \quad (45 \text{ năm Toán học tuổi trẻ})$.

Giải:

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} > 0; x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có :

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = \frac{c}{a} > 0 \quad (a)$$

Cũng theo bất đẳng thức B.C.S ta có: $(x_1 + x_2 + x_3)^2 \leq 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

Nên: $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq \frac{b^2}{3a^2} > 0 \quad (b)$. Nhân vế theo vế (a) và (b) ta được:

$$0 < \frac{b^2c}{3a^3} \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4 \leq 3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \Leftrightarrow 0 < \frac{b^2c}{9a^3} \leq (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

Bình phương hai vế ta lại có :

$$\frac{b^4 c^2}{81 a^6} \leq (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^2 = (x_1^{\frac{7}{2}} \cdot x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{7}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + x_3^{\frac{7}{2}} \cdot x_3^{\frac{1}{2}})^2 \leq (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7)(x_1 + x_2 + x_3) = (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) \left(\frac{-b}{a} \right)$$

Cuối cùng ta thu được: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3 c^2}{81 a^5}$ (đpcm).

Bài tập đề nghị :

1. Giả sử phương trình $ax^3 + (b-a)x^2 + (c-a)x - c = 0$ (1), với $a \neq 0$ có 3 nghiệm là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{2a-b}{a+c-b} + \frac{a}{b} > 0$ (2).

2. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Hãy tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}. \quad (\text{Toán học tuổi trẻ tháng 9-2011}).$$

3. Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$ là đa thức với hệ số không âm và phương trình $P(x) = 0$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(2) \geq 3^n$.

4. Giả sử phương trình: $x^3 - (a+b)x^2 + \frac{(a+b)^2 - 1}{2}x + 1 = 0$.

có 3 nghiệm. Chứng minh rằng: $-\frac{1}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 - 1}{2} + ab \leq 1$.

5. Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ có n nghiệm thực.

Chứng minh rằng: $a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1} a_2$.

§12. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM.

Đạo hàm là một công cụ toán học rất mạnh và hiệu quả. Nhiều bài toán bất đẳng thức nếu sử dụng phương pháp sơ cấp sẽ rất khó, tuy nhiên nếu sử dụng công cụ đạo hàm thì lời giải đôi lúc lại đơn giản và ngắn gọn. Trong bài viết này xin đề cập đến phương pháp đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức. Để sử dụng tốt phương pháp này, học sinh cần có kiến thức cơ bản về giải tích, nắm được các định lý quan trọng như định lý Fermat, định lý Lagrange, định lý Rolle. Các hàm số được xét đến là theo một biến. Học sinh cũng cần có kỹ năng về lập bảng biến thiên, xét hàm số để đánh giá. Nếu hàm cần xét xuất hiện nhiều biến mà ta không thể phân ly chúng, khi đó ta xem một biến chính và các biến khác là tham số, sẽ triệt tiêu khi đạo hàm.

Ví dụ 1:

Cho các số dương a, b, c và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh:

Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, bất đẳng thức được biến đổi thành: $\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = x(1-x^2)$; $x \in (0;1)$. Ta có $f'(x) = 1-3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	

Từ BBT ta thấy $f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Như vậy ta suy ra :

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 2: (Khối A-2011)

Cho $x, y, z \in [1;4]$ và $x \geq y; x \geq z$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Giải:

Sử dụng BĐT $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với $a, b > 0$ và $ab \geq 1$.

Dấu = xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Ta có $P = \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ thì $t \in [1;2]$. Khi đó ta có:

$P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$; $t \in [1;2]$. Ta có:

$f'(t) = \frac{-2[t^3(4t-3)+3t(2t-1)+9]}{(2t^2+3)^2(t+1)^2} < 0$. Do đó $f(t) \geq f(2) = \frac{33}{4}$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$, suy ra

$\frac{x}{y} = 4$. Do đó $x = 4; y = 1$.

Vậy GTNN của P là $\frac{33}{4}$ khi và chỉ khi $x = 4; y = 1$.

Ví dụ 3: (KHỐI D-2007)

Chứng minh rằng $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$; $a \geq b > 0$.

