

ĐỀ TÀI

ĐỊNH LÝ VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

PHẦN MỞ ĐẦU

1) Lý do chọn đề tài:

Như chúng ta đã biết, Toán học có vai trò rất quan trọng trong nghiên cứu khoa học và đời sống xã hội. Việc giảng dạy và học tập để lĩnh hội được kiến thức Toán một cách vững vàng đòi hỏi người dạy và học phải có một sự đầu tư công phu và đúng phương pháp. Kiến thức Toán cần phải trình bày và nắm bắt một cách có hệ thống.

Về chủ đề **định lý Vi-et và ứng dụng**, tôi thấy đã có nhiều tác giả viết và xuất bản, nhưng đa phần chỉ là một ứng dụng riêng lẻ vào một dạng bài tập nào đó. Chưa thấy tài liệu nào viết dưới dạng chủ đề riêng về định lý Vi-et. Điều đó thôi thúc tôi viết đề tài này nhằm mục đích hệ thống lại hoàn chỉnh hơn.

Bản thân sau một số năm giảng dạy môn Toán có rút ra nhận xét là học sinh thường nắm kiến thức Toán một cách cục bộ chứ không hệ thống được kiến thức. Các em thường ít thấy được mối quan hệ giữa các vấn đề toán học với nhau. Chính vì thế nên khi gặp các vấn đề toán có cùng bản chất nhưng phát biểu ở dạng khác thì học sinh thường tỏ ra lúng túng và bẽ tắc.

Tôi xin đưa ra đây ví dụ. Có lần tôi cho học sinh giải bài tập sau:

Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x + 3m+2}{x+2}$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 5.

Học sinh sau khi biểu diễn tọa độ cực trị theo nghiệm của y' , để tính khoảng cách bằng 5, đa số các em đều cố gắng giải tìm nghiệm $x_1; x_2$ của y' rồi dùng công thức khoảng cách. Lời giải theo hướng đó thường rất cồng kềnh khi nghiệm y' chứa căn thức, nên tính toán sẽ rất khó khăn và thường là thất bại.

Tuy nhiên nếu các em biết sử dụng định lý Vi-et để đưa về tổng và tích thì đơn giản biết mấy. Như thế các em đã không thấy được **ỨNG DỤNG** của định lý Vi-et trong trường hợp này.

Qua quá trình giảng dạy và nghiên cứu , tôi thấy **ứng dụng của định lý Vi-et** là rất phong phú, nó xuất hiện trong nhiều dạng toán có liên quan tới nghiệm của phương trình đa thức. Vì thế tôi quyết định chọn đề tài :

ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG.

Nhằm hệ thống lại các dạng toán có liên quan tới tính chất nghiệm của phương trình đa thức. Đề tài đề cập tới nhiều dạng bài tập, mỗi dạng có số lượng bài tập phong phú, đủ cho học sinh có điều kiện để nhận ra bản chất của từng dạng. Qua đề tài này , hi vọng mang đến cho học sinh cái nhìn từ nhiều phía của định lý Vi-et, cũng như thấy được vai trò to lớn của nó trong bộ môn Toán.

2) Mục đích nghiên cứu đề tài:

Bản thân hằng năm có tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi Toán trong nhà trường cũng như tham gia luyện thi đại học. Tôi cố gắng đúc rút, xâu chuỗi toàn bộ kiến thức mà bản thân thu thập được thành một chủ đề về định lý Vi-et. Mong muốn nó có thể giải quyết được một lớp các bài tập điển hình của chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi và chương trình thi Đại học.

Các ví dụ minh họa ở đây cũng được rút ra chủ yếu từ hai kỳ thi đó, một số thí dụ do bản thân sáng tạo ra. Mong muốn đề tài có thể đến với đông đảo học sinh, nhằm giúp các em đạt kết quả cao trong các kỳ thi sắp tới.

Qua đề tài này có thể giúp học sinh có nhiều phương pháp giải các dạng bài tập có liên quan tới nghiệm của phương trình.

Việc nghiên cứu đề tài giúp tôi có một tài liệu mang tính hệ thống về định lý Vi-et, phục vụ cho công tác giảng dạy và bồi dưỡng của mình. Qua nghiên cứu đề tài , giúp tôi tự tin hơn trong công tác giảng dạy.

Một mục đích nữa của việc nghiên cứu đề tài là bản thân mong muốn có nhiều điều kiện để giao lưu, học hỏi, trao đổi chuyên môn với bạn bè đồng nghiệp.

3) Nhiệm vụ của việc nghiên cứu đề tài:

Quá trình nghiên cứu đề tài để bản thân trau dồi thêm kiến thức chuyên môn và nghiệp vụ. Cách thức thực hiện một đề tài khoa học là như thế nào. Có điều kiện để trao đổi nhiều hơn với thầy cô trong tổ Toán về các vấn đề Toán. Quan trọng hơn nữa là đưa tới cho học sinh một số dạng bài tập có ứng dụng cao trong các kỳ thi, giúp các em có kết quả tốt hơn.

Đề tài mà tác giả thực hiện với nhiệm vụ là giúp học sinh cải tiến phương pháp học tập. Biết quan tâm tới bản chất Toán học trong mỗi phát biểu. Cách trình bày của đề tài từ mức độ dễ đến khó, nhằm từng bước giúp học sinh nâng cao và kiến thức và kỹ năng của mình.

Đề tài khi được công bố, nó phải giúp học sinh nắm vững hơn về các ứng dụng của định lý Vi-et. Làm tốt hơn các dạng bài tập mà các thế hệ học sinh trước đang còn lúng túng và bế tắc.

Một nhiệm vụ nữa của đề tài mà tác giả thấy cần thiết là đưa đến cho học sinh khá, giỏi một tài liệu bổ ích, được chất lọc một cách công phu. Qua đề tài này, các em có thể tìm thấy cho mình nhiều ví dụ thú vị.

4) Phương pháp nghiên cứu đề tài:

4.1) Phương pháp tiếp cận vấn đề :

Đề tài này được tác giả ấp ủ từ những năm 2007 sau một thời gian tham gia giảng dạy. Từ đó đến nay, tác giả đã tiếp cận với nhiều khóa học trò, tiếp cận với nhiều đề thi đại học và học sinh giỏi, từ đó rút ra được nhiều nội dung hơn, có sự đánh giá ngày càng toàn diện hơn. Qua phân tích và giải đề thi, giúp tác giả có được nhiều ví dụ dẫn chứng cho dạng bài tập mà mình đưa ra. Từ đó đề tài có nội dung phong phú hơn.

Đề tài được trình bày theo các vấn đề từ mức dễ đến khó hơn. Từ đó dẫn dắt học sinh có thể lĩnh hội được dần các nội dung khó.

Các kiến thức Toán, đặc biệt là các **định lý** và **bổ đề**, tác giả đều cố gắng trình bày phép chứng minh. Xem đó là kiến thức cơ sở cho nội dung đang xét tới. Với cách trình bày đó, học sinh sẽ không cảm thấy đón nhận kiến thức một cách gượng ép, theo kiểu công nhận. Các em có thể từ từ tiếp cận vấn đề một cách tự nhiên.

Vì tư tưởng của đề tài là làm cho học sinh thấy rõ cơ sở, bản chất Toán học trong mỗi vấn đề nên người viết luôn đưa ra các bình luận sau mỗi ví dụ và các bài tập đề nghị sau mỗi dạng.

4.2) Phương pháp phân tích, bình luận:

Trước khi đi vào mỗi dạng, tác giả thường đưa ra những **phân tích** của mình về các vấn đề thường gặp của dạng đó. Khái quát phương pháp giải cũng như chỉ ra các việc cần làm khi giải. Học sinh sẽ bước đầu hình dung được nội dung phương pháp giải tổng quát của vấn đề mình đang gặp.

Qua các ví dụ, tác giả thường có các **bình luận** về dạng bài tập đó, từ đó học sinh có thể thấy rõ bản chất của vấn đề mình đang gặp phải. Thấy được tính cụ thể cũng như tổng quát trong mỗi bài toán.

Qua mỗi **bình luận** tác giả muốn trao đổi với người đọc về phương pháp giải, cách suy nghĩ nào đi tới lời giải như thế. Thấy được tính tương tự hóa trong các bài toán khác nhau. Một khi nắm được bản chất, học sinh có thể làm được các bài tập tương tự, cũng như có thể sáng tạo ra các bài toán khác từ bài toán gốc.

4.3) Phương pháp tổng hợp, hệ thống hóa:

Đây có lẽ là phương pháp chủ đạo của đề tài. Nội dung đề tài được phân chia thành nhiều dạng Toán, đó là quá trình tổng hợp những kiến thức từ nhiều nguồn tài liệu và từ bản thân rút ra.

Các dạng bài tập đưa ra cũng ở mức độ khá trở lên, nên đòi hỏi nhiều quá trình suy luận và tổng hợp lời giải .

Vì nội dung đề tài xuyên suốt cả một vấn đề Toán học khá rộng , nên đòi hỏi người viết phải có sự chuẩn bị khá lâu dài về mặt thời gian (ý tưởng hình thành), và khi viết ra cần phải tổng hợp các kiến thức lại thành chủ đề thống nhất.

Các chủ đề khác nhau được hệ thống hóa theo một bố cục chặt chẽ theo hai mảng lớn là định lý Vi-et bậc hai và tổng quát.

Đọc qua đề tài ta thấy các vấn đề Toán học đề cập tới ở đây đều gắn trên cái cột sống là định lý Vi-et. Tác giả đã cố gắng tổng hợp các vấn đề Toán học có cùng bản chất đó.

5) Phạm vi nghiên cứu:

Đề tài chủ yếu nghiên cứu về lĩnh vực Đại số mà trọng tâm là nghiệm của đa thức. Các vấn đề về Dãy số, Số học, Bất đẳng thức , Lượng giác và Hệ phương trình cũng được đề cập trong các dạng toán liên quan.

Giải tích được đề cập tới về vấn đề cực trị và tiếp tuyến của đồ thị hàm số. Tất cả các vấn đề trên có một mối quan hệ chặt chẽ về mặt phương pháp giải quyết đó là sử dụng tới định lý Vi-et. Từ đó cho thấy mối quan hệ thống nhất giữa các chủ đề toán học.

Phạm vi kiến thức mà đề tài đề cập đến chủ yếu là các kỳ thi tuyển sinh Đại học , cao đẳng cũng như là kỳ thi học sinh giỏi. Đây là những kỳ thi quan trọng diễn ra hằng năm. Các kiến thức đưa ra ở trong này hoàn toàn là toán sơ cấp, điều đó phù hợp với chương trình Toán phổ thông.

6) Một vài trở ngại khi thực hiện đề tài.

Đây là đề tài mà tác giả rất tâm đắc. Nó được hình thành từ mấy năm về trước. Quá trình giảng dạy , thấy rõ định lý Vi-et có rất nhiều ứng dụng trong các bài tập. Vì thế nó luôn thôi thúc tác giả viết ra thành một vấn đề cụ thể và có tính hệ thống về định lý Vi-et.

Trường Phan Bội Châu nơi tôi đang dạy là một trường vùng sâu, vùng xa. Trình độ học sinh ở đây nói chung là còn thấp, đặc biệt các em thường học yếu Toán. Phần lớn các em lại chưa thực sự có niềm đam mê về Toán.

Do đó tôi luôn trăn trở liệu đề tài của mình viết ra có được chính học trò của mình đón nhận và có giúp cho các em học tốt hơn về Toán không ?.

Hi vọng bằng những kinh nghiệm của bản thân, sẽ góp phần nhỏ để có thể cải tiến phong trào bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi Đại học, cao đẳng trong nhà trường.

NỘI DUNG ĐỀ TÀI

PHẦN THỨ NHẤT

GIỚI THIỆU VỀ ĐỊNH LÝ VI-ET

I- ĐỊNH LÝ VI-ET CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI:

Định lý Vi-et học sinh được học từ lớp 9, gồm có định lý thuận và định lý đảo. Định lý cho ta mối quan hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc hai và các hệ số của nó.

Định lý :

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì tổng và tích của chúng là: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Ngược lại nếu có hai số $x_1; x_2$ thỏa mãn :

$$x_1 + x_2 = S; \quad x_1 \cdot x_2 = P$$

thì $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$.

Điều đáng nói trong định lý này là trong khi giải toán, ta có thể không quan tâm tới giá trị của x_1 và x_2 mà chỉ cần biết tổng và tích của chúng. Từ đó ta có những biểu diễn cần thiết.

II- ĐỊNH LÝ VI-ET TỔNG QUÁT:

Định lý:

Cho phương trình bậc n :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1) \text{ với } a_n \neq 0.$$

Nếu phương trình có n nghiệm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thì ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots \dots \dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right. \quad (I)$$

Ngược lại nếu có các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn hệ (I) thì chúng là nghiệm của phương trình (I)

PHẦN THỨ HAI

ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ET

I-ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ET BẬC HAI:

1) DẠNG 1: BIỂU THỨC LÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM

Phân tích:

Trong khi làm các bài tập dạng này, học sinh cần lưu ý sự tồn tại nghiệm của phương trình, sau đó biểu diễn các biểu thức qua $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ để có thể sử dụng định lý Vi-et. Các hằng đẳng thức hay dùng là:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab ; \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

Ví dụ 1:

Tìm m để phương trình: $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

Giải

Trước hết điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 0 là:

$$\Delta' = 4(m-1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) > 0.$$

Giải được $m < -2 - \sqrt{3}$ hoặc $m > -2 + \sqrt{3}$ và $m \neq 2 \pm \sqrt{3}$.

Theo định lý Vi-et ta có :

$$x_1 + x_2 = \frac{-4(m-1)}{3}; x_1 x_2 = \frac{-(m^2 - 4m + 1)}{3}.$$

Lại có biểu thức ban đầu được đưa về là : $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (*)

Thay tổng và tích các nghiệm vào (*) ta được:

$$-\frac{4(m-1)}{3} \left(\frac{3}{m^2 - 4m + 1} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)(m^2 - 4m - 5)}{3(m^2 - 4m + 1)} = 0$$

Ta được $m=1$; $m=-1$; $m=5$. Kết hợp điều kiện ta nhận được $m=1$; $m=5$.

Ví dụ 2: Xét phương trình: $x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + 5m^2 + 3 = 0$ (1) m là tham số.

1) Chứng minh rằng phương trình luôn có 4 nghiệm phân biệt với mọi m .

2) Gọi các nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4 . Hãy tính theo m giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}.$$

Giải:

1) Đặt $x^2 = y$ ($y \geq 0$) Pt (1) trở thành:

$$y^2 - 2(m^2 + 2)y + 5m^2 + 3 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = [-(m^2 + 2)]^2 - (5m^2 + 3)$$

$$= (m^2 + 2)^2 - (5m^2 + 3)$$

$$= m^4 + 4m^2 + 4 - 5m^2 - 3$$

$$= m^4 - m^2 + 1$$

$$= (m^2)^2 - 2m^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= (m^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

Do $\Delta > 0, \forall m$ nên phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-et ta có:

$$S = y_1 + y_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m^2 + 2)}{1} = 2(m^2 + 2) > 0, \forall m$$

$$P = y_1 \cdot y_2 = \frac{c}{a} = 5m^2 + 3 > 0, \forall m$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ cùng dương.

Vậy (2) luôn có hai nghiệm dương phân biệt nên (1) luôn có 4 nghiệm phân biệt.

2) Theo kết quả trên ta có $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 0$

Vậy $x_1 = \sqrt{y_1}, x_2 = -\sqrt{y_1}, x_3 = \sqrt{y_2}, x_4 = -\sqrt{y_2}$

$$M = \frac{1}{(\sqrt{y_1})^2} + \frac{1}{(-\sqrt{y_1})^2} + \frac{1}{(\sqrt{y_2})^2} + \frac{1}{(-\sqrt{y_2})^2} = \frac{2}{y_1} + \frac{2}{y_2} = \frac{2(y_1 + y_2)}{y_1 + y_2}$$

Thay kết quả S và P vào M ta có:

$$M = \frac{2 \cdot 2(m^2 + 2)}{5m^2 + 3} = \frac{4(m^2 + 2)}{5m^2 + 3}$$

Kết luận: $M = \frac{4(m^2 + 2)}{5m^2 + 3}$

Ví dụ 3 :

Cho phương trình $x^2 - ax + a - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

a) Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức $M = \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 - 3}{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1}$

b) Tìm a để tổng bình phương hai nghiệm đạt GTNN ?

Giải:

a) Ta có: $M = \frac{3(x_1^2 + x_2^2 - 1)}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} = \frac{3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1]}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}$

Theo định lý Vi-et ta có :

$$S = x_1 + x_2 = a; P = x_1 \cdot x_2 = a - 1$$

Vậy
$$M = \frac{3[a^2 - 2(a-1) - 1]}{a(a-1)} = \frac{3[(a+1)(a-1) - 2(a-1)]}{a(a-1)}$$
$$= \frac{3(a-1)^2}{a(a-1)} = \frac{3(a-1)}{a} \quad (\text{ĐK : } a \neq 0, a \neq 1)$$

b) Ta có $S = x_1 + x_2 = a \quad (1)$

$$P = x_1 \cdot x_2 = a - 1 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1$$

và $A=1$ khi $a=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 khi $a=1$.

Ví dụ 4:

(Đề thi HSG lớp 9 thành phố HCM năm học 2003- 2004) (4®)

a) Tìm m để phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của nó, tìm GTLN của biểu thức:

$$A = |2x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 4|.$$

Giải:

a) Ta có: $\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 2) = -m^2 + 4.$

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' = 4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

b) Theo định lý Vi-et ta có :

$$x_1 + x_2 = -m; x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{2}$$

Vậy $A = |2x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 4| = |(m + 2)(m - 3)| = -(m + 2)(m - 3)$, vì $m \in (-2; 2)$

Do đó $A = (m + 2)(3 - m) = -m^2 + m + 6 = -(m - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$

Vậy GTLN của A là $\frac{25}{4}$ khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}.$

Ví dụ 5:

Cho đa thức $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1$ có các nghiệm là $x_i; i = \overline{1, 4}$. Hãy tính tổng sau:

$$S = \sum_{i=1}^4 \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}.$$

Giải:

Ta viết lại :

$$f(x) = (x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 + \sqrt{8} = 0(1) \\ x^2 + 2x - 3 - \sqrt{8} = 0(2) \end{cases}.$$

Gọi các nghiệm của (1) là $x_1; x_2$; các nghiệm của (2) là $x_3; x_4$.

Ta có :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2x_1^2 + 1}{(x_1^2 - 1)^2} + \frac{2x_2^2 + 1}{(x_2^2 - 1)^2} = \frac{2x_1^2 + 1}{(x_1 - 1)^2(x_1 + 1)^2} + \frac{2x_2^2 + 1}{(x_2 - 1)^2(x_2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x_1^2 + 1}{(x_1 - 1)^2(4 - \sqrt{8})} + \frac{2x_2^2 + 1}{(x_2 - 1)^2(4 - \sqrt{8})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(4-\sqrt{8})} \left[\frac{(2x_1^2+1)(x_2-1)^2 + (2x_2^2+1)(x_1-1)^2}{[(x_1-1)(x_2-1)]^2} \right] \\
 &= \frac{1}{(4-\sqrt{8})} \left[\frac{(2x_1^2+1)(x_2^2-2x_2+1) + (2x_2^2+1)(x_1^2-2x_1+1)}{[(x_1x_2-x_1-x_2+1)]^2} \right] \\
 &= \frac{1}{(4-\sqrt{8})} \left[\frac{4x_1^2x_2^2-4x_1x_2(x_1+x_2)+3(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+2}{[(x_1x_2-x_1-x_2+1)]^2} \right].
 \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -2$; $x_1x_2 = -3 + \sqrt{8}$.