Chứng minh :

Thực hiện việc quy đồng ta có: $(1+4^a)^b \leq (1+4^b)^a$. Lấy logarit cơ số e cả hai vế ta được:

$$\ln(1+4^a)^b \leq \ln(1+4^b)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1+4^b)}{b}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}; x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x) \ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0$.

Do đó $f(x)$ là hàm giảm nên với $a \geq b > 0$ thì $f(a) \leq f(b)$.

Ví dụ 4 (Đề 150 bộ đề 93).

Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$ và thay đổi. Tìm GTLN của biểu thức:

$$F = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c).$$

Chứng minh:

Xem hàm số theo biến a là $f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$.

Ta có: $f'(a) = \frac{1}{b+c+1} - \frac{b}{(a+c+1)^2} - \frac{c}{(a+b+1)^2} - (1-b)(1-c)$.

Lại có: $f''(a) = \frac{2b}{(a+c+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)^3} > 0$, do đó $f'(a)$ là hàm số đồng biến.

Ta xét các trường hợp có thể xảy ra:

+ TH1: nếu $f'(0) \geq 0$; $\forall a \in [0; 1]$, khi đó $f(a) \leq f(1) = \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{b+1+1} + \frac{c}{1+b+1} \leq \frac{1+b+c}{b+c+1} = 1$.

+ TH2: nếu $f'(0) \leq 0 \forall a \in [0; 1]$, khi đó :

$$f(a) \leq f(0) = \frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) = \frac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc} \leq \frac{1+b+c+bc}{1+b+c+bc} = 1.$$

+ TH3: nếu $f'(a)$ đổi dấu trên đoạn $[0; 1]$, vì $f'(a)$ liên tục và tăng nên phương trình $f'(a) = 0$ có duy nhất nghiệm $a = \alpha \in (0; 1)$. Ta có bảng biến thiên:

a	0	α	1
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$f(0)$	$f(\alpha)$	$f(1)$

Từ bảng biến thiên và để ý rằng $f(0) \leq 1; f(1) \leq 1$ nên ta có $f(a) \leq 1$.

Ví dụ 5:

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a \leq b \leq c$; $a+b+c=6$; $ab+bc+ca=9$. Chứng minh rằng:

$$0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 3 \leq c \leq 4.$$

Giải:

Đặt $p = abc$. Xét hàm số $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 6x^2 + 9x - p$ (theo giả thiết).

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vì $f(x)$ có 3 nghiệm là $a \leq b \leq c$ nên $1 \leq b \leq 3$; $f(1).f(3) \leq 0$.

Mà $f(1) = 4 - p$; $f(1) = -p$; $f(0) = -p$; $f(4) = 4 - p$.

Do đó $0 \leq p \leq 4$, suy ra $f(0) \leq 0$; $f(4) \geq 0$. Vậy $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 3 \leq c \leq 4$.

Bài tập đề nghị:

1) Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có:

$$\frac{a^3}{b^3 + c^3} + \frac{b^3}{c^3 + a^3} + \frac{c^3}{a^3 + b^3} \geq \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

2) Chứng minh rằng với mọi $x \in [0; 1]$, ta có bất đẳng thức sau: $x(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}) \leq 16$.

3) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm GTNN biểu thức:

$$P(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \quad (\text{Việt Nam TST 2001})$$

§13. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG S.O.S

Cơ sở của phương pháp phân tích tổng bình phương S.O.S chính là các định lý Hilbert.

Định lý Hilbert 1:

Nếu đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thuần nhất và không âm trong miền D , tức là $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n$ thì có thể biểu diễn $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2$ với p_k là các hàm hữu tỉ thực.

Định lý Hilbert 2:

Nếu đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ không thuần nhất và không âm trong miền

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1 \text{ thì } F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum c_k a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)^{\alpha_{n+1}}$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ là các số nguyên không âm và $c_k > 0$.

Phương pháp S.O.S:

Xét bất đẳng thức $A - B \geq 0$ trong đó có chứa a, b, c . Giả sử ta biến đổi được về dạng:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1).$$

Ta xét các mệnh đề sau:

MD 1:

Nếu $S_a, S_b, S_c \geq 0$ thì hiển nhiên ta có $S \geq 0$. Đây là trường hợp tầm thường.