Thay vào biểu thức trên ta có: $S_1 = \frac{1}{4+\sqrt{8}} \frac{80+22\sqrt{8}}{8}$.

Thực hiện việc tính toán tương tự đối với phương trình (2) ta có :

$$S = S_1 + S_2 = \frac{9}{2}.$$

Bài tập tương tự:

1) Cho phương trình : $x^2 + x + m = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm nghịch đảo của nhau.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = x_1^2(x_1+1) + x_2^2(x_2+1).$$

2) Cho hàm số $y = x^2 - 4x + m$.

Tìm m sao cho đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B

sao cho $OA=3OB$.

3) Tìm m sao cho phương trình: $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$ có nghiệm thỏa mãn:

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2.$$

4) Tìm m sao cho đồ thị hàm số : $y = x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB=BC=CD=DA$.

5) Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình : $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Hãy thiết lập phương trình bậc hai có nghiệm là : $\frac{x_1}{x_2+1}$ và $\frac{x_2}{x_1+1}$.

2) DẠNG 2: GIẢI HỆ ĐỐI XỨNG KIỂU 1

Phân tích:

- Hệ đối xứng hai ẩn kiểu 1 là hệ gồm hai phương trình, hai ẩn, trong đó nếu ta hoán đổi vai trò các ẩn trong từng phương trình thì mỗi phương trình đều không thay đổi.

- Để giải hệ đối xứng kiểu 1 bằng cách sử dụng định lý Vi-et, ta thường biểu diễn các phương trình qua tổng và tích của hai ẩn đó.

- Các hằng đẳng thức hay dùng là:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab ; \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$$

Giải:

Ta đặt $u = \sqrt{x} \geq 0$; $v = \sqrt{y} \geq 0$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u + v) = 30 \\ (u + v)^3 - 3uv(u + v) = 35 \end{cases}$$

Tiếp theo ta đặt

$$S = u + v; P = u \cdot v \quad (S^2 \geq 4P),$$

ta được hệ:
$$\begin{cases} SP = 30 \\ S^3 - 3SP = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Theo định lý Vi-et ta có u, v là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Giải được $t = 2$; $t = 3$.

Do đó
$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}.$$

Dẫn đến nghiệm của hệ là $(4; 9)$; $(9; 4)$.

Ví dụ 2: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2(m+1) \\ 2xy + x + y = 2(m+2) \end{cases}.$$

Giải:

Đây là hệ đối xứng kiểu 1.

Giả sử (a;b) là nghiệm của hệ thì (b;a) cũng là nghiệm của hệ đó.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì a=b.

Thay vào hệ ta được $\begin{cases} a^3 = m+1 \\ a^2 + a = m+2 \end{cases}.$

Trừ vế theo vế phương trình trên cho phương trình dưới ta được

$$a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Từ đó suy ra m=0 hoặc m=-2.

Thử lại với m=0 ta có hệ: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ 2xy + x + y = 4 \end{cases}.$

Đặt u= x+y; v=x.y ($u^2 \geq 4v$), ta có hệ :

$$\begin{cases} uv = 2 \\ 2v + u = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-et thì x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2t + 1 = 0, \text{ ta được } t = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất x=y=1.

Với m=-2 ta có hệ: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = -2 \\ 2xy + x + y = 0 \end{cases}.$

Bằng cách đặt tương tự ta được (u;v)=(2;-1) và (u;v)=(-2;1).

Do đó hệ không có nghiệm duy nhất.

Vậy m=0 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 - \sqrt{2} \\ x^4 + y^4 = 5 \end{cases}$$

Giải:

Ta có $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$. Nên đặt $u = x^2 + y^2$; $v = xy$, ta có hệ trở thành
$$\begin{cases} u + v = 3 - \sqrt{2} \\ u^2 - 2v^2 = 5 \end{cases}$$
.

Giải hệ được
$$\begin{cases} u = 3 \\ v = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(I) hoặc là } \begin{cases} u = 9 - 4\sqrt{2} \\ v = -6 + 3\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Với hệ (I) thì
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2y^2 = 2 \end{cases}$$
.

Theo định lý Vi-et thì x^2 ; y^2 là nghiệm của phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$, ta được $t = 1$; $t = 2$.

Thế vào hệ ta được
$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 2 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{ hoặc là } \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm $(x; y)$ là $(1; -\sqrt{2})$; $(-1; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; -1)$; $(-\sqrt{2}; 1)$.

Trường hợp kia dẫn đến phương trình bậc hai vô nghiệm.

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1 - x)(1 - y) = 6 \end{cases}$$

Giải:

Nhân các biểu thức ở vế trái mỗi phương trình, rồi đặt $u = x + y$; $v = xy$, ta đưa hệ đã cho về hệ

sau:
$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv + u - v - 2 = 0 \\ v - u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = -6 \\ v - u = 5 \end{cases}$$

Dùng phương pháp thế ta được $v = 5 + u$, thế vào phương trình trên ta được $u(5 + u) = -6 \Leftrightarrow u^2 + 5u + 6 = 0$, giải được $u = -3$; $u = -2$.

Với $u = -3$ thì $v = 2$, theo định lý Vi-et ta có u, v là nghiệm của phương trình

$t^2 + 3t + 2 = 0$, suy ra $t = -1$; $t = -2$. Vậy hệ có nghiệm $(-1; -2)$; $(-2; -1)$.

Với $u = -2$ thì $v = 3$.

Theo định lý Vi-et thì x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 + 2t + 3 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ đã cho có hai nghiệm như ở trên.

Bài tập tương tự:

1) Giải hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = a \end{cases}.$$

$$c) \begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{y^2x}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}.$$

2) Tìm a để hệ :

$$\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2y + xy^2 = 3a - 8 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

3) Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}.$$

Xác định a để xy nhỏ nhất.

$$4) \text{ Giải và biện luận hệ phương trình : } \begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 - y^3 = m(x + y) \end{cases}.$$

3) DẠNG 3: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**Phân tích:**

Định lý Vi-et vẫn có thể sử dụng để chứng minh bất đẳng thức. Tất nhiên ở đây ta hiểu là dùng nó để biến đổi trung gian.

Để có thể sử dụng định lý Vi-et, thông thường các dữ kiện của bài toán thường đưa về được dưới dạng tổng và tích các ẩn. Quá trình chứng minh ta có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, bất đẳng thức cô điển, các phép biến đổi tương đương...

Ví dụ 1:

Cho x, y, z khác 0 và thỏa mãn $x + y + z = xyz$ và $x^2 = yz$.

Chứng minh rằng: $x^2 \geq 3$.

Giải:

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y+z = x^3 - x \\ yz = x^2 \end{cases}$.

Theo định lý Vi-et thì y, z là nghiệm của phương trình :

$$t^2 - (x^3 - x)t + x^2 = 0.$$

Do tồn tại các số y, z nên phương trình trên phải có nghiệm .

Tức là: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (x^3 - x)^2 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2[(x^2 - 1)^2 - 4] \geq 0$.

Vì $x \neq 0$ nên $[(x^2 - 1)^2 - 4] \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 2 \\ x^2 - 1 \leq -2 \end{cases}$.

Điều kiện ở bất phương trình thứ 2 không thể xảy ra.

Vậy $x^2 \geq 3$.

Ví dụ 2: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=5$ và $xy+yz+zx= 8$. Chứng minh rằng

$$1 \leq x, y, z \leq \frac{7}{3}.$$

Giải:

Từ giả thiết ta xem z là tham số, ta có hệ phương trình ẩn x, y :

$$\begin{cases} x+y = 5-z \\ xy + z(x+y) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5-z \\ xy = 8 - z(5-z) \end{cases}$$

Theo định lý Vi-et thì x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 - (5-z)t + 8 - z(5-z) = 0.$$

Do phương trình có nghiệm đối với x, y nên :

$$\Delta = (5-z)^2 - 4[8 - z(5-z)] \geq 0. \Leftrightarrow 1 \leq z \leq \frac{7}{3}$$

Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên ta có kết luận tương tự đối với x và y .

Ví dụ 3:

Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình: $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$.

Giải:

Đây là hệ có cấu trúc đặc biệt. Do số ẩn nhiều hơn số phương trình nên ta cần giải theo phương pháp đặc biệt, đó là đánh giá.

Do vai trò bình đẳng của các ẩn, ta có thể đánh giá một ẩn nào đó, chẳng hạn là ẩn z .

Ta đánh giá z như sau. Xem hệ đối xứng hai ẩn kiểu 1 đối với x, y và z là tham số. Ta viết lại hệ:

$$\begin{cases} xy + (y+x)z = 8 \\ x+y = 5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (5-z)z = 8 \\ x+y = 5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 - (5-z)z \\ x+y = 5-z \end{cases}.$$

Điều kiện để hệ có nghiệm đối với x, y ta phải có:

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (5-z)^2 \geq 32 - 4z(5-z) \Leftrightarrow 3z^2 - 10z + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq z \leq \frac{7}{3}.$$

Vì z nguyên nên ta được $z=1; z=2$. với $z=1$ ta được $x=y=2$. với $z=2$ ta được $(x;y)=(1;2)$ hoặc $(x;y)=(2;1)$. Vậy hệ có nghiệm nguyên $(x;y;z)$ là $(1;2;2); (2;2;1); (2;1;2)$.

Chú ý:

Nếu các bài tập liên quan đến việc chứng minh các bất đẳng thức giữa các hệ số của phương trình, ta nhanh chóng biểu diễn các hệ số đó qua các nghiệm, rồi chứng minh bất đẳng thức giữa các nghiệm đó.

Ví dụ 4 :

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a khác 0) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thuộc $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}.$$

Giải:

Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Biến đổi biểu thức A ta được:

$$A = \frac{(1 - \frac{b}{a})(2 - \frac{b}{a})}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1 + x_1 + x_2)(2 + x_1 + x_2)}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} = 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2}$$

$$\leq 2 + \frac{x_1 + x_2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2}$$

$$\leq 2 + \frac{1 + x_1x_2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} \leq 3.$$

Lại có với $b = -2a = -2c$ thì $A = 3$. Nên giá trị lớn nhất của A là 3.

Ví dụ 5:

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) với $a > 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc $[2; +\infty)$. Chứng minh rằng :

$$(2 + (4a - b)(2 + \sqrt{\frac{c}{a}})) \geq 2(4a - 2b + c) \quad (1)$$

Giải:

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo hệ thức Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Biến đổi bất đẳng thức (1) bằng cách chia hai vế cho a ta được:

$$(4 - \frac{b}{a})(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}) \geq 2(4 - 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a})$$

$$\Leftrightarrow (4 + x_1 + x_2)(2 + \sqrt{x_1x_2}) \geq 2(4 + 2x_1 + 2x_2 + x_1x_2) \Leftrightarrow \frac{(2 + x_1) + (2 + x_2)}{(2 + x_1)(2 + x_2)} \geq \frac{2}{2 + \sqrt{x_1x_2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2 + x_1} + \frac{1}{2 + x_2} \geq \frac{2}{2 + \sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{x_1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{x_2}{2}} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2}}}.$$

Đặt $u = \frac{x_1}{2}; v = \frac{x_2}{2}$ ta thu được bất đẳng thức quen thuộc :

$$\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 + v} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{uv}}.$$

(có thể chứng minh bằng biến đổi tương đương)

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6:

Giả sử phương trình $ax^3 + (b-a)x^2 + (c-a)x - c = 0$ (1), với $a \neq 0$ có 3 nghiệm là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{2a-b}{a+c-b} + \frac{a}{b} > 0 \quad (2).$$

Giải:

Dễ thấy (1) có nghiệm $x=1$, hạ bậc ta được: $(x-1)(ax^2+bx+c)=0$.

Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình : $ax^2+bx+c=0$.

Theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Biến đổi (2) như sau

$$\begin{aligned} \frac{2 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}} + \frac{a}{b} > 0 &\Leftrightarrow \frac{2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} - \frac{1}{x_1 + x_2} > 0 \\ &\Leftrightarrow (2 + x_1 + x_2)(x_1 + x_2) > (1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2) \\ &\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 > 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $x_1; x_2; 1$ là độ dài ba cạnh của tam giác.

Bình luận:

Từ các biểu thức đối xứng của hai nghiệm, nếu xuất phát từ một số bất đẳng thức quen thuộc, ta có thể sáng tạo ra một số bài toán mới.

1) Chẳng hạn từ bất đẳng thức :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \text{ với } a > 0; b > 0.$$

Ta có thể tạo ra bài toán sau:

Giả sử phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có các nghiệm dương $x_1; x_2$.

Chứng minh rằng : $\frac{b}{c} \leq \frac{4a}{b}$.

2) Hay chẳng hạn từ bất đẳng thức :

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

ta có thể đưa ra bài toán sau:

Chứng minh rằng nếu phương trình :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \text{ có nghiệm } x_1; x_2; x_3.$$

Chứng minh rằng: $\frac{b^2 - 3ac}{a^2} \geq 0$.

3) Xuất phát từ các bất đẳng thức:

Cho các số thực dương a, b , ta có:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}$$

Sử dụng các kết quả trên ta có thể có các bài toán mới:

Giả sử phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ với $a > 0$, có các nghiệm dương. Chứng minh rằng các hệ số của phương trình thỏa mãn:

$$i) \quad b^2 \leq 3ac.$$

$$ii) \quad (3abc - b^3)^2 \geq 4a^3c^3.$$

Bài tập tương tự:

1) Biết rằng a, b, c thỏa mãn:
$$\begin{cases} a > 0 \\ a^2 = bc \\ a + b + c = 3abc \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $a \geq \sqrt{3}$; $b > 0$; $c > 0$; $b^2 + c^2 \geq 2a^2$.

2) Biết rằng a, b, c là ba số thỏa mãn:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $-\frac{4}{3} \leq a; b; c \leq \frac{4}{3}$.

3) Cho $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$S = ac + bd + cd \leq \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}.$$

4) Cho $|ax^2 + bx + 4| \leq 1, x \in [-1; 1]$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$D = 8a^2 + 6b^2.$$

5) Cho $a + b + c = 0; a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Đặt $M = \max\{a, b, c\}; m = \min\{a, b, c\}$. Chứng minh rằng:

$$m.M \leq \frac{1}{4}.$$

6) Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN của $F = xy + yz + zx$.

7) Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Hãy tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}.$$

(toán học tuổi trẻ tháng 9-2011)

4) DẠNG 4: ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Phân tích:

Đây là dạng bài tập phổ biến trong các đề thi Đại học, cao đẳng những năm gần đây. Điều quan trọng ở trong dạng bài tập này là học trò làm sao biểu diễn được tọa độ điểm cực trị một cách gọn gàng và nhanh chóng nhất. Để làm được điều đó, học sinh phải biết tọa độ các điểm cực trị nghiệm đúng phương trình nào?

Để tiện trong việc giải các bài tập về cực trị, ta cần lưu ý các kiến thức liên quan sau:

Định lý Phéc-ma:

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 \in (a; b)$ và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh:

Ta giả sử x_0 là điểm cực đại. Vì hàm số có đạo hàm tại x_0 nên :

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Do x_0 là điểm CĐ nên ta có $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Do đó:

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ khi $h > 0$ và $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ khi $h < 0$. Chuyển qua giới hạn ta có

$f'(x_0^+) \leq 0$ và $f'(x_0^-) \geq 0$. Do đó $f'(x_0) = 0$ (do tồn tại đạo hàm tại x_0)

Trường hợp x_0 là điểm CT được chứng minh tương tự.

Bổ đề 1:

Nếu hàm số đa thức $y = f(x)$ có cực trị thì phương trình của đường đi qua các điểm cực trị là $y = r(x)$, trong đó $r(x)$ là đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$.

Chứng minh:

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được thương là $h(x)$, đa thức dư là $r(x)$. vậy ta có thể viết lại:

$$f(x) = f'(x).h(x) + r(x)$$

Theo định lý Phéc-ma thì nếu x_0 là điểm cực trị $f'(x_0) = 0$. Do đó thay vào biểu thức trên ta được: $f(x_0) = r(x_0)$

Ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 2:

Nếu hàm số phân thức $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ đã có đạo hàm và có đạo hàm tại điểm nào đó thì ta đã có đạo hàm

nhập đúng phương trình $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Chứng minh:

Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 , vậy thì :

$$y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(x_0).v(x_0) - u(x_0).v'(x_0)}{v^2(x_0)} = 0$$

Hay : $u'(x_0).v(x_0) - u(x_0).v'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

hay : $y = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

Ví dụ 1:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (3m+2)x + m+4}{x-1}$. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 3.

Giải:

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x + 2m - 2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có cực đại cực tiểu khi phương trình:

$$x^2 - 2x + 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt, ta được $m < 3/2$.

Giả sử $x_1; x_2$ là hoành độ cực trị.

Khi đó chúng là nghiệm của (1) nên theo định lý Vi-et ta có :

$$x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = 2m - 2.$$

Theo bổ đề 2 ta có tung độ cực trị tương ứng là :

$$y_1 = 2x_1 - 3m - 2; y_2 = 2x_2 - 3m - 2$$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$.

Theo đề ta có :

$$AB < 3 \Leftrightarrow AB^2 < 9 \Leftrightarrow 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] < 9$$

$$\Leftrightarrow 60 - 40m < 9 \Leftrightarrow m > \frac{51}{40}.$$

Đổi chiều điều kiện ta được $\frac{51}{40} < m < \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 3}{x + 1}$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và chúng nằm về hai phía đối với đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ (d).

Giải:

Ta có : $y' = \frac{x^2 + 2x + m - 3}{(x + 1)^2}$.

Hàm số có cực đại cực tiểu khi phương trình :

$$x^2 + 2x + m - 3 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt, ta được $m < 4$.

Giả sử các điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$.

Khi đó $x_1; x_2$ là nghiệm của (1) nên theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = m - 3$. Theo bổ đề 2 ta có: $y_1 = 2x_1 + m; y_2 = 2x_2 + m$.

Để A, B nằm về khác phía đối với (d) thì :

$$(2x_1 + y_1 - 1)(2x_2 + y_2 - 1) < 0.$$

Tính toán ta được $-3 - 4\sqrt{3} < m < -3 + 4\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3:

Chứng minh rằng hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

Giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 12x + 4$.

Ta sẽ chứng minh phương trình:

$$4x^3 - 12x + 4 = 0 \quad (1)$$

có 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) = 4x^3 - 12x + 4$. Ta có $f(-2) = -4; f(-1) = 12; f(1) = -4; f(2) = 12$.

Theo tính chất của hàm số liên tục thì $f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất 3 điểm.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm số bậc ba nên có tối đa 3 nghiệm.

Vậy $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Ta gọi 3 điểm đó là:

$$A(x_1; x_1^4 - 6x_1^2 + 4x_1 + 6); B(x_2; x_2^4 - 6x_2^2 + 4x_2 + 6); C(x_3; x_3^4 - 6x_3^2 + 4x_3 + 6).$$

Theo định lý Vi-et vì $x_1; x_2; x_3$ là 3 nghiệm của (1) nên ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Tương ứng ta có:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= x_1^4 - 6x_1^2 + 4x_1 + 6 + (x_2^4 - 6x_2^2 + 4x_2 + 6) + (x_3^4 - 6x_3^2 + 4x_3 + 6) \\ &= (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1 + x_2 + x_3) + 18. \end{aligned}$$

Cũng vì $x_1; x_2; x_3$ là các nghiệm của (1) nên ta có $x_1^3 - 3x_1 + 1 = 0$.

Suy ra $x_1^4 - 3x_1^2 + x_1 = 0$.

Tương tự đối với $x_2; x_3$. Vậy nên:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3).$$

Theo hệ thức

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3).$$

Lại theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3.$$

Thay vào ta tính được $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Vậy gốc tọa độ là trọng tâm của tam giác ABC.