MD 2:

Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn hai điều kiện:

i) $S_a + S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0$.

ii) Nếu $a \leq b \leq c$ hoặc $a \geq b \geq c$ thì $S_b \geq 0$. Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$.

Chứng minh:

Không mất tổng quát ta giả sử $a \leq b \leq c$ thì $S_b \geq 0$. Khi đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow S_b[(c-b) + (b-a)]^2 + S_a(b-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

MD3 :

Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn điều kiện :

Nếu $a \leq b \leq c$ hoặc $a \geq b \geq c$ thì $S_a \geq 0, S_c \geq 0$ và $S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0$.

MD4:

Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn điều kiện :

Nếu $a \leq b \leq c$ thì $S_a \geq 0, S_b \geq 0$ và $b^2 S_c + c^2 S_b \geq 0$. Khi đó

$$(S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0.$$

MD5:

Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn 2 điều kiện :

i) $S_a + S_b > 0; S_b + S_c > 0; S_c + S_a > 0$; ii) $S_a.S_b + S_b.S_c + S_c.S_a \geq 0$.

Khi đó $(S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0$.

MD6:

Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn 2 điều kiện :

i) $a \leq b \leq c$ hoặc $a \geq b \geq c$.

ii) Tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho $S_a + \alpha^2.S_c + (\alpha+1)^2.S_b \geq 0$.

$$\text{iii) } \begin{cases} |a-b| \geq \alpha|c-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_c + \frac{\alpha+1}{\alpha}S_b \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} |c-b| \geq \alpha|a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + \frac{\alpha+1}{\alpha}S_b \geq 0 \end{cases}.$$

HQ: ($\alpha=1$)

Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn 2 điều kiện :

$$\text{i) } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c; \text{ ii) } S_a + S_c + 4S_b \geq 0; \text{ iii) } \begin{cases} |a-b| \geq |c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + 2S_b \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} |c-b| \geq |a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + 2S_b \geq 0 \end{cases}.$$

Khi đó $(S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0$.

Định lý về phép biểu diễn S.O.S:

Giả sử hai đa thức hoán vị thuần nhất A, B có cùng bậc và cùng biến số. Khi đó hiệu của hai đa thức có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương S.O.S

$$\sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} - \sum_{cyc} a_1^{\beta_1} . a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} = P_{ij}(a)(a_i - a_j)^2$$

trong đó $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = m$ và $a = \{a_i\}_{i=1}^n$.

Sau đây là một số biểu diễn minh họa các trường hợp đặc biệt:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)}{2} \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$$

$$a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{3}.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = \frac{(2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2}{3}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a = \frac{(3a^2 + 2ab + b^2)(a-b)^2 + (3b^2 + 2bc + c^2)(b-c)^2 + (3c^2 + 2ca + a^2)(c-a)^2}{4}.$$

$$a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3 = \frac{a+b+c}{3} \left[(b-a)^3 + (c-b)^3 + (a-c)^3 \right].$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = \frac{(a-b)^2(a+b)^2 + (b-c)^2(b+c)^2 + (c-a)^2(c+a)^2}{2}.$$

Sau đây ta xét một số ví dụ minh họa cho phương pháp S.O.S.

Ví dụ 1:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $(ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$.

Chứng minh:

Không mất tổng quát ta giả sử $c \geq b \geq a > 0$. Đặt $\begin{cases} b+c=2x \\ c+a=2y \\ a+b=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+y+z \\ b=x-y+z \\ c=x+y-z \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là ba cạnh của tam}$

giác.

Do $c \geq b \geq a > 0$ nên $x \geq y \geq z > 0$. Bất đẳng thức trở thành

$$(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left[\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

$$\Leftrightarrow (2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right] \geq 9 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \left(\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} \right) \geq 0$$

Đặt $S_x = \left(\frac{2}{yz} - \frac{1}{x^2} \right); S_y = \left(\frac{2}{zx} - \frac{1}{y^2} \right); S_z = \left(\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} \right)$.