Ví dụ 4:

Cho hàm số :

$$y = \frac{x^2 + (m+2)x + 3m+2}{x+2}.$$

Tìm m để hàm số có cực trị và $y_{\max}^2 + y_{\min}^2 > \frac{1}{2}$.

Giải:

Ta có : $y' = \frac{x^2 + 4x + 2 - m}{(x+2)^2}.$

Hàm số có cực trị khi phương trình : $x^2 + 4x + 2 - m = 0$ (1)

có hai nghiệm phân biệt khác -2.

Tìm được $m > -2$ (*)

Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của (1), cũng là các hoành độ cực trị.

Theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 = -4; x_1 x_2 = 2 - m$$

Khi đó tọa độ cực trị là

$$A(x_1; 2x_1 + m + 2); B(x_2; 2x_2 + m + 2).$$

Theo giả thiết ta có : $y_{\max}^2 + y_{\min}^2 > \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (2x_1 + m + 2)^2 + (2x_2 + m + 2)^2 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(m + 2)(x_1 + x_2) + 2(m + 2)^2 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 8(m + 2)(x_1 + x_2) + 4(m + 2)^2 > 1.$$

Thay m vào ta được :

$$8[16 - 2(2 - m)] + 4(m + 2)^2 - 32(m + 2) > 1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 47 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{47}}{2} \text{ (do điều kiện (*))}$$

Ví dụ 5:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$.

Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và khoảng cách giữa chúng tới đường thẳng $x + y + 2 = 0$ là bằng nhau.

Giải:

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x + 1)^2}$.

Để hàm số có CĐ, CT thì phương trình $x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2m \neq 0 \\ 3 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2} \quad (*).$$

Tương tự bài 4) ta có tọa độ các điểm cực trị là $A(x_1; 2x_1 + 2); A(x_2; 2x_2 + 2)$

Theo đề ra ta có:

$$\begin{aligned} d(A; d) &= d(B; d) \\ \Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| &= |3x_2 + 2m + 2|. \end{aligned}$$

Bình phương 2 vế rồi chuyển vế, đặt nhân tử chung ta có:

$$\begin{aligned} (3x_1 - 3x_2)(3x_1 + 3x_2 + 4m + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x_1 + 3x_2 + 4m + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Theo định lý Vi-et thì $x_1 + x_2 = -2$.

Thay vào biểu thức cuối ta được $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6:

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$.

Tìm m để hàm số có CĐ, CT và $|y_{CD} - y_{CT}| = 4$.

Giải:

Ta có : $y' = \frac{-x^2 + 8x - m - 12}{(x - 4)^2}$.

Để hàm số có CĐ, CT thì phương trình :

$$-x^2 + 8x - m - 12 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Gọi $x_1; x_2$ là các hoành độ cực trị, thì $x_1; x_2$ cũng là nghiệm của (1) nên

$$x_1 + x_2 = 8; \quad x_1 x_2 = m + 12.$$

Theo đề $|y_{CD} - y_{CT}| = 4 \Leftrightarrow 2|x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

Thay hệ thức Vi-et vào ta có $m=3$ (thỏa mãn)

Vậy $m=3$.

Bài tập tương tự:

1) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Tìm m để hàm số có CĐ, CT tại $x_1; x_2$

thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

2) Tìm m để hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có CĐ, CT thỏa mãn $|y_{\max} - y_{\min}| > 8$

(Đề 75).

3) Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có điểm CĐ, CT nằm về hai phía đối với

trục Ox .

5) DẠNG 5 : ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Phân tích:

Bài tập về tiếp tuyến thường liên quan tới các điều kiện tiếp xúc của đường cong và đường thẳng. Cần làm cho học sinh thấy rõ tọa độ điểm tiếp xúc thường là nghiệm của một phương trình nào đó mà ta có thể đưa về bậc hai để sử dụng định lý Vi-et. Các kỹ thuật về nhân nghiệm cần được sử dụng tốt ở dạng bài tập này.

Ví dụ 1:

Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C).

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x+m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B.

Tìm m để tổng k_1+k_2 lớn nhất.

(Đề thi đại học khối A năm 2011).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là : $\frac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow -x+1 = (2x-1)(x+m)$

(do $x=\frac{1}{2}$ không là nghiệm.)

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0(1).$$

Ta có : $\Delta = m^2 + 2m + 2 > 0, \forall m$.

Nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B.

Ta gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A,B. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1+x_2=-m \text{ và } x_1.x_2=\frac{-m-1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tổng } k_1+k_2 &= \frac{-1}{(2x_1-1)^2} + \frac{-1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1]^2} \\ &= -4m^2 - 8m - 6 = -(2m+1)^2 - 2 \leq -2. \end{aligned}$$

Suy ra k_1+k_2 lớn nhất bằng -2 khi $m = -1$.

Bình luận:

Nếu không sử dụng định lý Vi-et, ta có thể dùng bất đẳng thức Cô-si để đánh giá biểu thức

$$\frac{1}{(2x_1-1)^2} + \frac{1}{(2x_2-1)^2} \geq 2 \frac{1}{(2x_1-1)(2x_2-1)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \frac{-m}{2}$.

Thay vào phương trình ta tìm được $m = -1$.

Ví dụ 2:

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C).

Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến (C).

Giải:

Ta gọi $M(m; -2)$ là điểm thuộc đường thẳng $y = -2$. Đường thẳng qua M với hệ số góc k có phương trình:

$$y = k(x - m) - 2 \text{ (d)}.$$

Điều kiện để (d) tiếp xúc với (C) là ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - m) - 2 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) lên (1) ta được :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - m) - 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[2x^2 + (1 - 3m)x + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x^2 + (1 - 3m)x + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Với $x = 2$, ta suy ra $k = 0$. đường thẳng vuông góc với (d) có dạng $x = a$.

Dễ thấy đường $x = a$ không thể là tiếp tuyến của (C).

Nên không có tiếp tuyến nào của (C) vuông góc với tiếp tuyến trên.

Do đó để có cặp tuyến tuyến vuông góc thì các nghiệm phải là nghiệm của (3). Trước hết (3) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Delta = (1-3m)^2 - 8 \geq 0 \quad \text{và} \quad m \neq 2.$$

Khi đó gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (3) thì theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{3m-1}{2}; x_1 x_2 = 1.$$

Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của các tiếp tuyến. Ta có $k_1 = f'(x_1); k_2 = f'(x_2)$. Vì hai tiếp tuyến vuông góc nên:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 - 6x_1)(3x_2^2 - 6x_2) = -1.$$

Thay số vào ta được $m = \frac{55}{27}$. Thử lại ta thấy giá trị này thỏa mãn.

Vậy điểm cần tìm là $M(\frac{55}{27}; -2)$.

.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 8}{x - m} (C_m)$. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tiếp tuyến tương ứng tại A và B vuông góc.

Giải :

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình :

$$f(x) = x^2 + mx - 8 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt.

Ta có :

$$\Delta = m^2 + 32 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

$f(m)$ khác 0 với mọi m .

Như vậy với mọi m , đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1), thì $x_1; x_2$ cũng là hoành độ của A và B.

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + 8 - m^2}{(x - m)^2} = 1 + \frac{8 - 2m^2}{(x - m)^2}.$$

Tiếp tuyến tại A ; B lần lượt có hệ số góc là

$$k_1 = 1 + \frac{8 - 2m^2}{(x_1 - m)^2} ; k_2 = 1 + \frac{8 - 2m^2}{(x_2 - m)^2}.$$

Để hai tiếp tuyến vuông góc thì $k_1.k_2 = -1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 1 + (8 - 2m)^2 \left[\frac{1}{(x_1 - m)^2} - \frac{1}{(x_2 - m)^2} \right] + \frac{(8 - 2m^2)^2}{(x_1 - m)^2 (x_2 - m)^2} = -1 \\ &\Leftrightarrow 1 + (8 - 2m)^2 \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2m(x_1 + x_2) + 2m^2}{(x_1 - m)^2 (x_2 - m)^2} \right] + \frac{(8 - 2m^2)^2}{(x_1 - m)^2 (x_2 - m)^2} = -1 \end{aligned}$$

Theo định lý Vi-et ta có : $x_1 + x_2 = -m ; x_1 x_2 = -8$.

Từ đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 + 16$.

Và $(x_1 - m)(x_2 - m) = x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 = -8 + 2m^2$.

Thay vào $k_1.k_2 = -1$ ta được $m = \pm 2\sqrt{10}$.

Ví dụ 4 :

Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x+1}$ (C)

Chứng minh rằng qua A(1 ; -1) luôn vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc.

Giải :

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d đi qua A. Khi đó d có phương trình :

$$y = k(x - 1) - 1 \quad (d)$$

Vì (d) tiếp xúc với (C) nên ta có hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x} = kx - k - 1(1) \\ k = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}(2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) lên (1) và biến đổi , thu gọn , cuối cùng ta được :

$$x^2 + 3x + 1 = 0 (*).$$

Vì (*) có hai nghiệm phân biệt nên từ A ta luôn kẻ được hai tiếp tuyến đến (C).

Gọi x_1 ; x_2 là các nghiệm của (*). Theo định lý Vi-et ta có : $x_1 + x_2 = -3$; $x_1 x_2 = 1$.

Gọi k_1 ; k_2 là hệ số góc của các tiếp tuyến tương ứng với hoành độ tiếp điểm x_1 ; x_2 .

Ta có :

$$k_1 k_2 = \frac{x_1^2 + 2x_1}{(x_1 + 1)^2} \cdot \frac{x_2^2 + 2x_2}{(x_2 + 1)^2} = \frac{x_1 x_2 [x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4]}{[x_1 x_2 + x_1 + x_2]^2} = \frac{1(1 - 6 + 4)}{(-3 + 1 + 1)^2} = -1.$$

Vậy hai tiếp tuyến vuông góc.

Bài tập tương tự :

1) Tìm quỹ tích tất cả các điểm từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

2) Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại đó vuông góc.

3) Tìm các điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến đồ thị hàm số $y = x^2 + 7x + 6$ (ĐHTH Hà Nội 89).

4) Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

6) DẠNG 6: TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ VÀ TẬP HỢP ĐIỂM.

Phân tích:

Đây cũng là dạng bài tập hay gặp trong các kỳ thi tuyển sinh. Công việc đầu tiên học sinh cần làm là viết phương trình hoành độ giao điểm. Từ phương trình đó, sử dụng định lý Vi-et để biểu diễn các biểu thức đề bài yêu cầu qua hệ số của phương trình. Cuối cùng là đánh giá biểu thức đó thông qua các hệ số vừa thay vào.

Ví dụ 1:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $d: y = m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 1$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$m = \frac{x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + (3 - 2m)x - 3 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \Delta = (3 - 2m)^2 + 12 - 8m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{7}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

Ta gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của (1).

Theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 = 2m - 3; \quad x_1 x_2 = 2m - 3.$$

Tọa độ các giao điểm $A(x_1; m); B(x_2; m)$. Theo đề ra ta có

$$AB^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1.$$

Thay vào ta có:

$$(2m - 3)^2 - 4(2m - 3) = 1. \text{ Giải được } m = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 2:

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1}$. Chứng minh rằng với mọi m thì đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị trên tại hai điểm phân biệt A;B. Tìm m để AB ngắn nhất.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là

$$m = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1} (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ m(x - 1) = -x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + (m - 1)x - m - 1 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $f(x) = x^2 + (m - 1)x - m - 1 = 0$. Ta có $f(1) = -1 \neq 0$.

Lại có $\Delta = m^2 + 2m + 5 > 0, \forall m$

Nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của (1). Tọa độ các giao điểm A; B là $A(x_1; m); B(x_2; m)$. Do đó :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (m - 1)^2 + 4m + 4 \\ &= m^2 + 2m + 5 = (m + 1)^2 + 4 \geq 4. \end{aligned}$$

Vậy AB ngắn nhất bằng 2 khi $m = -1$.

Ví dụ 3:

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + 1$ (1).

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục Ox là:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 & (2) \\ g(x) = x^2 - x - m = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Gọi x_1 là nghiệm pt (2) và x_2, x_3 là nghiệm pt (3). áp dụng định lý Vi-et ta có $x_2 + x_3 = 1$;
 $x_2 \cdot x_3 = -m$.

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán : } \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m > 0 \\ m \neq 0 \\ 1+(x_2+x_3)^2 - 2x_2x_3 < 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1+1+2m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m \neq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Bình luận :

Ở đây phương trình hoành độ giao điểm là bậc ba, nhưng do ta nhằm được nghiệm nên đưa về phương trình bậc hai. Từ đó ta chuyển về áp dụng định lý Vi-et trong phương trình bậc hai. Do phạm vi chương trình phổ thông, nên trong các đề thi tuyển sinh thường chỉ áp dụng định lý Vi-et đối với phương trình bậc hai. Vì thế khi làm bài, học sinh cần nghĩ tới việc nhằm nghiệm để hạ bậc. Tiêu chí đầu tiên của nghiệm là khi thay vào phải triệt tiêu tham số. Điều đó giúp ta nhìn ra nghiệm nhanh chóng.

Ví dụ 4 :

Chứng minh rằng đường cong $y = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$ và đường thẳng $y = -x - 3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Giải :

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị :

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} = -x - 3; x \neq -1 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 3 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt vì $\Delta' = 3 > 0$. Gọi $M_1(x_1; -x_1-3)$; $M_2(x_2; -x_2-3)$ là hai giao điểm của d và (C).

Rõ ràng M_1M_2 vuông góc với đường thẳng $y=x$. Gọi $I(x_0; y_0)$ là trung điểm của M_1M_2 . Ta có

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-x_1 - 3 + (-x_2 - 3)}{2} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Vậy M_0 thuộc đường thẳng $y=x$.

Ví dụ 5:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=m$ tại hai điểm A, B

sao cho OA vuông góc với OB, với O là gốc tọa độ

(Đề số 148, bộ đề 95).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$m = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + m - 1 = 0(1) \end{cases}$$

Đặt $f(x) = x^2 + m - 1$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phải có:

$$\begin{cases} f(1) = m \neq 0 \\ \Delta = 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m < 1 (*) .$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1).

Khi đó tọa độ giao điểm là $A(x_1; m); B(x_2; m)$.

Theo đề ra OA vuông góc với OB nên $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + m^2 = 0$.

Theo định lý Vi-et thì $x_1 x_2 = m - 1$.

Do đó ta có phương trình:

$$m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*)).}$$

Ví dụ 6:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ (C) và đường thẳng d: $y = mx - m$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A; B thuộc hai nhánh của nó. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn AB khi m biến thiên.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là :

$$mx - m = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ (m-1)x^2 + (m-3)x - 2m - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị thì (2) phải có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$.

Ta đưa về so sánh nghiệm với số 0 như sau: Đặt $t = x - 2$, ta được phương trình là:

$$(m-1)t^2 - (3m-1)t - 1 = 0 \quad (3).$$

Phương trình (3) phải có hai nghiệm trái dấu. Tìm được $m > 1$ (*).

Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của (2).

Tọa độ các giao điểm là $A(x_1; mx_1 - m); B(x_2; mx_2 - m)$.

Tọa độ trung điểm I là:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-3}{2(m-1)} \\ y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m(x_1 + x_2) - 2m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2} - \frac{1}{m-1} \\ y_I = \frac{m}{2} - \frac{m}{m-1} - m \end{cases}.$$

Từ phương trình trên rút ra được $m = \frac{3 + 2x_I}{1 + 2x_I} > 1$, suy ra $x_I > -1/2$, thế vào phương trình

dưới ta được $y_I = \frac{2x_I^2 + x_I - 3}{2x_I + 1}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đồ thị hàm số:

$$y = \frac{2x^2 + x - 3}{2x + 1} \text{ với } x > -1/2.$$

Ví dụ 7:

Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$ với m là tham số. Tìm m để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị :

$$x = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3mx^2 - 2x + m^3 = 0 \quad (1).$$

Gọi $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là hoành độ giao điểm của A;B;C.

Từ giả thiết $AB=BC$ ta suy ra : $x_1 + x_2 = 2x_3$.

Mặt khác áp dụng định lý Vi-et ta được :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3m}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1 \\ x_1x_2x_3 = \frac{-3m^2}{2} \end{cases}$$

Giải hệ gồm các điều kiện trên ta được $m = 0; m = \pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 8:

Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

- Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B.
- Gọi C là giao điểm của đồ thị với trục tung. Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác ABC khi m thay đổi.

Giải:

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \quad (1).$$

Để đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt A,B thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

- Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của (1). Ta có $A(x_1;0); B(x_2;0)$.

Ta cũng tìm được $C(0; 2m-1)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{2m}{3} \\ y_G = \frac{2m-1}{3} \end{cases}.$$

Khử m từ hệ cuối cùng ta được $y_G = x_G - \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra tọa độ điểm G thỏa mãn phương trình : $y = x - \frac{1}{3}$.

Giới hạn quỹ tích:

Vì $m = \frac{3x_G}{2} \neq 1 \Leftrightarrow x_G \neq \frac{2}{3}$.

Vậy tập hợp các điểm G là đường thẳng, bỏ đi điểm $G_0(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

Ví dụ 9:

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (C)

Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng $y = mx - m + 1$ (d) luôn cắt đồ thị tại một điểm I cố định.

Xác định m để đường thẳng đó cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt I, M, N.

Trong trường hợp đó tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MN.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = mx - m + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 2 - m) = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x=1$. Vậy (d) luôn cắt (C) tại điểm I(1; 1) cố định với mọi m.

Đặt $f(x) = x^2 - 2x + 2 - m$.

Để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì f(x) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

Tìm được $m > 1$.

Khi đó gọi x_1 ; x_2 là các nghiệm của $f(x)$. Ta có x_1 ; x_2 cũng là hoành độ các giao điểm M, N.

Ta để ý rằng tung độ các điểm M, N thỏa mãn phương trình của (d).

Gọi A là trung điểm của M, N.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_A = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ y_A = \frac{(mx_1 - m + 1) + (mx_2 - m + 1)}{2} = 1 \end{cases}.$$

Ta có điểm A(1;1).

Vậy tập hợp các trung điểm A của đoạn thẳng MN chính là điểm cố định I(1;1) tìm được ở trên.

Bài tập tương tự:

1) *Tìm quỹ tích các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số :*

$$a) y = \frac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$$

$$b) y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6(m^2+m)x.$$

2) *Gọi (P) là Parabol có phương trình $y = ax^2 + bx + c$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm A(1;3).*

3) *Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ (C) và đường thẳng d có hệ số góc k và d luôn cắt (C) tại*

3 điểm phân biệt A, M, N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

4) *Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Chứng minh rằng đường thẳng d cùng phương với đường thẳng $y = -x$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN. Xác định vị trí của I để MN ngắn nhất.*

5) *Tìm quỹ tích các điểm M(a;b) sao cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2012$.*

6) *Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số*

$$y = \frac{\cos \alpha x^2 + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha + x}{x + \cos \alpha}$$

luôn tiếp xúc với Parabol cố định. Tìm quỹ tích tiếp điểm.

5) Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

Chứng minh rằng với mọi k , Parabol $y = kx^2 - 8$ luôn cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt, trong đó có một điểm nằm trên trục tung. Gọi các giao điểm còn lại là B, C . Tìm quỹ tích trung điểm của BC khi k thay đổi.

7) DẠNG 7 : ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC TRUY HỒI.

Phân tích :

Xét phương trình bậc hai :

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Giả sử $x_1; x_2$ là các nghiệm của nó.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n, n \in \mathbb{N}$.

Lúc đó ta có hệ thức truy hồi tuyến tính sau :

$$aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0(1).$$

Chứng minh :

ta có :

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^n + x_2^n) \\ &= S_{n+1} \left(\frac{-b}{a} \right) - \frac{c}{a} S_n \Leftrightarrow aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0 \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

Việc ứng dụng hệ thức truy hồi trên giúp ta giải quyết được nhiều dạng bài tập thú vị.