Bất đẳng thức trở thành $S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$.

Do $x \geq y \geq z > 0$ và $y+z > x$ nên $S_x \geq 0; S_y \geq 0$. Ta chứng minh $y^2 S_z + z^2 S_x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq xyz$.

Do $y+z > x$ nên ta chỉ cần chứng minh $y^3 + z^3 \geq (x+y)yz \Leftrightarrow (x-y)^2(y+z) \geq 0$.

Ví dụ 2: (IMO 2005)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Chứng minh:

Ta đưa về đồng bậc bằng cách sử dụng $abc \geq 1$ ta có:

$$S \geq \frac{a^5 - a^2(abc)}{a^5 + (b^2 + c^2)(abc)} + \frac{b^5 - b^2(abc)}{b^5 + (c^2 + a^2)(abc)} + \frac{c^5 - c^2(abc)}{c^5 + (a^2 + b^2)(abc)} = \sum_{cyc} \frac{a^4 - a^2bc}{a^4 + (b^2 + c^2)bc} \geq \sum_{cyc} \frac{2a^4 - a^2(b^2 + c^2)}{2a^4 + (b^2 + c^2)^2}.$$

$$\text{Đặt } x = a^2; y = b^2; z = c^2. \text{ BĐT trở thành } S \geq \frac{2x^2 - x(y+z)}{2x^2 + (y+z)^2} + \frac{2y^2 - y(z+x)}{2y^2 + (z+x)^2} + \frac{2z^2 - z(x+y)}{2z^2 + (x+y)^2}$$

$$= \sum_{cyc} (x-y) \left(\frac{x}{2x^2 + (y+z)^2} - \frac{y}{2y^2 + (z+x)^2} \right) = \sum_{cyc} (x-y)^2 \frac{x^2 + y^2 - xy + z^2 + 2z(x+y)}{[2x^2 + (y+z)^2][2y^2 + (z+x)^2]} \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 3:

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$ (1).

Chứng minh:

Thực hiện quy đồng ta có (1) $\Leftrightarrow 3(a^2c + b^2a + c^2b) \geq (a^2b + b^2c + c^2a) + 3abc$

$$\Leftrightarrow 3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2c + b^2a + c^2b)] \leq 2[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a)] + (a^3 + b^3 + c^3) - 3abc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a+b)(a-b)^2 \leq \frac{2}{3} \sum_{cyc} (2a+b)(a-b)^2 + \frac{a+b+c}{2} \sum_{cyc} (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(5a-5b+3c) + (b-c)^2(5b-5c+3a) + (c-a)^2(5c-5a+3b) \geq 0.$$

Ta đặt $S_c = (5a-5b+3c)$; $S_b = (5c-5a+3b)$; $S_a = (5b-5c+3a)$, ta đưa BĐT về

$$S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b nằm giữa a và c . Ta xét 2 trường hợp:

TH1: $c \geq b \geq a$. Khi đó $S_b = (5c-5a+3b) > 0$; $S_a + S_b = 8b-2a > 0$; $S_b + S_c = 8c-2b > 0$.

Áp dụng MĐ2 ta có điều phải chứng minh.

TH2: $c \leq b \leq a$.

Khi đó $S_a + S_c + 4S_b = 18c + 12b - 12a > 12(b+c-a) > 0$.

+ Nếu $|a-b| \geq |c-b| \Rightarrow c > a-b > b-c \Rightarrow 2c > b \Rightarrow S_b + S_c = 8c-2b > 4b-2b = 2b > 0$

$$\Rightarrow S_c + 2S_b = S_b + S_c + S_b > S_b + 2b = 5(c-a+b) > 0$$

+ Nếu $|c-b| \geq |a-b| \Rightarrow b-c \geq a-b \geq 0 \Rightarrow 2b \geq a+c > a \Rightarrow S_a + S_b = 8b-2a > 4a-2a = 2a > 0$

$$\Rightarrow S_a + 2S_b > S_b + 2a = 5c-3a+3b > 0.$$

Áp dụng MĐ6 ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4:

Tìm hằng số k lớn nhất ($k > 0$) sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c > 0$.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq k + \frac{3}{2} \quad (1).$$

Chứng minh:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) \geq k \left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right) \quad (2)$$

Ta biến đổi $\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a-b}{b+c} + \frac{a-c}{b+c} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a-b) \left[\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right] = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}$.

Nên BĐT cần chứng minh tương đương:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq k \left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq k \frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq k \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} - k \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 \left[\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)(c+a)} - k \right] \geq 0 \quad (3).$$

Điều kiện cần:

Trong (3) cho $b=c \neq a$, ta có $k \leq \frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+2}{2\left(\frac{a}{b}+1\right)} = u(t)$, với $t = \frac{a}{b} > 0$.

Bằng cách tìm miền giá trị của $u(t)$ ta được $u \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Điều kiện đủ:

Bây giờ ta chứng minh $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là giá trị tốt nhất để của bất đẳng thức (1).

Trong (3) ta đặt $S_a = \frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(b+a)} - k$; $S_b = \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(c+b)} - k$; $S_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)(a+c)} - k$, với $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \leq S_b \leq S_c$.

Xét $S_a + S_b = \frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(b+a)} + \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(c+b)} - 2k = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 2k$.

Đặt $t = \frac{a+b}{2}$, khi đó :

$$S_a + S_b \geq \frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 \right] (2t+2c)}{2t(b+c)(c+a)} - 2k \geq \frac{(2t^2+c^2)(t+c)}{t \left[\frac{(b+c)+(c+a)}{2} \right]^2} - 2k = \frac{2v^2+c^2}{t(t+c)} - 2k.$$

Như vậy $S_a + S_b \geq 2 \left(\frac{2v^2 + c^2}{2v(v+c)} - k \right) = 2 \left(\frac{\left(\frac{c}{v}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{c}{v} + 1\right)} - k \right) \geq 0$, do $\frac{\left(\frac{c}{v}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{c}{v} + 1\right)} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} = k$.

Do $S_a \leq S_b \leq S_c$ và $S_a + S_b \geq 0$ nên $S_b \geq 0$ đồng thời ta cũng suy ra $S_a + S_c \geq 0$; $S_b + S_c \geq 0$.

Áp dụng MĐ2 ta có điều phải chứng minh.

Vậy $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là hằng số lớn nhất để bất đẳng thức (1) thỏa mãn.

Ví dụ 5:

Cho $a, b, c > 0$. Tìm hằng số k tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k \quad (1).$$

Giải:

Ta biến đổi BĐT

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 = \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} + \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$\text{Và } 1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

$$\text{Nên bất đẳng thức trở thành } \sum_{cyc} \left(\frac{1}{bc} - \frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)} \right) (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} S_a (b-c)^2 \geq 0.$$

$$\text{Trong đó ta đặt } S_a = 2a(a^2+b^2+c^2) - kabc; S_b = 2b(a^2+b^2+c^2) - kabc; S_c = 2c(a^2+b^2+c^2) - kabc.$$

Để tìm giá trị tối ưu k ta làm như sau:

$$\text{Trong (2) cho } b=c \text{ thì } (2) \Leftrightarrow S_b \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2+2b^2) - kab \geq 0 \Leftrightarrow 2(a-\sqrt{2}b)^2 + (4\sqrt{2}-k)ab \geq 0$$

$$\text{Lại cho } a = \sqrt{2}b \text{ ta được } k \leq 4\sqrt{2}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng khi $k = 4\sqrt{2}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$. Mặt khác

$$S_b + S_c = 2(b+c)(a^2+b^2+c^2) - 8\sqrt{2}abc \geq 4\sqrt{2}bc(a^2+2bc) - 8\sqrt{2}abc = 4\sqrt{2}bc(a-\sqrt{2}bc)^2 \geq 0.$$

Sử dụng mệnh đề 2 ta có điều phải chứng minh.

Vậy $k = 4\sqrt{2}$ là hằng số tốt nhất.

Ví dụ 5:

$$\text{Cho } a, b, c \geq 0. \text{ Tìm hằng số tốt nhất của BĐT: } \frac{bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+kb^2} + \frac{ab}{a^2+b^2+kc^2} \leq \frac{3}{5}.$$

§13. SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC.