Ta hãy theo dõi qua các ví dụ sau.

Ví dụ 1 :

Cho $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình : $x^2 - 2x - 2 = 0$. Tính $x_1^7 + x_2^7$.

Giải :

Ta cần tính S_7 . Ta có $S_0 = 2, S_1 = 2$. Từ hệ thức truy hồi trên ta lần lượt tính được :

$$S_2 = 8; S_3 = 20, S_4 = 56, S_5 = 152, S_6 = 416, S_7 = 1136.$$

Ví dụ 2 :

Tính giá trị của biểu thức : $A = (2 + 3\sqrt{2})^6 + (2 - 3\sqrt{2})^6$.

Ta đặt $x_1 = (2 + 3\sqrt{2})$; $x_2 = (2 - 3\sqrt{2})$ thì x_1 ; x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 14 = 0$.

Theo đề ra ta cần tính S_6 . Ta có hệ thức truy hồi :

$$S_{n+2} - S_{n+1} - 14S_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ta có :

$$S_0 = 2 ; S_1 = 4 ; S_2 = 44, S_3 = 232, S_4 = 1544, S_5 = 9424, S_6 = 59312.$$

Ví dụ 3 :

Cho dãy số $(u_n)_n$ được xác định như sau : $u_0 = 2$; $u_1 = 6$; $u_{n+1} = 6u_n + 2u_{n-1}$.

- a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số $(u_n)_n$.
- b) Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$ thì u_{2k} chia hết cho 2^{k+1} .
- c) Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$ thì u_{2k-1} chia hết cho 2^k và không chia hết cho 2^{k+1} .

Giải :

- a) Ta xét phương trình đặc trưng của dãy số đó : $x^2 - 6x - 2 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = 3 - \sqrt{11}$; $x_2 = 3 + \sqrt{11}$.

Sử dụng hệ thức truy hồi ta có $S_{n+1} = 6S_n + 2S_{n-1}$. Ta có $S_0 = 2$; $S_1 = 6$. Từ đó vì $S_n = (3 + \sqrt{11})^n + (3 - \sqrt{11})^n$. Mà dãy S_n và dãy u_n về bản chất là một nên từ đó ta có số hạng tổng quát là $u_n = (3 + \sqrt{11})^n + (3 - \sqrt{11})^n$.

- b) Ta có :

$$\begin{aligned} u_{2k} &= (3 + \sqrt{11})^{2k} + (3 - \sqrt{11})^{2k} = (20 - 6\sqrt{11})^k + (20 + 6\sqrt{11})^k = \\ &= 2^k [(10 - 3\sqrt{11})^k + (10 + 3\sqrt{11})^k] \end{aligned}$$

nên u_{2k} chia hết cho 2^k . Bây giờ ta cần chứng minh :

$P_k = [(10 - 3\sqrt{11})^k + (10 + 3\sqrt{11})^k]$ là một số chẵn.

Vì $10 + 3\sqrt{11}$ và $10 - 3\sqrt{11}$ là hai nghiệm của phương trình :

$$x^2-20x+1=0$$

nên ta có công thức $P_{n+1} = 20P_n + S_{n-1}$. Tính được $P_0=2$; $P_1=20$ nên từ công thức truy hồi ta suy ra P_k luôn là một số chẵn.

c) Ta chứng minh bằng quy nạp :

Với $k=1$ ta thấy kết luận đúng. Giả sử khẳng định đúng khi $k= m \geq 1$, nghĩa là $u_{2m-1}=2^m.b$ với b là một số lẻ. Khi đó ta phải chứng minh khẳng định đúng khi $k=m+1$.

Thật vậy :

$u_{2m+1}=6 u_{2m}+2 u_{2m-1}$. Mà theo chứng minh trên ta có $u_{2m}=2^{m+1}.a$. Do đó $u_{2m+1}= 2^{m+1}(6a+b)$. Mà $6a+b$ là số lẻ u_{2m+1} chia hết cho 2^{m+1} và không chia hết cho 2^{m+2} . Vậy khẳng định được chứng minh.

Ví dụ 4:

Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4 + \sqrt{15})^7$.

.

Giải:

Ta đặt: $x_1 = (4 + \sqrt{15})$; $x_2 = (4 - \sqrt{15})$.

Khi đó x_1 ; x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2-8x+1=0.$$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$, ta có hệ thức :

$$S_{n+2} - 8S_{n+1} + S_n = 0.$$

Ta tính được :

$$S_1=8 ; S_2=62 ; S_3=488 ; S_4=3842 ; S_5=30248 ; S_6=238142 ; S_7=1874888.$$

Như vậy :

$$x_1^7 = 1874888 - x_2^7. \text{ Mà } 0 < x_2^7 < 1 \text{ nên}$$

$$1874887 < x_1^7 < 1874888.$$

Vậy số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4 + \sqrt{15})^7$ là 1874887.

Ví dụ 5:

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 6x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $S_n = x_1^n + x_2^n$ là số nguyên không chia hết cho 5 với mọi n .

Giải:

Chứng minh S_n luôn là số nguyên.

Với $n=0$ ta có $S_0 = 2$ là số nguyên ; $n=1$ ta có $S_1 = 6$ là số nguyên.

Giả sử S_k, S_{k+1} nguyên, vì $S_{k+2} = 6S_{k+1} - S_k$ nên S_{k+2} cũng nguyên.

chứng minh S_k không chia hết cho 5: từ hệ thức truy hồi ta có:

$$S_{k+2} = 6S_{k+1} - S_k = 6(6S_k - S_{k-1}) - S_k = 35S_k - 6S_{k-1} - S_k.$$

Từ đó ta suy ra S_{k+2} và S_{k-1} có cùng số dư khi chia cho 5.

Nhưng vì $S_0=2; S_1=6; S_2=34$ đều không chia hết cho 5 nên S_n không chia hết cho 5 với mọi n

Ví dụ 6:

Tìm đa thức bậc 5 có hệ số nguyên nhận số thực $\varepsilon = \sqrt[5]{\frac{2}{5}} + \sqrt[5]{\frac{5}{2}}$ làm nghiệm.

Giải:

Ta đặt $x_1 = \sqrt[5]{\frac{2}{5}}; x_2 = \sqrt[5]{\frac{5}{2}}$.

Vậy thì : $\sqrt[5]{\frac{2}{5}} + \sqrt[5]{\frac{5}{2}} = \varepsilon; x_1 x_2 = 1.$

Nên theo định lý Vi-et ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - \varepsilon x + 1 = 0 \quad (1).$$

Theo hệ thức truy hồi ta có: $S_{n+2} = \varepsilon S_{n+1} - S_n$ (*)

Với $S_0 = 2; S_1 = \varepsilon$. Từ đó ta tính được :

$$S_2 = \varepsilon^2 - 2; S_3 = \varepsilon(\varepsilon^2 - 2) - \varepsilon = \varepsilon^3 - 3\varepsilon;$$

$$S_4 = \varepsilon(\varepsilon^3 - 3\varepsilon) - (\varepsilon^2 - 2) = \varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 2; S_5 = \varepsilon(\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 2) - (\varepsilon^3 - 3\varepsilon) = \varepsilon^5 - 5\varepsilon^3 + 5\varepsilon.$$

Nhưng mặt khác ta lại có:

$$S_5 = \frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{29}{10}.$$

Từ đó ta có được :

$$\varepsilon^5 - 5\varepsilon^3 + 5\varepsilon = \frac{29}{10} \Leftrightarrow 10\varepsilon^5 - 50\varepsilon^3 + 50\varepsilon - 29 = 0.$$

Điều đó chứng tỏ ε là nghiệm phương trình:

$$10x^5 - 50x^3 + 50x - 29 = 0.$$

Đây chính là phương trình cần tìm.

Bình luận:

Với cách giải quyết tương tự, ta có thể tạo ra nhiều bài toán khác nhau xung quanh hệ thức truy hồi cho trước. Chẳng hạn:

- 1) Tìm đa thức bậc 6 có hệ số nguyên nhận số $\sqrt[6]{\frac{3}{4}} + \sqrt[6]{\frac{256}{3}}$ là nghiệm.
- 2) Tìm đa thức bậc tối thiểu có hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ làm nghiệm.

Ví dụ 7:

Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của số $(5 + 3\sqrt{3})^{2013}$

Giải:

Ta đặt $x_1 = 5 + 3\sqrt{3}$; $x_2 = 5 - 3\sqrt{3}$. Khi đó x_1 ; x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 10x - 2 = 0$$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$. Theo hệ thức truy hồi ta có:

$$S_{n+2} = 10S_{n+1} + 2S_n.$$

Ta có $S_1 = 10$ nên từ hệ thức trên ta suy ra S_n luôn chia hết cho 10 khi n là số lẻ.

Để ý rằng $-1 < x_2 < 0$, nên suy ra $S_n < x_1^n = S_n - x_2^n < S_n + 1$.

Vậy nên $[x_1^n] = S_n$. Vì 2013 là số lẻ nên S_{2013} chia hết cho 10.

Vậy chữ số tận cùng của phần nguyên của số $(5 + 3\sqrt{3})^{2013}$ là số 0.

Bình luận:

Từ lập luận trên, ta thấy rằng chỉ cần thay đổi bộ số $x_1; x_2$ ta có thể tạo ra nhiều bài toán khác nhau.

Ví dụ: Tìm phần nguyên của các số: $(4 + \sqrt{5})^{10}$; $(45 + \sqrt{1999})^{1999}$.

Ví dụ 8:

Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7 + 4\sqrt{3})^n$ có ít nhất n chữ số 9 đứng ngay sau dấu phẩy.

Giải:

Đặt $x_1 = 7 + 4\sqrt{3}$; $x_2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Theo định lý Vi-et ta có $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình :
$$x^2 - 14x + 1 = 0.$$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$. Ta có hệ thức truy hồi :

$$S_{n+2} = 14S_{n+1} - S_n.$$

Vì $S_0 = 2$; $S_1 = 14$ nên ta suy ra S_n là số tự nhiên với mọi n.

Ta để ý $0 < 7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$. Nên $(7 - 4\sqrt{3})^n < \frac{1}{10^n}$.

Cho nên $S_n > (7 + 4\sqrt{3})^n = S_n - (7 - 4\sqrt{3})^n > S_n - \frac{1}{10^n}$.

Vì $\frac{1}{10^n} = 0,000...001$ (có n-1 chữ số 0).

Từ đó suy ra khi biểu diễn thập phân thì số $(7 + 4\sqrt{3})^n$ có ít nhất n số 9 ngay sau dấu phẩy.

Bài tập tương tự:

- 1) Chứng minh rằng phần thập phân của số $(5 + \sqrt{26})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ bắt đầu bằng n chữ số giống nhau.
- 2) Tìm chữ số đơn vị trong biểu diễn thập phân của số $(15 + \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82}$.

8) DẠNG 8: TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY TRUY HỒI CẤP HAI TUYẾN TÍNH

A- Cơ sở lý thuyết của phương pháp

1) Định nghĩa:

a) *Dãy số $(u_n)_n$ được gọi là dãy truy hồi cấp hai tuyến tính nếu được cho như sau :*

$$u_1 = a; u_2 = b; u_n = Au_{n-1} + Bu_{n-2} \quad (n \geq 3) \quad (1)$$

Trong đó A, B không đồng thời bằng 0.

b) *Với dãy truy hồi như trên thì phương trình $x^2 - Ax - B = 0$ (2) được gọi là phương trình đặc trưng của dãy.*

Do phạm vi ứng dụng của định lý Vi-et nên ta chỉ xét các dạng dãy số có phương trình đặc trưng có nghiệm.

2) Định lý:

-Nếu phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì dãy số có số hạng tổng quát là

$$u_n = px_1^{n-1} + qx_2^{n-1},$$

trong đó $p; q$ là các nghiệm của hệ khi ta thay giá trị $u_1; u_2$.

-Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép x_0 thì dãy số có số hạng tổng quát là

$$u_n = x_0^{n-1}(pn + a - p),$$

trong đó số p được tìm bằng cách thay u_1 vào công thức xác định nó.

Chứng minh định lý:

Đặt $v_n = u_{n+1}$, dãy $(u_n)_n$ trở thành $v_0 = a; v_1 = b; v_{n+2} = Av_{n+1} + Bv_n$.

Trường hợp $\Delta > 0$.

Ta gọi $x_1; x_2$ ($x_1 > x_2$) là hai nghiệm của (2). Theo định lý Vi-et ta có

$$x_1 + x_2 = A; x_1 \cdot x_2 = -B.$$

Vậy thì :

$$Av_{n+1} + Bv_n = (x_1 + x_2)(px_1^{n+1} + qx_2^{n+1}) - x_1 \cdot x_2 (px_1^n + qx_2^n) = px_1^{n+2} + qx_2^{n+2} = v_{n+2}.$$

Lại có :

$$v_0 = a = p + q; v_1 = px_1 + qx_2 = b.$$

Từ đó ta tìm được :

$$p = \frac{b - ax_2}{x_1 - x_2}; q = \frac{ax_1 - b}{x_1 - x_2}.$$

Như vậy dãy số v_n có số hạng tổng quát như trên thỏa mãn đề bài. Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_n$ là:

$$u_n = v_{n-1} = px_1^{n-1} + qx_2^{n-1}.$$

Xét trường hợp $\Delta = 0$

Đặt :

$$v_n = u_{n+1} = x_0^n (pn + a).$$

Dãy $(u_n)_n$ trở thành dãy $(v_n)_n$ với :

$$v_0 = a; v_1 = b; v_{n+2} = Av_{n+1} + Bv_n.$$

Ta cần kiểm tra số hạng tổng quát tìm được ở trên thỏa mãn dãy này.

Thật vậy: Theo định lý Vi-et về nghiệm kép của phương trình ta có $x_0 = \frac{A}{2}$; suy ra

$$A = 2x_0; B = -x_0^2.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} Av_{n+1} + Bv_n &= 2x_0 \cdot x_0^{n+1}(pn + p + a) - x_0^2 \cdot x_0^n(pn + a) \\ &= x_0^{n+2}[(p(n+2) + a)] = v_{n+2}. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$v_n = u_{n+1} = x_0^n (pn + a), \text{ với mọi } n.$$

Ta cũng có :

$$v_0 = a; v_1 = x_0(p + a) = b.$$

Từ đó tìm được $p = \frac{b - ax_0}{x_0}$. Từ đó ta có công thức tìm số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_n$

là :

$$u_n = v_{n-1} = x_0^{n-1}(pn+a-p)$$

Như vậy bằng việc sử dụng định lý Vi-et ta đã xây dựng được công thức tìm số hạng tổng quát đối với dãy truy hồi cấp hai tuyến tính trong trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm.

Trường hợp vô nghiệm ta sẽ xét ở chủ đề khác.

LƯU Ý:

i) Dãy cấp số nhân và dãy Fi-bo-na-ci là những trường hợp đặc biệt của dãy truy hồi cấp hai tuyến tính.

B- Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn : $u_0 = 2$; $u_1 = 7$; $u_{n+1} - 7u_n + 12u_{n-1} = 0$, với n là số nguyên dương.

Hãy xác định (u_n)

(Thi HSG lớp 12 TPHCM 2002)

Giải:

Phương trình đặc trưng của dãy là:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad (1)$$

Phương trình có hai nghiệm là $x=3$; $x=4$.

Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 3^n + 4^n$.

Bình luận:

Nếu dãy cho hệ thức truy hồi dạng : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + d = 0$ ($d \neq 0$) (2)

Khi đó ta sẽ xét dãy (v_n) bằng cách đặt: $v_n = u_n + t$

Thế vào (2) ta thu được :

$$a(v_{n+2} - t) + b(v_{n+1} - t) + c(v_n - t) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n + d - (a + b + c)t = 0$$

Ta chỉ việc chọn t thích hợp để lượng $d - (a + b + c)t = 0$ từ đó đưa về xét dãy truy hồi tuyến tính cấp hai ở trên.

Ta theo dõi qua ví dụ sau:

Ví dụ 2:

Tìm số hạng tổng quát của dãy:

$$u_0 = 1; u_1 = 1 - \sqrt{2}; u_{n+1} - 2u_n - u_{n-1} = 2; n \geq 2 (*)$$

Giải:

Đặt $u_n = v_n + t$. Thế vào (*) trở thành:

$$v_{n+1} + t - 2(v_n + t) - (v_{n-1} + t) = 2$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} - 2v_n - v_{n-1} = 2(t + 1)$$

Chọn $t = -1$ ta thu được dãy (v_n) là truy hồi cấp hai tuyến tính như sau:

$$v_0 = 2; v_1 = 2 - \sqrt{2}; v_{n+1} - 2v_n - v_{n-1} = 0.$$

Dãy (v_n) có phương trình đặc trưng là:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm là $1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}$.

Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy (v_n) là $v_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$.

Cho $v_0 = 2; v_1 = 2 - \sqrt{2}$. Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\beta = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó số hạng tổng quát của dãy (v_n) là : $v_n = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^n$.

Vì $u_n = v_n - 1$ nên suy ra :

$$u_n = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^n - 1$$

Ví dụ 3:

Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi $u_0=3$; $u_1=17$; $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$; $n=2;3,\dots$

Chứng minh rằng u_n^2-1 chia hết cho 2 và thương luôn là một số chính phương với mọi $n=0;1;2,\dots$

Giải:

Xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$x^2-6x+1=0.$$

Phương trình có hai nghiệm là

$$x_1=3+\sqrt{8}; x_2=3-\sqrt{8}.$$

Vì thế số hạng tổng quát của dãy là:

$$u_n=p(3+\sqrt{8})^n+q(3-\sqrt{8})^n.$$

Với cách cho $n=0$ và $n=1$ ta có hệ :

$$\begin{cases} p+q=3 \\ p(3+\sqrt{8})+q(3-\sqrt{8})=17 \end{cases},$$

tìm được $p=\frac{3+\sqrt{8}}{2}$; $q=\frac{3-\sqrt{8}}{2}$. Do vậy ta có số hạng tổng quát là:

$$u_n=\frac{3+\sqrt{8}}{2} (3+\sqrt{8})^n+\frac{3-\sqrt{8}}{2} (3-\sqrt{8})^n=\frac{1}{2}[(3+\sqrt{8})^{n+1}+(3-\sqrt{8})^{n+1}].$$

Sử dụng hằng đẳng thức $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ ta có:

$$[(3+\sqrt{8})^{n+1}+(3-\sqrt{8})^{n+1}]^2=[(3+\sqrt{8})^{n+1}-(3-\sqrt{8})^{n+1}]^2+4.$$

Nên:

$$\frac{u_n^2-1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(3+\sqrt{8})^{n+1}+(3-\sqrt{8})^{n+1}}{2}\right]^2-1\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{(3+\sqrt{8})^{n+1}-(3-\sqrt{8})^{n+1}}{2}\right]^2.$$

Áp dụng khai triển nhị thức Niu-ton ta chứng minh được $(3\pm\sqrt{8})^n$ có dạng $M\pm N\sqrt{2}$, với

M, N nguyên dương nên ta suy ra $\frac{u_n^2-1}{2}=N^2$ là một số chính phương.

Ví dụ 4: (thi Olympic 30-4)

Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau:

$a_0=1$; $a_1=2$; $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$, với n là số tự nhiên. Tìm tất cả các giá trị của n để a_n-1 là số chính phương.

Giải:

Xét phương trình đặc trưng :

$$x^2-4x+1=0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x_1=2+\sqrt{3}$; $x_2=2-\sqrt{3}$.

Số hạng tổng quát có dạng:

$$a_n=p(2+\sqrt{3})^n+q(2-\sqrt{3})^n,$$

với p, q là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} p+q=1 \\ 2(p+q)+\sqrt{3}(p-q)=2 \end{cases}, \text{ giải được } p=q=\frac{1}{2}.$$

Số hạng tổng quát là $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$.