Khi làm toán người ta có nhận định rằng người giải được một bài toán thì vẫn chưa giải quyết trọn vẹn được cả vấn đề mà phần còn lại thuộc về người ra đề toán đó. Quả thật để ra được một bài toán thì nhận thức của người ra đề phải trên một bậc so với bài toán đó hay ít ra họ cũng đã phải có sẵn sơ đồ giải trong đầu. Khi đọc đề thi Đại học, đề HSG hằng năm, tôi luôn dành một sự khâm phục đối với người ra đề thi đó.

Sẽ chưa trọn vẹn nếu sau khi cùng trao đổi các phương pháp chứng minh bất đẳng thức chúng ta lại không tìm hiểu xem các đề toán đó được ra như thế nào, hay thử ra một bài toán chẳng hạn. Nhiều bài toán khó đôi khi lại có xuất xứ từ những suy luận hết sức đơn giản. Một đề toán được xem là hay nếu phát biểu của nó đơn giản, có cấu trúc đẹp mắt nhưng đòi hỏi khả năng tư duy cao và các phát biểu là tối ưu. Nhưng thiết nghĩ dù một đề Toán có hay như thế nào thì cũng có xuất xứ từ một sự kiện nào đó. Bài viết này xin đề xuất một số hướng suy luận để dẫn đến một bài toán bất đẳng thức.

Ví dụ 1:

Chẳng hạn từ điều hiển nhiên: $x^2 - (y - z)^2 \leq x^2$, suy ra $(x - y + z)(x + y - z) \leq x^2$.

Tương tự $(y + z - x)(y - z + x) \leq y^2$; $(z + x - y)(z - x + y) \leq z^2$. Ta có thể đưa ra bài toán sau:

Bài toán 1: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì ta có:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Ví dụ 2:

Từ điều kiện $x, y \geq 0$ ta có $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$. Ta đưa ra các bài toán sau và thay đổi tí giả thiết:

Đặt $a = x > 0$; $b = y > 0$ ta có $\frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{a + b}{2}$. Ta có bài toán:

Bài toán 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c.$$

Ta lại có $x^3 + y^3 + xyz \geq x^2y + xy^2 + xyz \Rightarrow \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xy(x + y + z)} = \frac{z}{xyz(x + y + z)}$ dẫn đến bài toán sau.

Bài toán 3:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Nếu cho thêm giả thiết $xyz = 1$, bằng phép đặt $x^3 = a; y^3 = b; z^3 = c$ ta có bài toán sau:

Bài toán 4:

Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a + b + 1} + \frac{1}{b + c + 1} + \frac{1}{c + a + 1} \leq 1.$$

Ví dụ 3:

Từ bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ (*) với $x, y > 0$. Ta có bài toán sau:

Bài toán 5:

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thì ta có:

$$\frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{b + c - a} + \frac{1}{c + a - b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Cũng từ (*) ta có $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{y^n}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^n \geq \frac{2^{n+1}}{(x + y)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ta có bài toán sau:

Bài toán 6:

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thì ta có:

$$\frac{1}{(a+b-c)^n} + \frac{1}{(b+c-a)^n} + \frac{1}{(c+a-b)^n} \geq \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}, n \in N^*.$$

Dùng (*) ta có $\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{2}{a+2b+c}$ ta nảy sinh ra bài toán mới :

Bài toán 7 :

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b}.$$

Lại dùng (*) $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \frac{x^2}{x^6} + \frac{1}{y^4} \geq \frac{(x+1)^2}{x^6+y^4} \geq \frac{4x}{x^6+y^4}$ và tương tự. Ta có bài toán :

Bài toán 8:

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{2a}{a^6+b^4} + \frac{2b}{b^6+c^4} + \frac{2c}{c^6+a^4} \leq \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$$

Ví dụ 4 :

Từ bất đẳng thức Nesbit cho 3 số dương : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (*).

Nếu nhân vào cả hai vế của (*) với $(a+b+c)$ và tiến hành thu gọn ta có bài toán mới :

Bài toán 9 :

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

Thêm vào giả thiết $a+b+c=3$ hoặc $abc=1$ ta thu được kết quả :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}. (**)$$

Trong (**) ta thay $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ ta có bài toán mới.

Bài toán 10 :

Chứng minh rằng với $x, y, z > 0$ và $xyz=1$ ta có $\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$ (IMO-95).

Ví dụ 5 :

Dùng bất đẳng thức B.C.S và bất đẳng thức Cô-si ta chứng minh được bài toán sau :

Cho $x, y, z > 0$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$ (*).

Bây giờ nếu đặt $x=2^a; y=2^b; z=2^c$ thì với $xyz=1$ dẫn đến $a+b+c=0$. Ta có bài toán :

Bài toán 11 :

Cho các số thực a, b, c và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng :

$$8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$$

(ĐHQG Hà Nội khối A-2000).

Ví dụ 6 :

Sử dụng BĐT Cô-si ta chứng minh được bài toán đơn giản như sau :

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Từ đó ta có $8 \frac{a}{b+c} \frac{b}{c+a} \frac{c}{a+b} \leq 1$. Nếu ta đặt $x = \frac{a}{b+c}; y = \frac{b}{c+a}; z = \frac{c}{a+b}$, thì ta có :

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2.$$

Như vậy ta có bài toán mới :

Bài toán 12 :

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$. Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Từ đó ta có bài toán tổng quát sau :

Bài toán 13 :

Cho n số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = n-1$.

Chứng minh rằng: $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$.

Bình luận :

Trên đây ta cùng dựng lại một số quá trình thiết lập bất đẳng thức mới, ta nhận thấy hầu như chúng được sáng tạo từ các bất đẳng thức cơ bản. Tùy theo dụng ý của người ra đề sẽ tạo ra vô vàn bài toán khác nhau. Ta có thể thấy việc chứng minh một bất đẳng thức giống như việc tìm lại các dấu vết của một con đường đi từ bất đẳng thức xuất phát tới bất đẳng thức cần chứng minh mà đã bị xóa. Quá trình tìm tòi và sáng tạo sẽ tìm ra nhiều con đường đi ngắn hơn và dễ đi hơn.

PHẦN THỨ III

KẾT QUẢ.

Trên đây là nội dung của đề tài ” Bất đẳng thức ”. Việc áp dụng đề tài vào thực tiễn giảng dạy được thực hiện theo từng phần. Đề tài được phát huy tối đa ở các lớp luyện thi đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi. Sau đây là phần kết quả :

1) Sử dụng ở lớp luyện thi Đại học :

Trong đề thi Đại học do tác giả biên soạn có câu Bất đẳng thức thì trong lớp đã có một số học sinh giải quyết được . Sau đây là liệt kê điểm thi đại học của một số em tiêu biểu.

Lớp- niên khóa	Học sinh giải quyết được bài Bất đẳng thức	Điểm thi đại học môn Toán	
LỚP 12A từ năm 2008 đến 2012	1. Nguyễn Thị Yến Nhi	8,5(Khối A)	9,5(B)
	2. Bùi Thị Thu Nga	8(A)	9(B)
	3. Nguyễn T.Mộng Tuyền	8 (A)	8.5(B)
	4. Nguyễn Thị Thúy Quỳnh	8 (A)	8(B)
	5. Phạm Xuân Hà	8(A)	8(B)
	6. Nguyễn Đức Tuyền	7,5(A)	8(B)
	7. Bùi Văn Thanh Hào	8,5(A)	9,5(B)
	8. Châu Nguyệt Quế	8(A)	9(B)
	9. Lưu Đức Trung	8(A)	8(A)
	10. Ngô T.T Trang	8(A)	8,5(B)
	11. Nguyễn T.Mỹ Thu	8,5(A)	9,5(B)
	12. Đỗ Thị Trang	8,5(A)	8,5(B)
	13. Nguyễn Viết Xuân	8,5(A)	9(B)
	14. Nguyễn Thị Cẩm Tú	8(A)	9(B)
	15. Lại Thị Anh Thư	8(A)	8(B)
	16. Keo Hoàng Phương	8(A)	8(B)

2) Sử dụng ở chương trình Bồi dưỡng học sinh giỏi:

Chuyên đề này tác giả hằng năm vẫn sử dụng để dạy đội tuyển học sinh giỏi , và bước đầu cũng cho thấy đã có được một số kết quả. Học sinh được bồi dưỡng đã cảm thấy tự tin hơn trong bài toán bất đẳng thức. Một số em cũng đã đạt được một số giải cấp Tỉnh.