Để ý rằng $(2 \pm \sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{2} = \left[\frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}} \right]^2$. Nên ta suy ra:

$$a_n-1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} \right] - 1 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} \right] - \frac{2(\sqrt{2})^{2n}}{(\sqrt{2})^{2n+2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} \right] - \frac{2(\sqrt{2})^{2n}}{(\sqrt{2})^{2n+2}} = \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} \right]^2. \end{aligned}$$

Để a_n-1 là số chính phương thì $M = \frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}$ phải là số nguyên.

i) Nếu $n=0$ thì $M=0$, thỏa mãn.

- Nếu $n=1$ thì $M=1$, cũng thỏa mãn.

- Nếu $n=2k, k \in \mathbb{N}$. Ta xét dãy $b_k = \frac{(\sqrt{3}+1)^{2k} - (\sqrt{3}-1)^{2k}}{(\sqrt{2})^{2k+1}} = \frac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{(\sqrt{2})}$. Tại vì $2 \pm \sqrt{3}$ là

nghiệm của phương trình đặc trưng (1) nên các số b_k thỏa mãn hệ thức:

$b_{k+2} = 4b_{k+1} - b_k$. Do $b_0 = 0$; $b_1 = \sqrt{6}$ nên b_k không nguyên với mọi k .

ii) Nếu $n=2k+1$ thì ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1}}{(\sqrt{2})^{2k+2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^{2k} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^{2k} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} [(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k]. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta lại đặt $c_k = \frac{\sqrt{3}+1}{2} [(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k]$, thì dãy $(c_k)_k$ thỏa mãn hệ thức

$c_{k+2} = 4c_{k+1} - c_k$. Có $c_0 = 0$; $c_1 = 5$, nên c_k luôn là số nguyên với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Tóm lại để $a_n - 1$ là số chính phương thì $n=0$; $=1$; n là số nguyên dương lẻ.

Ví dụ 5: (Tính chất của dãy Fi-bo-na-ci)

Cho dãy Fi-bo-na-ci được xác định như sau: $F_1 = F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$). Chứng minh rằng :

a) Số hạng tổng quát $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ (công thức Binet).

b) $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$.

c) $\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.

d) $\sum_{k=1}^n F_{2k-1} F_{2n}$.

e) $F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$

f) $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$; $n \geq 2$

g) $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$; $n \geq 2$; $m \geq 1$

h) Chứng minh rằng nếu n chia hết cho m thì F_n chia hết cho F_m .

i) $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$.

j) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$

k) $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.

$$l) \quad \sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

$$m) \quad \sum_{k=1}^{2n-1} F_k \cdot F_{k+1} = F_{2n}^2$$

$$n) \quad \sum_{k=1}^{2n} F_k \cdot F_{k+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

o) Chứng minh rằng hai số hạng liên tiếp của dãy Fi-bo-na-ci không có ước chung $d > 1$.

p) Với $n \geq 3$ ta có $F_{n+4}F_{n-2} - F_{n+2}F_n = (-1)^{n-1} \cdot 3$

q) $4F_{n-2}F_n \cdot F_{n+2} \cdot F_{n+4} + 9$ là một số chính phương

r) $F_{2k+1}^2 + 1$ chia hết cho F_{2k-1} và $F_{2k-1}^2 + 1$ chia hết cho F_{2k+1} .

Trên đây là một số các tính chất cơ bản của dãy Fi-bo-na-ci. Còn nhiều tính chất khác mà ta có thể bắt gặp ở trong các đề thi Olympic hoặc thi học sinh giỏi.

Giải:

Ta sẽ chứng minh một số tính chất, còn một số tính chất ta xem như là bài tập.

a) Ta xét phương trình đặc trưng của dãy là: $x^2 - x - 1 = 0$ (1). Phương trình này có hai nghiệm là

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Theo lý thuyết tổng quát đã chứng minh trên, số hạng tổng quát có dạng $F_n = px_1^n + qx_2^n$. Ta thay $n=1$; $n=2$ vào ta có p ; q thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} p \frac{1+\sqrt{5}}{2} + q \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2 \\ p \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + q \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q + \sqrt{5}(p - q) = 2 \\ 3(p + q) + \sqrt{5}(p - q) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ q = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát là $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$.

b)

Ta chứng minh bằng quy nạp. Đặt $P(n)$ là mệnh đề chứa biến n ở trên.

Với $n=1$ thì đẳng thức đúng.

Giả sử $P(n)$ là mệnh đề đúng, $n \geq 1$, ta cần chứng minh $P(n+1)$ đúng.

Thật vậy $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^n F_k + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$.

Vậy $P(n)$ đúng với mọi n .

Tương tự ta chứng minh được c) và d). Bây giờ ta chứng minh g)

g)

Ta cố định một biến, chẳng hạn là m , chứng minh quy nạp theo n . Ký hiệu mệnh đề cần chứng minh là $P(n)$

với $n=2$, ta có $P(2)$ đúng vì $F_1 = F_2 = 1$.

Giả sử $P(n)$ đúng, ta cần chứng tỏ $P(n+1)$ đúng. Thật vậy

$$F_{m+n+1} = F_{m+n} + F_{m+n-1}.$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$$

và $F_{m+n-1} = F_m F_{n-2} + F_{m+1} F_{n-1}$ (lưu ý rằng ta đã cố định biến m).

Vậy nên

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n + F_m F_{n-2} + F_{m+1} F_{n-1} \\ &= F_m (F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{m+1} (F_n + F_{n-1}) \\ &= F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy $P(n+1)$ đúng. Khẳng định được chứng minh.

h)

Giả sử $n=km$, với $k \in \mathbb{N}^*$, ta phải chứng minh: với $k, m \in \mathbb{N}^*$ thì F_{km} chia hết cho F_m . Ta cố định m và chứng minh quy nạp theo k .

Ký hiệu mệnh đề trên là $P(k)$.

Với $k=1$ thì $P(1)$ đúng.

Giả sử $P(k)$ đúng, ta cần chứng tỏ $P(k+1)$ cũng đúng.

Thật vậy, theo g) ta có:

$$F_{(k+1)m} = F_{m+km} = F_m F_{km-1} + F_{m+1} F_{km}.$$

Vì F_{km} chia hết cho F_m nên từ đó ta có $F_{(k+1)m}$ cũng chia hết cho F_m .

Bài tập tương tự:

1) Xét dãy số $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$; $a_2 = 22$; $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$; $\forall n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại

các dãy số nguyên dương $(x_n); (y_n)$ sao cho $a_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n}, \forall n \geq 1$.

2) Cho phương trình $\log_{2004}(x^2 - x) = 0$. Gọi α, β với $\alpha < \beta$ là hai nghiệm của phương trình này. Xét dãy số Fibonacci $(F_n)_{n=1}^{+\infty}$ với $F_1 = F_2 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n - \alpha^n)$.

3) Xét dãy số $\{a_n\}$ với $a_1 = 5$; $a_2 = 11$; $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$; $\forall n \geq 2$. Chứng minh rằng u_{2007} chia hết cho 11.

4) Cho dãy số $u_1 = 1$; $u_2 = 2$ và $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n, \forall n \geq 1$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

9) DẠNG 9: SO SÁNH NGHIỆM CỦA TAM THỨC BẬC HAI VỚI MỘT SỐ**Phân tích:**

Từ năm học 2006-2007 trở đi, bài toán định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai và bài toán so sánh nghiệm của tam thức bậc hai với một số thực bất kỳ không còn được trình bày trong chương trình chính khóa. Đây là ý tưởng giảm tải của Bộ giáo dục và đào tạo.

Tuy nhiên qua quá trình giảng dạy và cho học sinh làm bài tập, tôi thấy nhiều bài toán nếu biết sử dụng định lý đảo và bài toán so sánh nghiệm thì lời giải sẽ ngắn gọn hơn nhiều.

Vì thế trong chuyên mục này, tôi đưa ra một vài hướng giải quyết có thể sử dụng bài toán so sánh nghiệm để làm bài tập.

Trước hết tôi xin đưa ra một ví dụ dẫn đến bài toán so sánh nghiệm:

Ví dụ:

Tìm m để hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m-3)x + 5m^2$ có cực trị. Gọi x_1, x_2 là hoành độ của cực trị.

Tìm m để $x_1 < -3 < x_2 < 2$.

Đây là một ví dụ thông thường trong bài toán hàm số. Tuy nhiên để giải được, ta cần so sánh nghiệm của y' đối với các số -3 và 2. Nếu không dùng phương pháp so sánh nghiệm thì lời giải công kênh và rắc rối hơn.

Định lý đảo về dấu được phát biểu như sau:

Định lý:

Cho tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Nếu có số thực α sao cho $af(\alpha) < 0$ thì tam thức bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < \alpha < x_2$.

Chứng minh:

Từ định lý thuận về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy chỉ có duy nhất một trường hợp $f(x)$ trái dấu với x đó là trường hợp $\Delta > 0$. Trong trường hợp này tam thức có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < \alpha < x_2$.

Ta thấy giả thiết của định lý đảo rơi vào trường hợp này. Do đó tam thức có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và $x_1 < \alpha < x_2$.

Từ định lý đảo, ta rút ra các hệ quả sau:

Hệ quả 1:

Điều kiện cần và đủ để tam thức: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là có số thực α sao cho $af(\alpha) < 0$.

Hệ quả 2:

Cho tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và hai số thực α, β sao cho $\alpha < \beta$. Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có hai nghiệm, trong đó có một nghiệm thuộc khoảng $(\alpha; \beta)$ và một nghiệm nằm ngoài đoạn $[\alpha; \beta]$ là $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

Chứng minh:

Hệ quả 1: Được suy ra từ định lý thuận và định lý đảo.

Hệ quả 2:

Giả sử ta có $f(\alpha).f(\beta) < 0 \Leftrightarrow af(\alpha).af(\beta) < 0$.

Suy ra $af(\alpha) < 0$ hoặc $af(\beta) < 0$.

+ Nếu $af(\alpha) < 0$ thì $af(\beta) > 0$ (*), suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$.

+ Nếu $af(\beta) < 0$ thì $af(\alpha) > 0$ (**), suy ra phương trình có hai nghiệm $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

Ngược lại nếu xảy ra một trong hai khả năng (*) hoặc (**) thì ta có $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

Hệ quả được chứng minh.

Sau đây là một vài hướng đề xuất khi cho học sinh sử dụng kiến thức về so sánh nghiệm vào giải bài tập.

1) HƯỚNG ĐỀ XUẤT 1: ĐEM VỀ SO SÁNH NGHIỆM VỚI SỐ 0.

Phân tích:

Ở lớp 9, học sinh đã biết so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với số 0 bằng cách xét dấu tổng và tích của hai nghiệm.

Bây giờ ta sẽ tìm cách đưa về so sánh nghiệm với số 0.

Ta thống nhất các đại lượng Δ ; S; P là của $g(t)$.

i) Tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0 < x_2 - \alpha$.

Đặt $t = x - \alpha$, dẫn đến $g(t) = f(t + \alpha)$ có hai nghiệm $t_1 < 0 < t_2$.

ii) Tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Bằng phép đặt $t = x - \alpha$, dẫn đến $g(t) = f(t + \alpha)$ có hai nghiệm $t_1 \leq t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

iii) Tương tự cách xử lý đối với trường hợp $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 \leq x_2$.

Sau đây ta xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ (C)

Tìm các giá trị của m để đường thẳng d: $y = mx - m$ cắt đồ thị tại hai điểm thuộc về hai nhánh của đồ thị (C).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị d và (C) là:

$$mx - m = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 + (m-3)x - 2m - 3 = 0(1).$$

Để d cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn : $x_1 < -2 < x_2$.

Đặt $t = x + 2$ ta đưa (1) về phương trình ẩn t:

$$(m-1)t^2 - (3m-1)t - 1 = 0 (2).$$

Phương trình (2) phải có hai nghiệm trái dấu .

Tìm được $m > 1$.

Ví dụ 2:

Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Giải:

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - m + 1}{(x - 1)^2}$.

Đặt $f(x) = x^2 - 2x - m + 1$.

Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ thì phải xảy ra một trong hai khả năng:

KN1: $f(x)$ có $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

KN2: $f(x)$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 \leq x_2 < 1$.

Đặt $t = x - 1$ ta đưa về xét điều kiện $g(t) = t^2 - m$ có hai nghiệm $t_1 \leq t_2 < 0$.

Điều đó tương đương:
$$\begin{cases} \Delta = m \geq 0 \\ S = 0 \leq 0 \\ P = -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết hợp 2 khả năng được $m \leq 0$.

Ví dụ 3:

Tìm m để hàm số :

$$y = \frac{1}{3}(m-2)^2 x^3 - \frac{3}{2}(m-6)x^2 - (m-1)x$$

nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Giải:

Ta có $y' = f(x) = (m-2)^2 x^2 - 3(m-6)x - (m+1)$

Ta cần có : $y' \leq 0, \forall x \in (-1;0)$.

TH1: Với $m=2$ thì $y' = 12x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$, thỏa mãn.

TH2: Với $m \neq 2$, khi đó $(m-2)^2 > 0$.

Để $y' \leq 0, \forall x \in (-1;0)$ thì $f(x)$ phải có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 \leq -1 < 0 \leq x_2$ (*).

Ta tách yêu cầu (*) ra làm hai trường hợp đồng thời xảy ra:

$$\begin{cases} x_1 \leq -1 \leq x_2 (a) \\ x_1 \leq 0 \leq x_2 (b) \end{cases}$$

Dùng kỹ thuật xử lý ở trên đối với (a) ta được $\begin{cases} -3 \leq m \leq 5 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Đối với (b) ta được $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Kết hợp tất cả các trường hợp ta được $-1 \leq m \leq 5$.

Ví dụ 4:

Tìm m để phương trình :

$$x^4 - (2m+3)x^2 + m+5 = 0 \quad (1)$$

Có các nghiệm thỏa mãn : $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$ (*).

Giải:

Đây là phương trình trùng phương.

Đặt $t=x^2$. Ta đưa về phương trình : $t^2 - (2m+3)t + m + 5 = 0$ (2).

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt.

Ta giả sử hai nghiệm của (2) là : $0 < t_1 < t_2$.

Khi đó $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2}$.

Do đó từ giả thiết ta có : $-2 < -\sqrt{t_2} < -1 < -\sqrt{t_1} < 0 < \sqrt{t_1} < 1 < \sqrt{t_2} < 3$.

$$\Leftrightarrow 0 < t_1 < 1 < t_2 < 2 \text{ (**)}.$$

Ta tách điều kiện (**) ra làm hai điều kiện đồng thời:

$$\begin{cases} 0 < t_1 < 1 < t_2 \\ t_1 < 1 < t_2 < 2 \end{cases}.$$

Xử lý tương tự ở trên ta có kết quả không có m nào thỏa mãn.

Ví dụ 5:

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

(Thi ĐH khối D-2004)

Giải:

Ta đặt $\sqrt{x} = u \geq 0$; $\sqrt{y} = v \geq 0$.

Hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u.v = m \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-et thì u,v là nghiệm phương trình:

$$t^2 - t + m = 0 \text{ (1)}.$$

Để hệ có nghiệm thì (1) phải có cả hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \\ P = m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

Bài tập tương tự:

- 1) Tìm m để hàm số: $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- 2) Tìm m sao cho hàm số $y = -x^3 + (a - 1)x^2 + (a + 3)x$ tăng trong khoảng $(0; 3)$.
- 3) Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + m}{x - 2}$ giảm trên khoảng $(-1; 0)$

(Dự bị khối A 2002)

2) HƯỚNG ĐỀ XUẤT 2: TRÌNH BÀY TRỰC TIẾP ĐỊNH LÝ ĐẢO.

Phân tích:

Hướng đề xuất đem về so sánh nghiệm với số 0 thực ra chỉ thuận tiện khi việc so sánh diễn ra không phải với nhiều số. Khi việc so sánh diễn ra một lúc với nhiều số thì việc chuyển qua hàm $g(t)$ như ở trên sẽ mất nhiều thời gian. Vì thế định lý đảo có những mặt tích cực nhất định trong những bài tập như thế. Thực ra của quá trình so sánh nghiệm thường được đưa về qua các bài toán cơ bản sau.

Ta cần trang bị một số bài toán so sánh nghiệm cơ bản:

i) $f(x)$ có duy nhất nghiệm thỏa mãn $x > \alpha$

Xảy ra một trong các trường hợp sau:

TH1: $f(x)$ có nghiệm $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$

TH2: $f(x)$ có nghiệm $\alpha < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

$$\text{TH3: } f(x) \text{ có nghiệm } \alpha = x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}.$$

ii) $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $x > \alpha$:

$$\text{TH1: } f(x) \text{ có nghiệm } x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0.$$

$$\text{TH2: } f(x) \text{ có nghiệm } \alpha < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}.$$

$$\text{TH3 : } f(x) \text{ có nghiệm } \alpha < x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}.$$

Bình luận:

Đối với trường hợp này ta có thể làm gián tiếp. Ta tìm m để $f(x)$ không có nghiệm thỏa mãn $x > \alpha$. Lúc đó ta có hai trường hợp sau:

$$\text{TH1: } f(x) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0.$$

$$\text{TH2: } f(x) \text{ có nghiệm } x_1, x_2 \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \leq \alpha \end{cases}.$$

Sau đó ta loại đi các giá trị tham số trong trường hợp gián tiếp, ta được các giá trị tham số trực tiếp.

iii) $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[\alpha; \beta]$:

$$\text{TH1: } f(x) \text{ có nghiệm là } \alpha \text{ hoặc là } \beta$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) = 0.$$

TH2: $f(x)$ có một nghiệm thuộc khoảng $(\alpha; \beta)$ và nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[\alpha; \beta]$

$$\Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) < 0.$$

TH3: $f(x)$ có cả hai nghiệm thuộc $(\alpha; \beta)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}.$$

iv) $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(\alpha; \beta)$.

TH1: $f(x)$ có nghiệm là α , nghiệm kia thuộc $(\alpha; \beta)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ \alpha < S - \alpha < \beta \end{cases}.$$

TH2: $f(x)$ có nghiệm là β , nghiệm kia thuộc $(\alpha; \beta)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\beta) = 0 \\ \alpha < S - \beta < \beta \end{cases}.$$

TH3: $f(x)$ có một nghiệm thuộc khoảng $(\alpha; \beta)$ và nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[\alpha; \beta]$

$$\Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) < 0$$

TH4: $f(x)$ có cả hai nghiệm thuộc $(\alpha; \beta)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}.$$

v) $f(x)$ có ít nhất một nghiệm nằm ngoài khoảng $(\alpha; \beta)$

(tức là $x \leq \alpha$ hoặc $x \geq \beta$).

Đối với trường hợp này ta làm gián tiếp. Tức là tìm điều kiện để $f(x)$ không có nghiệm nằm ngoài khoảng $(\alpha; \beta)$.

TH1: $f(x)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

TH2: $f(x)$ có cả hai nghiệm thuộc khoảng $(\alpha; \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}.$$

Sau đó ta loại đi các giá trị tham số vừa tìm, ta được các giá trị tham số cần tìm.

Trên đây là 5 bài toán cơ bản về so sánh nghiệm của tam thức bậc hai với một số. Trong khi làm bài ta có thể gặp dưới một dạng khác, lúc đó chỉ cần xử lý linh động là ta có thể giải được.

Bây giờ ta có một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1:

Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \quad (1)$$

(Thi ĐH khối A năm 2007)

Giải:

Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sqrt{x-1}$ và $\sqrt{x+1}$.

Kiểm tra thấy $x=-1$ không là nghiệm.

Chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta được :

$$3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Ta đặt : $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = t \geq 0$

hơn nữa vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ nên ta suy ra $0 \leq t < 1$

Đưa về phương trình bậc hai:

$$f(t) = 3t^2 - 2t + m = 0 \quad (2)$$

Để (1) có nghiệm thực thì (2) cần có ít nhất một nghiệm $0 \leq t < 1$.

TH1: $f(t)$ có nghiệm $t=0$

$$\Leftrightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

TH2: $f(t)$ có một nghiệm thuộc $(0;1)$, nghiệm kia ngoài đoạn $[0;1]$

$$\Leftrightarrow f(0).f(1) < 0 \Leftrightarrow m(m+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

TH3: $f(t)$ có một nghiệm là 1, nghiệm kia thuộc khoảng $(0;1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ 0 < S - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ 1 < S < 2 \end{cases} \text{ (không xảy ra).}$$

TH4: $f(t)$ có cả hai nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(0) > 0 \\ af(1) > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3m \geq 0 \\ 3m > 0 \\ 3(m+1) > 0 \\ 0 < \frac{2}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{3} \\ m > 0 \\ m > -1 \\ \forall m \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{3}.$$

Kết hợp lại ta được : $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

Bình luận:

+ Ta thấy việc tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $[0; 1)$ không rơi vào 5 bài toán đã xét. Tuy nhiên để giải bài này, ta tổng hợp các trường hợp ở 5 bài toán trên. Do đó 5 bài toán trên vẫn là cơ bản.

+ Ta có thể dùng hàm số để giải bài toán trên như sau:

Số nghiệm của (2) là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=m$ và $y=-3t^2+2t$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=-3t^2+2t$ trên nửa khoảng $[0;1)$ ta được :

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$-3t^2 + 2t$	0	$\frac{1}{3}$	-1

Từ bảng biến thiên ta thấy $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

+ Một điều chú ý ở đây là ta có thể tìm thiếu điều kiện của biến số t . Ta có thể chỉ để ý là $0 \leq t$.

Ví dụ 2:

Cho phương trình : $f(x) = x^2 - (m+2)x + 5m+1 = 0$ (1).

Tìm m sao cho:

- Phương trình chỉ có một nghiệm thỏa mãn $x > 1$.
- Phương trình có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $|x| > 4$.
- Phương trình có nghiệm thuộc $(-1; 1)$.
- Phương trình có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $x < 2$.

Giải:

a) có 3 trường hợp xảy ra:

$$\text{TH1: } x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow af(1) < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

$$\text{TH2: } 1 = x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ 1 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{TH3: } 1 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ 1 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 16.$$

b) Ta giải gián tiếp.

Tìm m để phương trình không có nghiệm thỏa mãn $|x| > 4$.

TH1: $f(x)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 16$.

TH2: $f(x)$ có cả hai nghiệm thuộc khoảng $[-4;4]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-4) > 0 \\ af(4) > 0 \\ -4 \leq \frac{S}{2} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m \geq 0 \\ 9m + 25 > 0 \\ m + 9 > 0 \\ -4 \leq \frac{m+2}{2} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 16 \\ m \leq 0 \\ m \geq -\frac{25}{9} \\ m \geq -9 \\ -10 \leq m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{25}{9} \leq m \leq 0.$$

Như vậy $f(x)$ không có nghiệm thỏa mãn $|x| > 4$ khi $-\frac{25}{9} \leq m < 16$.

Vậy $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $|x| > 4$ khi $\begin{cases} m < -\frac{29}{5} \\ m \geq 16 \end{cases}$.

c) Có 4 trường hợp xảy ra:

$$\text{TH1: } -1 < x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ < -1S - (-1) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{2}{3} \\ < -4m < -2 \end{cases} \text{ (không có m nào).}$$

$$\text{TH2: } -1 < x_1 < 1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ -1 < S - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2 < m < 0 \end{cases} \text{ (không có m nào).}$$

TH3:

$f(x)$ có một nghiệm thuộc $(-1;1)$, nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[-1;1]$.

$$\Leftrightarrow f(-1).f(1) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < 0.$$

TH4: $f(x)$ có cả hai nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m \geq 0 \\ 6m + 4 > 0 \\ 4m > 0 \\ -1 < \frac{m+2}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 16 \\ m \leq 0 \\ m > -\frac{2}{3} \\ m > 0 \\ -4 < m < 0 \end{cases} \text{ (không có m nào).}$$

Tóm lại : $-\frac{2}{3} < m < 0$.

d) Có 3 trường hợp:

$$\text{TH1: } x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow af(2) < 0 \Leftrightarrow 3m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}.$$

$$\text{TH2: } x_1 < 2 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 = 0 \\ \frac{m+2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{TH3: } x_1 \leq x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(2) > 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m \geq 0 \\ 3m+1 > 0 \\ \frac{m+2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \leq 0.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m \leq 0$.

Bình luận:

Ta có thể giải câu d) bằng phương pháp gián tiếp như sau:

Ta tìm m để $f(x)$ không có nghiệm $x > 2$.

TH1: $f(x)$ vô nghiệm.

TH2: $f(x)$ có cả hai nghiệm $x_1; x_2 \geq 2$.

Ví dụ 3:

Tìm m để phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = m$ (1)

vô nghiệm.

Giải:

Đưa (1) về $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = m$.

Đặt $t = x^2 + 8x + 7$, để tồn tại x thì $t \geq -9$.

Phương trình trở thành: $t(t+8)=m \Leftrightarrow t^2 + 8t - m = 0$ (2).

Để (1) vô nghiệm thì (2) phải không có nghiệm thỏa mãn $t \geq -9$.

TH1: (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m < -16$.

TH2: (2) có cả hai nghiệm nhỏ hơn -9.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(-9) > 0 \\ \frac{S}{2} < -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \\ -4 < -9 \end{cases} \text{ (không có } m \text{ nào thỏa mãn)}.$$

Tóm lại : Đề (1) vô nghiệm thì $m < -16$.

Ví dụ 4:

Tìm m để phương trình :

$$x^4 + (m-1)x^3 + x^2 + (m-1)x + 1 = 0 \quad (1)$$

Có không ít hơn hai nghiệm âm khác nhau.

Giải:

Đây là phương trình hệ số đối xứng.

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm.

Chia hai vế cho x^2 ta được:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (m-1)(x + \frac{1}{x}) + 1 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Để ý là x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu nên :

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $|t| = \left| x + \frac{1}{x} \right| = |x| + \left| \frac{1}{x} \right| \geq 2 \quad (*)$

Phương trình trở thành : $t^2 + (m-1)t - 1 = 0 \quad (2)$.

Ta lưu ý rằng trong điều kiện (*) thì $t \leq -2$ khi và chỉ khi $x < 0$ và $t = -2$ khi chỉ khi $x = -1$.

Do đó để (1) có không ít hơn hai nghiệm âm thì (2) phải có ít nhất một nghiệm $t < -2$.

Để ý thêm (2) luôn có hai nghiệm trái dấu.

Do đó ta chỉ cần xét $t_1 < -2 < t_2 \Leftrightarrow af(-2) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}$.

Vậy ta có : $m > \frac{5}{2}$.

Ví dụ 5:

Tìm m để phương trình :

$$x^2 - 2x - m|x - 1| + m^2 = 0 \quad (1)$$

có nghiệm .

Giải:

Đặt $t = |x - 1| \geq 0$, thì $x^2 - 2x = t^2 - 1$.

Phương trình trở thành: $t^2 - mt + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$.

Để (1) có nghiệm thì (2) phải có ít nhất một nghiệm $t \geq 0$.

TH1: (2) có nghiệm $t=0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

TH2: (2) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

TH3: (2) có cả hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 4 \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Kết hợp lại ta được : $-1 \leq m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 6:

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + y^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}.$$

(Thi ĐH khối D-2007).

Giải:

$$\text{Đặt } u = x + \frac{1}{x}; \quad v = y + \frac{1}{y}.$$

Dùng bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức trị tuyệt đối ta được:

$$|u| = \left| x + \frac{1}{x} \right| = |x| + \left| \frac{1}{x} \right| \geq 2; \quad |v| \geq 2 \quad (\text{ vì } x \text{ và } \frac{1}{x} \text{ cùng dấu })$$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 - 3(u + v) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 8 - m \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-et thì $u; v$ là nghiệm phương trình:

$$f(t) = t^2 - 5t + 8 - m = 0(1)$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có cả hai nghiệm thỏa mãn $|t_1| \geq 2; |t_2| \geq 2$.

Ta giải bằng phương pháp gián tiếp như sau.

Tìm m để (1) không có nghiệm nằm ngoài khoảng $(-2; 2)$.

TH1: (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m - 7 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{4}.$$

TH2: (1) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$

ở TH2 này có 4 khả năng:

+ KN1: $f(t)$ có nghiệm là -2 , nghiệm kia thuộc khoảng $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = 0 \\ -2 < S + 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22 - m = 0 \\ -2 < 7 < 2 \end{cases} \text{ (không xảy ra).}$$

+ KN2: $f(t)$ có nghiệm là 2 , nghiệm kia thuộc khoảng $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ -2 < S - 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m = 0 \\ -2 < 3 < 2 \end{cases} \text{ (không xảy ra).}$$

+KN3: $f(t)$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$, nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[-2; 2]$

$$\Leftrightarrow f(-2)f(2) < 0 \Leftrightarrow (22 - m)(2 - m) < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 22.$$

+KN4: $f(t)$ có cả hai nghiệm thuộc $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(2) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 7 \geq 0 \\ 22 - m > 0 \\ 2 - m > 0 \\ -2 < \frac{5}{2} < 2 \end{cases} \text{ (không xảy ra).}$$

Như vậy để (1) không có nghiệm nằm ngoài khoảng $(-2; 2)$ thì $\begin{cases} m < \frac{7}{4} \\ 2 < m < 22 \end{cases}$.

Vậy những giá trị m thỏa mãn đề bài là: $\begin{cases} \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \\ m \geq 22 \end{cases}$.

Bình luận:

Ta có thể tìm m để (1) có cả hai nghiệm thỏa mãn $|t_1| \geq 2; |t_2| \geq 2$ bằng phương pháp hàm số như sau: Ta lập bảng biến thiên của $f(t)$ ngoài khoảng $(-2; 2)$:

t	$-\infty$		2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
	-2				
$f'(t)$	-		-	0	+
$f(t)$	$+\infty \rightarrow 22$		$2 \rightarrow \frac{7}{4}$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có :
$$\begin{cases} \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \\ m \geq 22 \end{cases}$$

Ví dụ 7:

Cho phương trình : $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0$ (1).

Tìm m để phương trình có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; 2\pi)$.

Giải:

Ta biến đổi đưa phương trình về :

$$\cos x(4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0 \end{cases}$$

Trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; 2\pi)$, phương trình $\cos x = 0$ có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Do đó đề (1) có đúng 7 nghiệm phân biệt thì phương trình :

$$4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0 \quad (*)$$

phải có 5 nghiệm phân biệt và khác hai nghiệm ở trên.

Đặt $t = \cos x$, phương trình (*) trở thành:

$$f(t) = 4t^2 - 2t + m - 3 = 0 \quad (2).$$

Nếu $t \in (0;1)$ thì cho 3 giá trị x tương ứng khác nghiệm $x_1; x_2$.

Nếu $t \in (-1;0)$ thì cho 2 giá trị x tương ứng khác nghiệm $x_1; x_2$.

Nếu $t=1$ thì chỉ cho $x=0$.

Nếu $t=-1$ thì chỉ cho $x = \pi$

Do đó đề (*) có 5 nghiệm như yêu cầu thì $f(t)$ phải có hai nghiệm phân biệt $t_1;$

t_2 thỏa mãn : $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$.

Theo định đảo ta cần có:

$$\begin{cases} af(0) < 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ m+3 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy những giá trị m cần tìm : $1 < m < 3$.

Bình luận :

Từ lập luận về mối tương quan giữa t và x ở trên ta thấy nếu yêu cầu về số nghiệm thay đổi, sẽ dẫn tới tính chất nghiệm của (2) cũng thay đổi.

Chẳng hạn:

i) Nếu đề yêu cầu (1) có đúng 6 nghiệm khác nhau thì nghiệm của phương trình (2)

phải là: $-1 < t_1 < t_2 < 0$, hoặc là $\begin{cases} t_1 = -1 \\ 0 < t_2 < 1 \end{cases}$, hoặc là $\begin{cases} t_2 = 1 \\ 0 < t_1 < 1 \end{cases}$

ii) Nếu đề yêu cầu (1) có đúng 8 nghiệm thì nghiệm của (2) phải là:

$$0 < t_1 < t_2 < 1.$$

Bài tập tương tự:

1) Tìm m để phương trình : $x^2 + 2x + m\sqrt{3 - 2x - x^2} = m^2$

a) có nghiệm.

b) có 4 nghiệm phân biệt.

2) Tìm m để phương trình :

$$9^{2x^2-x} - m.6^{2x^2-x} + (3m-8).4^{2x^2-x} = 0$$

Có nghiệm thỏa mãn $|x| \geq \frac{1}{2}$.

3) Tìm m để phương trình : $(x-1)^4 + (x-3)^4 = m$

có nghiệm.

4) Tìm m để phương trình:

$$^{2012}\sqrt{(2-x)^2} - (2m+3)^{2012}\sqrt{4-x^2} + (m^2-4)^{2012}\sqrt{(2+x)^2} = 0$$

Có nghiệm .

5) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\lg(x^2 - 2mx) - \lg(2x - m - 1) = 0 .$$

6) Cho phương trình :

$$(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = m .$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

7) Cho phương trình :

$$|x^2 - 2x + m| = x - 1$$

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

8) Tìm m để phương trình:

$$\lg^2(10x) + \lg x = m$$

Có nghiệm thỏa mãn $1 < x < 10$.

II- ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ET TỔNG QUÁT :

1) DẠNG 1 : ỨNG DỤNG VÀO GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phân tích :

Thông thường các hệ thường gặp ở dạng đối xứng. Khi đó ta tìm cách biểu diễn các phương trình trong hệ qua các biểu thức đối xứng sơ cấp đó là : $x+y+z$; $xy+yz+zx$; xyz (đối với hệ 3 ẩn). Ta cần sử dụng các hằng đẳng thức đối xứng :

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab ; \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

để biến đổi hệ , sau đó sử dụng định lý Vi-et đảo để đưa về phương trình đa thức và giải phương trình đó. Cuối cùng nghiệm của hệ chính là các bộ số hoán vị các nghiệm.

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 57 \end{cases}$$

Giải :

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 21.$

Từ đó suy ra : $xy + yz + zx = -6.$ Lại vì

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz.$$

Từ đó tính được $xyz = 8.$ Vậy theo định lý Vi-et ta có x, y, z là nghiệm của phương trình :

$$t^3 - 3t^2 - 6t + 8 = 0.$$

Mà phương trình trên có các nghiệm $1 ; -2 ; 4.$

Vậy hệ trên có 6 nghiệm (x,y,z) tương ứng là các hoán vị của bộ số $(1; -2; 4)$.

Ví dụ 2 :

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 \\ x^7 + y^7 + z^7 = 350 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Đặt } S_1 = x + y + z = 0. \quad S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx).$$

Từ đó suy ra $xy + yz + zx = -5$.

Sử dụng biến đổi sơ cấp ta có :

$$\begin{aligned} S_3 &= x^3 + y^3 + z^3 = -(x + y + z)^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz \\ &= -3xyz \quad (\text{vì } x + y + z = 0). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S_n = x^n + y^n + z^n.$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)(x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2}) = 0.$$

$$\text{Hay là } S_{n+3} = -S_{n+1}(xy + yz + zx) - S_n xyz.$$

Thay $n=1$ cho đến 4 ta lần lượt tính được :

$$S_4 = 50; \quad S_5 = -25xyz \quad (\text{vì } S_3 = -3xyz).$$

Thay $n=4$ và sử dụng các kết quả thu được ở trên ta được $S_7 = 175xyz$.

Từ giả thiết $S_7 = 350$. Từ đó tính được $xyz = -2$.

Theo định lý Vi-et ta có x, y, z là ba nghiệm của phương trình $t^3 - 5t - 2 = 0$.

Ta tìm được 3 nghiệm là $-2; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}$.

Từ đó hệ phương trình có 6 nghiệm là các bộ số tạo ra do hoán vị của 3 giá trị trên.

Ví dụ 3: (thi HSG Quốc gia lớp 9 , năm học 96-97)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \end{cases}$$

Giải:

Ta có $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$,

suy ra $xy+yz+zx=9$.

Lại có $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x+y+z+2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$,

suy ra $(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})=5$.

Bình phương hai vế ta được:

$$xy+yz+zx+ 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})=25,$$

thay số ta được $\sqrt{xyz} = 2$, hay $xyz=4$.

Theo định lý Vi-et ta có x,y,z là nghiệm của phương trình :

$$t^3-6t^2+9t-4 = 0.$$

Ta giải phương trình được 3 nghiệm là 1;1;4. Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm $(x; y;z)$ là hoán vị của 3 số trên.

Ví dụ 4:

Tính tổng $S=x^3+y^3+z^3$ theo a,b,c biết rằng:

$$\begin{cases} x + y + z = a(1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2(2) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}(3) \end{cases}$$

(Đề 132 bộ đề 95).

Giải:

Từ (2) ta có $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=b^2$,

suy ra $xy+yz+zx=\frac{a^2-b^2}{2}$.

Từ (3) ta có $\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{c}$, suy ra $xyz = \frac{c(a^2-b^2)}{2}$.

Từ biểu thức S ta có:

$$\begin{aligned} S &= x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\ &= a \left[b^2 - \frac{a^2 - b^2}{2} \right] + 3 \frac{c(a^2 - b^2)}{2} \\ &= a^3 + \frac{3}{2}(a^2 - b^2)(c - a). \end{aligned}$$

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 9(a) \\ xy + yz + zx = 27(b) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1(c) \end{cases}$$

Giải:

Từ phương trình (c) ta có : $\frac{xy + yz + zx}{xyz} = 1$

Suy ra $xyz = xy + yz + zx = 27$.

Theo định lý Vi-et ta có x,y,z là nghiệm của phương trình sau:

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)^3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Từ đó hệ phương trình có nghiệm là $x=y=z=1$.

Ví dụ 6:

Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y + z + a(x + y) + a^2x = a^3 \\ x + y + z + b(x + y) + b^2x = b^3 \\ x + y + z + c(x + y) + c^2x = c^3 \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

Đặt $m=x+y+z$; $n=x+y$; $p=x$

Từ cấu trúc các phương trình của hệ , ta có a;b;c cùng là nghiệm của hệ phương trình :

$$t^3 - pt^2 - nt - m = 0$$

Áp dụng định lý Vi-et ta suy ra
$$\begin{cases} a + b + c = p = x \\ ab + bc + ca = -n = -x - y. \\ abc = m = x + y + z \end{cases}$$

Từ đó ta giải được :
$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = ab + bc + ca - a - b - c \\ z = ab + bc + ca + abc \end{cases}$$

Đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Bình luận:

Từ các ví dụ trên đây ta thấy mối quan hệ mật thiết giữa phương trình và hệ phương trình, đặc biệt là hệ đối xứng. Việc thấy rõ mối quan hệ giữa chúng, giúp ta có hướng giải quyết linh động: Từ hệ phương trình chuyển về phương trình và ngược lại.

2) DẠNG 2: ỨNG DỤNG VÀO TÍNH CÁC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC:

Phân tích:

Đây là dạng bài tập hay gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi tỉnh. Ở dạng bài tập này , học sinh cần chỉ ra được các số hạng trong biểu thức chính là nghiệm của phương trình đại số nào. Sau khi chỉ ra được rồi, cần sử dụng định lý Vi-et để kết nối các mối quan hệ giữa các số hạng đó. Học sinh cần thuần thục trong các biểu diễn lượng giác, đặc biệt là các công thức về góc nhân.