Họ và tên học sinh	Tên giải thưởng
Nguyễn Thị Mỹ Thu	Lương Thế Vinh(giải II)
Nguyễn Viết Xuân	Lương Thế Vinh(giải II)
Đỗ Thị Trang	Lương Thế Vinh(giải II)
Lại Thị Anh Thư	Lương Thế Vinh(Khuyến khích)
Nguyễn Thị Thúy	Violympic(khuyến khích)
Hoàng Hải	Giải toán Casio (giải II)

Sau khi áp dụng chuyên đề này vào giảng dạy , tôi nhận thấy rằng đối với học sinh khá giỏi đã giải các bài tập về bất đẳng thức tốt hơn, nắm được các kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức một cách có căn bản. Các em đã tiếp cận và chứng minh bất đẳng thức chủ động hơn trước. Nhiều em đã biết sử dụng linh hoạt các phương pháp để chứng minh những bài bất đẳng thức khó. Các dạng bài tập về tìm Max, Min cũng được xử lý thành thạo hơn trước khi đề tài được triển khai.

Dù rất cố gắng triển khai tới học sinh , nhưng do nội dung kiến thức tương đối khó nên đối tượng học sinh nắm bắt được chưa nhiều. Tuy vậy , tác giả cũng mạnh dạn viết đề tài này giới thiệu với quý đồng nghiệp gần xa. Dù bản thân đã rất cố gắng tìm tòi trong quá trình viết, nhưng do năng lực và kinh nghiệm còn nhiều hạn chế nên đề tài sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Mong được sự thông cảm và chia sẻ để đề tài được hoàn chỉnh hơn. Cuối cùng xin được cảm ơn các đồng nghiệp bộ môn Toán , Ban giám hiệu trường THPT Phan Bội Châu đã động viên, giúp đỡ tôi hoàn thành đề tài này.

Minh Hòa, tháng 2 năm 2013.

Đánh giá của hội đồng khoa học trường

Người viết đề tài

NGUYỄN THÀNH NHÂN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Trong chuyên đề này có sử dụng một số tài liệu tham khảo:

- Những viên kim cương trong bất đẳng thức , tác giả Trần Phương , NXB Tri Thức 2009.
- Các phương pháp chứng minh Bất đẳng thức , tác giả Trần Tuấn Anh, NXB Tổng Hợp 2005.
- Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục.
- Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và tuổi trẻ, tập 1 đến 5, NXBGD.
- Sáng tạo Bất đẳng thức, tác giả Phạm Kim Hùng , NXB Hà Nội 2010

PHỤ LỤC

STT	NỘI DUNG	TRANG
1	Mở đầu	1
2	Nội dung đề tài	5
3	§1 Phương pháp đồng bậc trong bất đẳng thức có điều kiện	5
4	§2 ứng dụng hệ quả của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki	11
5	§3 Sử dụng phân tử cực hạn	20
6	§4 Bất đẳng thức hoán vị và ứng dụng	29
7	§5 Phương pháp đánh giá đánh giá	38
8	§6 Phương pháp hệ số bất định	43
9	§7 Chuẩn hóa trong bất đẳng thức thuần nhất	48
10	§8 Phép đổi biến trong bất đẳng thức đối xứng	57
11	§9 Kỹ thuật chọn điểm rơi- kỹ thuật tách ghép	64
12	§10 Đánh giá hàm số tại biên và tiếp tuyến hóa	76
13	§11 Sử dụng định lý Vi-ét	81
14	§12 Sử dụng đạo hàm	87
15	§13 Sáng tạo bất đẳng thức	90
16	Kết quả	95