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng

a) $\tan^2 10^\circ + \tan^2 50^\circ + \tan^2 70^\circ = 9$

b) $\tan^6 20^\circ + \tan^6 40^\circ + \tan^6 80^\circ = 33273$

Giải:

a) Áp dụng công thức góc nhân 3 ta có:

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - 3 \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} (*) ,$$

từ đó suy ra

$$\tan^2 3\alpha = \frac{9 \tan^2 \alpha - 6 \tan^4 \alpha + \tan^6 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + 9 \tan^4 \alpha}.$$

Thay $\alpha = 10^\circ$ ta có:

$$\frac{1}{3} = \frac{9 \tan^2 10^\circ - 6 \tan^4 10^\circ + \tan^6 10^\circ}{1 - 6 \tan^2 10^\circ + 9 \tan^4 10^\circ}.$$

Từ đó $\tan^2 10^\circ$ là nghiệm của phương trình :

$$3t^3 - 27t^2 + 33t - 1 = 0(1).$$

Vì $\tan^2 150^\circ = \tan^2 210^\circ = \frac{1}{3}$. Như vậy thì $\tan^2 50^\circ$; $\tan^2 70^\circ$ cũng là nghiệm của phương trình

trên. Theo định lý Vi-et ta có

$$\tan^2 10^\circ + \tan^2 50^\circ + \tan^2 70^\circ = 9.$$

b) Áp dụng với $\alpha = 20^\circ$ vào hệ thức (*) ta có

$$3 = \frac{9 \tan^2 20^\circ - 6 \tan^4 20^\circ + \tan^6 20^\circ}{1 - 6 \tan^2 20^\circ + 9 \tan^4 20^\circ}.$$

Từ đó $\tan^2 20^\circ$ là nghiệm của phương trình :

$$t^3 - 33t^2 + 27t - 3 = 0(2).$$

Lập luận tương tự ta có $\tan^2 40^\circ$; $\tan^2 80^\circ$ cũng là nghiệm của phương trình (2). Vì vậy nên ta có :

$$\begin{aligned} \tan^6 20^\circ + \tan^6 40^\circ + \tan^6 80^\circ &= t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 \\ &= (t_1 + t_2 + t_3)[(t_1 + t_2 + t_3)^2 - 3(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)] + 3t_1 t_2 t_3 \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng định lý Vi-et ta có: } \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 33 \\ t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 27 \\ t_1 t_2 t_3 = 3 \end{cases}.$$

Thay vào biểu thức trên ta có

$$\tan^6 20^\circ + \tan^6 40^\circ + \tan^6 80^\circ = 33273.$$

Bình luận :

Từ việc thiết lập được phương trình bậc ba (1) ở trên, ta có thể “ sáng tạo ” ra nhiều bài toán mới. Chẳng hạn:

Chứng minh rằng : $\tan^2 10^\circ \tan^2 50^\circ + \tan^2 10^\circ \tan^2 70^\circ + \tan^2 50^\circ \tan^2 70^\circ = 11$

$$\tan^2 10^\circ \tan^2 50^\circ \tan^2 70^\circ = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng :

$$\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{9\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} = \frac{-3}{4}$$

Giải:

Áp dụng công thức góc nhân ba:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

với $x = \frac{\pi}{12}$ ta có $4\cos^3 \frac{\pi}{12} - 3\cos \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. (1).

Nên $\cos \frac{\pi}{12}$ là nghiệm của phương trình :

$$4t^3 - 3t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Lập luận tương tự ta cũng thu được kết quả $\cos \frac{9\pi}{12}$; $\cos \frac{17\pi}{12}$ đều là nghiệm của phương trình (1). Áp dụng hệ thức Vi-et ta có :

$$\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{9\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} = \frac{-3}{4}.$$

Bình luận:

Ta có thể sáng tác ra các bài toán mới dựa vào phương trình trên như sau

Chứng minh rằng:

$$\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} + \cos \frac{17\pi}{12} = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{9\pi}{12} \cdot \cos \frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ví dụ 3:

Cho b khác 0 và giả sử phương trình :

$$x^3+ax^2+x+b=0$$

có 3 nghiệm là $x_1; x_2; x_3$. Chứng minh rằng:

$$(x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) + (x_2 - \frac{1}{x_2})(x_3 - \frac{1}{x_3}) + (x_3 - \frac{1}{x_3})(x_1 - \frac{1}{x_1}) = 4.$$

Giải:

Theo định lý Vi-et ta có :

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1.$$

Đặt $x_1 = \tan \alpha$; $x_2 = \tan \beta$; $x_3 = \tan \chi$ thế thì ta có

$$\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \chi + \tan \chi \tan \alpha = 1,$$

suy ra $\alpha + \beta + \chi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, suy ra

$$2\alpha + 2\beta + 2\chi = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nên đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\tan \alpha - \cot \alpha)(\tan \beta - \cot \beta) + (\tan \beta - \cot \beta)(\tan \chi - \cot \chi) + (\tan \chi - \cot \chi)(\tan \alpha - \cot \alpha) = 4.$$

Để ý rằng :

$$\tan x - \cot x = -2\cot 2x.$$

Vì thế đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$\cot 2\alpha \cot 2\beta + \cot 2\beta \cot 2\chi + \cot 2\alpha \cot 2\chi = 1.$$

Đây là đẳng thức hiển nhiên đúng vì $2\alpha + 2\beta + 2\chi = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng : $\tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{2\pi}{5} \cdot \tan \frac{3\pi}{5} \cdot \tan \frac{4\pi}{5} = 5$.

Giải:

Áp dụng công thức góc nhân ta có

$$\tan 5x = \tan(3x+2x) = \frac{\tan 3x + \tan 2x}{1 - \tan 3x \cdot \tan 2x} = \frac{\frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} + \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}}{1 - \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \cdot \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

Tiến hành rút gọn ta thu được :

$$\tan 5x = \tan x \frac{\tan^4 x - 10 \tan^2 x + 5}{5 \tan^4 x - 10 \tan^2 x + 1} \quad (1)$$

Lần lượt thay $x = \frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$ vào phương trình (1) thì vế trái luôn bằng 0. Mặt khác vì

$\tan \frac{\pi}{5}; \tan \frac{2\pi}{5}; \tan \frac{3\pi}{5}; \tan \frac{4\pi}{5}$ nên chúng phải là nghiệm của phương trình:

$$t^4 - 10t^2 + 5 = 0 \quad (2).$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có :

$$\tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{2\pi}{5} \cdot \tan \frac{3\pi}{5} \cdot \tan \frac{4\pi}{5} = 5. \quad (\text{đpcm})$$

Bình luận:

Ta có thêm một số kết quả khác dựa vào định lý Vi-et của phương trình trên như sau:

$$\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} + \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{4\pi}{5} = 0$$

$$\tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{2\pi}{5} \cdot \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} \cdot \tan \frac{3\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{2\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{3\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5} = 0$$

$$\tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{2\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5} + \tan \frac{3\pi}{5} \tan \frac{4\pi}{5} = -10$$

Ví dụ 5:

a) Chứng minh rằng : $\cos 7x = \cos x (64 \cos^6 x - 112 \cos^4 x + 56 \cos^2 x - 7)$ (1)

b) Từ đó hãy chứng minh : $A = \frac{\cos^4 \frac{\pi}{14} + \cos^4 \frac{3\pi}{14} + \cos^4 \frac{5\pi}{14}}{4 \cos^2 \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{3\pi}{14} \cos^2 \frac{5\pi}{14}} = 1$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 7x &= \cos(x+6x) = \cos x \cos 6x - \sin x \sin 6x \\ &= \cos x (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) - 2\sin x \sin 3x \cos 3x = \\ &= \cos x [4(2\cos^2 x - 1)^3 - 3(2\cos^2 x - 1)] - 2\sin x (3\sin x - 4\sin^3 x)(4\cos^3 x - 3\cos x) \\ &= \cos x (64\cos^6 x - 112\cos^4 x + 56\cos^2 x - 7). \end{aligned}$$

Ta thay $x = \frac{\pi}{14}$ vào (1) thì vế trái bằng 0, nhưng vì $\cos \frac{\pi}{14} \neq 0$, nên $\cos \frac{\pi}{14}$ là nghiệm của phương trình:

$$64t^6 - 112t^4 + 56t^2 - 7 = 0 \quad (2).$$

Hay $\cos^2 \frac{\pi}{14}$ là nghiệm của phương trình :

$$64t^3 - 112t^2 + 56t - 7 = 0 \quad (3).$$

Lập luận tương tự ta có $\cos^2 \frac{3\pi}{14}$; $\cos^2 \frac{5\pi}{14}$ cũng là nghiệm của (2).

Nếu ta gọi 3 nghiệm lần lượt là t_1, t_2, t_3 thì ta có

$$A = \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{t_1 t_2 t_3} = \frac{(t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3)}{t_1 t_2 t_3}.$$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = \frac{112}{64} \\ t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 = \frac{56}{64} \\ t_1 t_2 t_3 = \frac{7}{64} \end{cases}$$

Thay vào biểu thức A ta được $A=3$.

3) DẠNG 3: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phân tích:

Khi cần chứng minh các bất đẳng thức giữa các hệ số của phương trình, ta cần biến đổi chúng về các tỉ số thích hợp, thông thường là bằng cách chia cho hệ số chứa x^n để có thể sử dụng được định lý Vi-et. Việc chứng minh bất đẳng thức về hệ số chuyển sang chứng minh bất đẳng thức giữa các nghiệm.

Do định lý Vi-et phải biểu theo các biểu thức đối xứng, nên cuối cùng bất đẳng thức thu được cũng thường đối xứng. Đây là một điều thuận lợi, vì bất đẳng thức đối xứng thường dễ chứng minh hơn.

Ví dụ 1:

Giả sử phương trình:

$$x^3 - x^2 + ax + b = 0 \text{ có ba nghiệm .}$$

Chứng minh rằng: $\frac{2a-3b+1}{a-b+2} \leq \frac{3}{4} \quad (2)$

Giải:

Giả sử 3 nghiệm là $x_1; x_2; x_3$. Theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a; \quad x_1x_2x_3 = -b.$$

Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & \frac{2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2x_3 + 1} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + x_1 + x_2 + x_3} \\ \Leftrightarrow & \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \frac{x_3}{1+x_3} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + x_1 + x_2 + x_3} \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{1}{1+x_1} + 1 - \frac{1}{1+x_2} + 1 - \frac{1}{1+x_3} \leq 3 - \frac{9}{3+x_1+x_2+x_3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \geq \frac{9}{3+x_1+x_2+x_3} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 2:

Giả sử phương trình :

$$x^3 - (a+b)x^2 + \frac{(a+b)^2 - 1}{2}x + 1 = 0(1)$$

có 3 nghiệm. Chứng minh rằng :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 - 1}{2} + ab \leq 1(2).$$

Giải:

Ta giả sử 3 nghiệm của phương trình là x_1, x_2, x_3 . Theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{(a+b)^2 - 1}{2}.$$

Do đó $(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Từ (2) ta có :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 - 1}{2} + ab \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{(a+b)^2 - 1}{2} \leq 1$$

Hay là cần phải chứng minh:

$$\frac{-1}{2} \leq x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \leq 1 \quad (3).$$

Thật vậy: ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, nên từ

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \geq -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \geq -\frac{1}{2}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)^2=1.$$

Từ đó bất đẳng thức hoàn toàn được chứng minh.

Ví dụ 3:

Giả sử $x_1; x_2; x_3$ là ba nghiệm dương của phương trình:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(1), a \text{ khác } 0.$$

Chứng minh rằng :

$$x_1^7+x_2^7+x_3^7 \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}.$$

(Olympic 30-4 lần thứ 5; 45 năm Toán học tuổi trẻ)

Giải:

Theo định lý Vi-et ta có:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}>0; \quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}>0$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có :

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geq (x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=\frac{c}{a}>0 \quad (a)$$

Cũng theo bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \leq 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

Nên:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq \frac{b^2}{3a^2} > 0 \text{ (b)}.$$

Nhân vế theo vế (a) và (b) ta được:

$$0 < \frac{b^2 c}{3a^3} \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4 \leq 3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

Bình phương hai vế ta lại có :

$$\frac{b^4 c^2}{81 a^6} \leq (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^2 = (x_1^{\frac{7}{2}} x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{7}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + x_3^{\frac{7}{2}} x_3^{\frac{1}{2}})^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7).$$

Cuối cùng ta thu được: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3 c^2}{81 a^5}$ (đpcm).

Ví dụ 4:

Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$9(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd) \leq 4(ab+bc+cd+ad+bd+ac)^2.$$

Giải:

Xét đa thức:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Vì $f(x)$ có 4 nghiệm là a, b, c, d nên theo định lý Rolle (hệ quả định lý Lagrange) ta có $f'(x)$ có 3 nghiệm là m, n, p . Mà ta có:

$$f'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+bc+cd+da+ca+bd)x - (abc+abd+acd+bcd).$$

Nên theo định lý Vi-et ta có :

$$m + n + p = \frac{3}{4}(a + b + c);$$

$$mn + mp + np = \frac{1}{2}(ab + ac + ad + bc + bd + cd); \quad mnp = \frac{1}{4}(abc + abd + acd + bcd).$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \text{ ta có:}$$

$$\begin{aligned} (mn+np+mp)^2 &\geq 3(mn^2p+m^2np+mp^2) \\ &= 3mnp(m+n+p). \end{aligned}$$

Thay hệ thức Vi-et vào ta có được:

$$\frac{1}{4}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 \geq \frac{9}{16}(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd).$$

Hay :

$$9(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd) \leq 4(ab+bc+cd+ad+bd+ac)^2. \text{ (đpcm).}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét một vài dạng đối với đa thức tổng quát:

Ví dụ 5:

Cho đa thức bậc n :

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + 1 \text{ với } a_i \geq 0, i=1,2,\dots,n-1.$$

Chứng minh rằng: $P(x) \geq (x+1)^n (1) ; x \geq 0$.

Giải:

Để chứng minh bài toán ta cần có bất đẳng thức Minkowski phát biểu như sau:

Cho $2n$ số dương $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$ ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$), ta có:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \quad (2)$$

Ta chứng minh (2)

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có:

$$\frac{a_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n+b_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)}}$$

$$\frac{b_1}{a_1+b_1} + \frac{b_2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n+b_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)}}$$

Cộng vế theo vế ta có:

$$n \geq n \left(\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)}} \right).$$

Giản ước và quy đồng ta thu được điều cần chứng minh (2)

Bây giờ trở lại bài toán (1)

Do các a_i dương nên suy ra các nghiệm x_i của phương trình đều âm.

Theo định lý Vi-et ta có:

$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n$. Theo bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \sqrt[n]{(x+|x_1|)(x+|x_2|)\dots(x+|x_n|)} \geq \sqrt[n]{x.x\dots x} + \sqrt[n]{|x_1 x_2 \dots x_n|} = x+1$$

Vậy : $P(x) \geq (x+1)^n$ (1) ; $x \geq 0$.

Ví dụ 6:

Giả sử phương trình :

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$) có n nghiệm dương. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a_{n-1}}{n a_0} \right)^n \geq \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{n-1}.$$

Giải:

Áp dụng định lý Vi-ét và bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{a_{n-1}}{a_0} = x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_2 x_3 \dots x_n + \dots + x_n x_1 \dots x_{n-2} = x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq x_1 x_2 \dots x_n \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

$$= (x_1 x_2 \dots x_n) \frac{n-1}{n} = \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$\left(\frac{a_{n-1}}{na_0} \right)^n \geq \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{n-1} \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 7: (vô địch Hungari, 1983)

Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$ là đa thức với hệ số không âm và phương trình $P(x) = 0$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(2) \geq 3^n$.

Giải:

Vì đa thức có các a_i không âm nên $P(x) \geq 1$ với $x \geq 0$. Suy ra nếu phương trình có nghiệm thì các nghiệm phải âm. Ta gọi các nghiệm là $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$, với $x_i > 0$. Khi đó $P(x)$ được biểu diễn :

$$P(x) = (x+x_1)(x+x_2)\dots(x+x_n).$$

Ta đánh giá một đại diện $2 + x_k = 1 + 1 + x_k \geq 3 \sqrt[3]{x_k}$, $1 \leq k \leq n$.

$$\text{Vậy nên } P(2) = (2+x_1)(2+x_2)\dots(2+x_n) \geq 3^n \cdot \sqrt[3]{x_1 x_2 \dots x_n} = 3^n$$

Vì theo định lý Vi-ét ta có $x_1 \cdot x_2 \dots x_n = 1$.

Bình luận:

Nếu dựa vào các bất đẳng thức gốc, ta có thể tạo ra các đề toán mới:

a. Từ bất đẳng thức :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9, \text{ hay } \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}, \text{ với } a, b, c > 0.$$

Ta có bài toán sau:

2) Cho phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$$

với các hệ số dương có các nghiệm dương $x_1; x_2; x_3$. Chứng minh rằng lúc đó ta có:

$$bc \leq 9ad.$$

3) Mở rộng bài toán trên ta có bài toán sau: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$, trong đó

các số $x_i > 0; i = \overline{1, n}$

Cho phương trình :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ với } a_n \neq 0; a_n \text{ và } a_0 \text{ cùng dấu.}$$

Chứng minh rằng nếu phương trình có n nghiệm dương thì khi đó ta có:

$$a_{n-1} \cdot a_1 \geq n^2 a_n a_0.$$

4) Từ bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ta đi đến bài toán sau:

Chứng minh rằng nếu phương trình :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \text{ có ba nghiệm thì } b^2 - 3ac \geq 0.$$

5) Xuất phát từ bài toán:

Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ta có kết quả sau: $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$.

Từ đó ta có thể tạo ra bài toán sau:

Giả sử phương trình :

$$x^3 - (a+b)x^2 + \frac{(a+b)^2 - 1}{2}x + 1 = 0(1)$$

có 3 nghiệm. Chứng minh rằng :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 - 1}{2} + ab \leq 1(2).$$

Những bình luận ở trên cho ta thấy nếu sử dụng các bất đẳng thức gốc , ta có thể tạo ra nhiều bài toán khác nhau.

4) DẠNG 4: ĐA THỨC CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Ở đây ta quy ước nghiệm của đa thức P(x) tức là nghiệm của phương trình

$$P(x) = 0.$$

Ví dụ 1:

Tìm giá trị m để đa thức:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 4(1)$$

có nghiệm p;q;r sao cho $p^2 + q^2 = r^2$.

Giải:

Điều kiện cần:

Giả sử phương trình có 3 nghiệm p;q;r.

Theo định lý Vi-et và giả thiết ta có:

$$p+q+r = -2; pq+qr+rp = m; pqr=1; p^2+q^2 = r^2.$$

Từ đó ta có

$$4=(p+q+r)^2 = p^2+q^2+r^2 + 2(pq+qr+rp) = 2r^2 + 2m,$$

suy ra $r^2 = 2-m$.

Tại vì r là nghiệm của P(x) nên ta có:

$$r^3 + 2r^2 + mr - 4 = 0.$$

Thay $r^2 = 2-m$ ta được:

$$(2-m)r + 2(2-m) + mr - 4 = 0 \Leftrightarrow r=m,$$

do đó :

$$m^2 = 2 - m, \text{ ta được } m = 1; m = -2$$

Điều kiện đủ:

Với $m = 1$, thử lại ta được:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4 = (x-1)(x^2 + 3x + 4) \text{ không thỏa mãn.}$$

Với $m = -2$, thử lại ta được :

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = (x+2)(x^2 - 2)$$

Phương trình có 3 nghiệm $x = \sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$; $x = -2$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m = -2$.

Ví dụ 2:

Hãy lập đa thức bậc ba mà những nghiệm của nó là $m; n; p$ của nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = -2; \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1; \frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{p^4} = 1.$$

Giải:

Ta gọi đa thức bậc ba cần tìm là : $x^3 + ax^2 + bx + c$.

Theo công thức Vi-et ta có:

$$m + n + p = -a; mn + np + mp = b; mnp = -c.$$

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\frac{mn + np + mp}{mnp} = -2 \Rightarrow \frac{-b}{c} = -2.$$

$$1 = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{m^2 n^2 + m^2 p^2 + n^2 p^2}{(mnp)^2} =$$

$$= \frac{(mn + np + mp)^2 - 2mnp(m + n + p)}{(mnp)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

$$1 = \frac{m^4 n^4 + m^4 p^4 + n^4 p^4}{(mnp)^4}$$

$$= \frac{(m^2 n^2 + m^2 p^2 + n^2 p^2)^2 - 2m^2 n^2 p^2 (m^2 + n^2 + p^2)}{(mnp)^4}$$

$$= \frac{(b^2 - 2ac)^2 - 2c^2(a^2 - 2b)}{c^4}.$$

Giải hệ phương trình trên ta được $a = \frac{8}{3}$; $b = \frac{32}{9}$; $c = \frac{16}{9}$.

Vậy đa thức cần tìm là: $P(x) = x^3 + \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{9}x + \frac{16}{9}$.

Ví dụ 3:

Cho phương trình : $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Gọi x_1 ; x_2 ; x_3 là các nghiệm của phương trình. Hãy biểu diễn các đa thức đối xứng sau thông qua p ; q ; r :

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; B = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3; C = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 ;$$

Giải:

Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = -p$;

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q; x_1x_2x_3 = r$$

Ta có

$$A = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = p^2 - 2q$$

Ta tính B bằng cách thay các nghiệm x_i vào phương trình rồi cộng vế theo vế ta thu được:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + q(x_1 + x_2 + x_3) + 3r = 0$$

$$\Leftrightarrow B + p.(p^2 - 2q) + q(-p) + 3r = 0$$

$$\Leftrightarrow B = -p^3 + 3pq - 3r.$$

Tính C:

Ta nhân x_i vào hai vế của phương trình để tạo ra x_i^4 rồi cộng vế theo vế . Từ đó làm tương tự ta tính được

$$C = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4rq.$$

Ví dụ 4:

Hãy tính diện tích tam giác mà 3 đường cao của nghiệm đúng phương trình: $y^3 - ay^2 + by - c = 0$. (1)

Giải:

Gọi $x_1; x_2; x_3$ là độ dài ba cạnh của tam giác và $y_1; y_2; y_3$ là độ dài ba đường cao của tam giác. Vậy thì $y_1; y_2; y_3$ là ba nghiệm của (1) .

Gọi S là diện tích của tam giác, vậy thì $y_i = \frac{S}{x_i}$.

Thế vào phương trình ta có được:

$$\left(\frac{S}{x_i}\right)^3 - a\left(\frac{S}{x_i}\right)^2 + b\left(\frac{S}{x_i}\right) - c = 0.$$

Quy đồng ta được x_i là nghiệm phương trình :

$$x^3 - \frac{2bS}{c}x^2 + \frac{4aS^2}{c}x - \frac{8S^3}{c} = 0 \quad (2).$$

Đặt $P(x)$ là vế trái của (2).

Theo công thức He-rong ta có:

$$S^2 = p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3) = p.P(p), \text{ ở đây } p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{bS}{c}.$$

(Ta giải thích $S^2 = p.P(p)$ như sau:

Đa thức bậc ba nhân $x_1; x_2; x_3$ làm nghiệm là $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$ (3). Phương trình (3) cũng chính là phương trình (2) ở trên.

Nên ta phải có $(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3) = P(p)$)

Thay vào ta được:

$$S^2 = \frac{bS}{c} P\left(\frac{bS}{c}\right) = \frac{S^4}{c^4} (4ab^2c - b^4 - 8bc^2), \text{ suy ra}$$

$$S = \frac{S^2}{c^2} \sqrt{4ab^2c - b^4 - 8bc^2}.$$

Ví dụ 5:

Cho $p_1; p_2; q_1; q_2$ là những số nguyên và α là nghiệm của phương trình :

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$

còn β là nghiệm của phương trình $x^2 + p_2x + q_2 = 0$.

Hãy tìm các số nguyên a, b, c, d sao cho α, β là nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Giải:

Ta gọi α', β' là các nghiệm tương ứng còn lại của (1) và (2). Để có thể liên hệ giữa các nghiệm của phương trình, ta có thể xét đa thức sau nhận α, β làm nghiệm của nó. Đó là:

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \alpha')(x - \beta') = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Đồng nhất hệ số đồng bậc ở hai đa thức ta thu được các giá trị của a, b, c, d . Chẳng hạn là hệ số b

Ta có :

$$b = \alpha\beta\alpha'\beta' + \alpha\beta\alpha'\beta + \alpha\beta\alpha'\beta' + \alpha\beta'\alpha'\beta' + \alpha\beta'\alpha'\beta + \alpha'\beta\alpha'\beta.$$

Sử dụng định lý Vi-et cho (1) và (2) ta thu được

$$\begin{aligned} b &= 2q_1p_2 + q_2(\alpha^2 + \alpha'^2) + q_1(\beta^2 + \beta'^2) = \\ &= 2q_1p_2 + q_2(p_1^2 - 2q_1) + q_1(p_2^2 - 2q_2). \end{aligned}$$

Ví dụ 6: (vô địch mỹ 1977)

Giả sử a, b là hai trong 4 nghiệm của đa thức $x^4 + x^3 - 1$. Chứng minh rằng khi đó ab là nghiệm của đa thức $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

Giải:

Giả sử các nghiệm còn lại của đa thức bậc $P(x) = x^4 + x^3 - 1$ là c, d .

Theo định lý Vi-et ta có :

$$a + b + c + d = -1; \quad abcd = -1.$$

Để ab là nghiệm của đa thức bậc 6 thì ta phải có:

$$\begin{aligned} &(ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &(ab)^3 \left[(ab)^3 - \left(\frac{1}{ab}\right)^3 + (ab) - \frac{1}{ab} + 1 \right] = 0 (*), \end{aligned}$$

vì $ab \neq 0$; $\frac{1}{ab} = -cd$. Vậy nên (*) trở thành:

$$(ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1 = 0 (**).$$

Nói tóm lại ta phải chứng minh (**).

Thật vậy, từ $P(a) = P(b) = 0$. Ta có $a^3 = \frac{1}{a+1}$; $b^3 = \frac{1}{b+1}$,

nên
$$(ab)^3 = \frac{1}{(a+1)(b+1)} = \frac{(c+1)(d+1)}{P(-1)} = -(c+1)(d+1).$$

Bởi vì
$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

nên
$$P(-1) = (1+a)(1+b)(1+c)(1+d).$$

Tương tự ta có:

$$(cd)^3 = -(a+1)(b+1).$$

Thay vào (**) ta được

$$-(a+1)(b+1) - (c+1)(d+1) + ab + cd + 1 = -1 - a - b - c - d = 0$$

(theo định lý Vi-et).

Ví dụ 7: (Vô địch Balan 1979)

Hãy tìm tất cả các đa thức $P_n(x)$ có hệ số nguyên và dưới dạng

$$P_n(x) = n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + (-1)^n n(n+1)$$

có n nghiệm thực $x_1; x_2; \dots; x_n$ thỏa mãn điều kiện

$$x_k \in [k; k+1], \text{ với } k=1, 2, \dots, n \text{ và } n \geq 1.$$

Giải:

Với $n=1$, đa thức có nghiệm $x=2 \in [1; 2]$, nên $n=1$ thỏa mãn.

Với $n=2$ đa thức có dạng $P_2(x) = 2x^2 + a_1x + 6$. Ta phải tìm a_1 để phương trình có nghiệm thỏa mãn

$$1 \leq x_1 \leq 2 \leq x_2 \leq 3.$$

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = \frac{-a_1}{2}$; $x_1 x_2 = 3$. Ta suy ra $a_1 < 0$. Lại có

$$0 \leq x_2 - x_1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x_2 - x_1)^2 \leq 4.$$

Lại vì
$$(x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = \frac{a_1^2}{4} - 12.$$
 Do đó:

$$0 \leq \frac{a_1^2}{4} - 12 \leq 4 \Rightarrow 48 \leq a_1^2 \leq 64.$$

Tìm được $a_1 = -8$; $a_1 = -7$. Vậy đa thức cần tìm là

$$P_2(x) = 2x^2 - 8x + 6 \quad ; \quad P_2(x) = 2x^2 - 7x + 6$$

Thử lại ta thấy các đa thức này thỏa mãn.

Với $n \geq 3$. Ta có :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + (-1)^n n(n+1) \\ &= n!(x-x_1).(x-x_2)\dots(x-x_n) \end{aligned}$$

Cho $x=0$ ta được :

$$(-1)^n n(n+1) = n!(-1)^n x_1.x_2\dots x_n.$$

Do đó

$$x_1.x_2\dots x_n = \frac{n(n+1)}{n!} = \frac{n+1}{(n-1)!} \leq \frac{n+1}{2} < n < n!.$$

Nhưng mặt khác vì $x_k \in [k; k+1]$, nên

$$x_1.x_2\dots x_n \geq 1.2.3\dots n = n! \text{ (vô lý).}$$

Vậy khi $n \geq 3$ không tồn tại đa thức như thế.

Ví dụ 8:

Tìm a, b nguyên để phương trình :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (1)$$

Có hai trong số các nghiệm của nó có tích bằng -1.

(VMO)

Giải:

Ta đề ý rằng nếu phương trình có nghiệm là x thì cũng có nghiệm là $\frac{1}{x}$. Gọi u, v là các nghiệm mà có tích $uv \neq 1$

(vì nếu tích hai nghiệm bằng 1 thì có thể chọn là u và $\frac{1}{u}$).

Do đó ta gọi các nghiệm là $u; v; \frac{1}{u}; \frac{1}{v}$. Ta sẽ chứng minh hai nghiệm có tích bằng -1 phải là $u; v$.

Tức là ta phải chứng minh $u.v=-1$.

Thật vậy. Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} u + v + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -a \\ uv + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{1}{uv} + 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(u+v)(uv+1)}{uv} = -a(1) \\ uv + \frac{(u+v)^2 + 1}{uv} = b(2) \end{cases}$$

Giả sử rằng $uv \neq 1$. Vì a, b là số nguyên nên từ (a) suy ra $u+v$ hữu tỉ, từ (b) suy ra $(u+v)^2$ phải là số nguyên. Nên suy ra $(u+v)$ cũng là số nguyên.

Vì $uv+1$ không chia hết cho uv nên từ (a) ta có $u+v$ chia hết cho uv .

Cũng từ (b) ta có $(u+v)^2+1$ chia hết cho uv .

Nhưng vì $(u+v)$ và $(u+v)^2 + 1$ có ước chung là 1 hoặc -1 nên suy ra $uv=1$ hoặc $uv=-1$.

Vì ta giả sử $uv \neq 1$ nên suy ra $uv = -1$.

Từ (1) suy ra $a=0$. Từ (2) ta có $b = (u+v)^2 - 2 \leq -2$.

Thử lại với $a = 0, b \leq -2, b \in \mathbb{Z}$, phương trình trở thành :

$$x^4 + bx^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

Phương trình có nghiệm là: $u = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}}; v = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}}$.

Đây là 2 nghiệm thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 9:

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu có một nghiệm bằng tích của hai nghiệm kia thì :

$$2P(-1) : [P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))]$$

(Canada 82)

Giải:

Giả sử phương trình có 3 nghiệm thỏa mãn như đề bài nêu.

Ta gọi các nghiệm là u ; v ; uv .

Áp dụng định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} u + v + uv = -a(1) \\ uv(1 + u + v) = b(2) \text{ (I).} \\ u^2 v^2 = -c(3) \end{cases}$$

Nếu $a = -1$ thì từ (1) ta có : $u + v + uv + 1 = 0 \Leftrightarrow (u + 1)(v + 1) = 0$.

Phương trình có nghiệm là -1 nên hiển nhiên $2P(-1) = 0$, chia hết cho mọi số.

Nếu $a \neq -1$, cộng vế theo vế (2) và (3) ta được :

$$uv(1 + u + v + uv) = b - c = uv(1 - a) \text{ (do (1)).}$$

Suy ra $uv = \frac{b-c}{1-a}$ là số hữu tỉ vì a, b, c là các số nguyên.

Ta có : $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0)) = 2(a - 1) = -2(u + v + uv + 1) = -2(1 + u)(1 + v) \neq 0$.

Mặt khác : vì $P(x) = (x - u)(x - v)(x - uv)$ nên:

$$2P(-1) = 2(-1 - u)(-1 - v)(-1 - uv) = -2(1 + u)(1 + v)(1 + uv).$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP

1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng từ A (1;-1) luôn kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị và hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.
2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2; \frac{2}{5})$ sao cho d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B và M là trung điểm của AB.

3. Tìm m để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu tới tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{-x + 1}$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng 10.
5. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$ luôn có cực trị và khoảng cách giữa chúng luôn là một hằng số.
6. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px - 1 = 0$ với p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $x_1^n + x_2^n$ và $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ là các số nguyên tố cùng nhau. (**Ôlympic Balan 1964**).
7. Chứng minh rằng $(3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n$ không chia hết cho 5 với mọi n .
8. Xét phương trình $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$; với a, b hữu tỉ.
- a) chứng minh rằng với $a = -5; b = 3$ là cặp số duy nhất làm cho phương trình có nghiệm $2 + \sqrt{5}$.
- b) Kí hiệu $x_1; x_2; x_3$ là 3 nghiệm của phương trình trên. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, n là số tự nhiên. Chứng minh S_n cũng là số tự nhiên.
- c) Tìm số dư phép chia S_{2005} cho 4.

9. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{7}}{2}}$
10. Cho $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$; $\tan \alpha$; $\tan \beta$; $\tan \gamma$ là 3 nghiệm của phương trình :
$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$
 Chứng minh rằng $p+1=q+r$.
11. Chứng minh hệ thức : $S = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{7}} = 4$.
12. Chứng minh rằng nếu $\tan u$; $\tan v$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + px + q = 0$.
Thì $\sin^2(u+v) + p \sin(u+v) \cos(u+v) + q \cos^2(u+v) = q$.
13. Chứng minh rằng nếu $\tan x$; $\tan y$; $\tan z$ là 3 nghiệm phương trình $t^3 + at^2 + bt + c = 0$; còn $\tan u$; $\tan v$; $\tan w$ là ba nghiệm của phương trình $t^3 + ct^2 + bt + a = 0$ thì ta có
$$x + y + z + u + v + w = k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$
14. chứng minh rằng :
a) $\cos 20^\circ$ là số vô tỉ.
b) $\tan^6 10^\circ + \tan^6 50^\circ + \tan^6 70^\circ = 433$.
- 15) Hãy tìm bộ ba số hữu tỉ (a,b,c) là những nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
(Olympic sinh viên MỸ 1940).
- 16) Chứng minh rằng nếu x_1 ; x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + px + \frac{1}{2p^2}$; $p \neq 0$, ta có bất đẳng thức $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ (vô địch Bungari 1980).

17) Giả sử trong các nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b nguyên bằng tích của hai nghiệm kia. Chứng minh rằng số $2P(-1)$ chia hết cho số $P(1)+P(-1) - 2[1+P(0)]$.
(vô địch Canada 1982).

18) Cho dãy $\{a_n\}$ với $a_1 = a_2 = 1$; $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$; $n \geq 3$.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy.

b) Chứng minh rằng $a_{n+1} = 2a_n + 1$ nếu n chẵn và $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nếu n lẻ.

19) Cho dãy (a_n) xác định như sau:

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

a) Chứng minh rằng với n nguyên dương ta có :

$$(a_{n+2} - 2)(a_n - 2) = (a_{n+1} - 3)^2.$$

b) Chứng minh rằng với mọi k nguyên dương thì $a_{2k-1} - 2$ là số chính phương.

20) (Việt nam MO 2002)

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10\sqrt{(a^2 - 2b)^3}.$$

21) Giả sử $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm dương. Chứng minh rằng
$$\frac{3abc + 8b^3 - 3da^2}{a^3} \geq 0.$$

22) Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ có 4 nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

23) Giả sử phương trình $x^3 - px^2 + qx - p = 0$ với $p; q > 0$ có ba nghiệm thực không nhỏ hơn 1.

Chứng minh rằng $p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q+3).$

(45 năm tạp chí toán học tuổi trẻ , bài 283)

24) Chứng minh rằng

$$\cos^4 \frac{\pi}{14} + \cos^4 \frac{3\pi}{14} + \cos^4 \frac{5\pi}{14} = 12 \cos^2 \frac{\pi}{14} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{14} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{14}.$$

25) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} xyzt = 1 \\ x + y + z + t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \\ xy + yz + zt + tx = 4 \end{cases}$$

26) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} xyzt = 1 \\ x + y + z + t = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

PHẦN THỨ BA

PHẦN KẾT THÚC

I- KẾT QUẢ:

Sau khi ý tưởng của đề tài được thực hiện , tôi thấy đã thu được nhiều kết quả khả quan.

Cụ thể như sau:

- Về phía bản thân:

Tôi cảm thấy mình đã có cái nhìn sâu sắc và xuyên suốt hơn về định lý Vi-et. Thấy được lợi ích to lớn của nó khi đem cho học trò áp dụng vào giải bài tập và làm bài kiểm tra, bài thi. Bản thân cũng đã tạo cho mình một giáo trình riêng để có thể giảng dạy học sinh . Khi đề tài được thực hiện xong, tôi đã có thể dùng một phần nào đó để giảng và lấy ví dụ minh họa. Đặc biệt tài liệu đã hỗ trợ cho tôi rất nhiều trong vấn đề bồi dưỡng học sinh giỏi ở trường THPT Phan Bội Châu.

Cũng trong khi đề tài thực hiện, tôi đã nhận được sự đóng góp nhiệt tình và quý báu từ các đồng nghiệp. Do đó giữa chúng tôi đã có sự tích cực hơn về mặt trao đổi chuyên môn

và phương pháp. Bản thân cũng đã rút ra được nhiều kinh nghiệm từ đồng nghiệp của mình.

- Về phía học sinh:

Khi ý tưởng mới hình thành từ những năm 2007-2008, tôi đã đem giới thiệu không chính thức với các học sinh của mình, đặc biệt là các em trong đội tuyển học sinh giỏi. Tôi quan sát và rút ra nhận định *nếu mình trình bày những kiến thức này một cách hệ thống, gắn kết chúng lại thì các em nhận ra bản chất vấn đề tốt hơn khi để chúng ở các dạng riêng lẻ*. Kể từ khi đề tài được tổng hợp lại, kết quả thi Đại học (về môn Toán) và kết quả học sinh giỏi có nhiều cải tiến. Điểm số 8; 9 về môn Toán ở kỳ thi Đại học thu hoạch được nhiều hơn. Tất nhiên là các phần khác kinh nghiệm cũng phải được nâng lên tương ứng. Đã bắt đầu xuất hiện học sinh đậu các giải Lương Thế Vinh. Trước đó tôi chưa từng có học sinh đậu vòng tỉnh về môn Toán. Trong chương trình chính khóa, các em làm bài kiểm tra, bài thi học kỳ về phần hàm số (tiếp tuyến, cực trị ...) trôi chảy hơn, kết quả cao hơn những năm trước.

Đó là những tín hiệu khởi đầu đáng mừng của một giáo viên trẻ mới vào nghề như tôi. Tôi tin rằng trong tương lai , với sự nỗ lực của bản thân trong sự nỗ lực chung của cả nhà trường , thì những thành tích của nhà trường về dạy và học sẽ có nhiều cải tiến. Về phía bản thân để đạt được những thành tựu mới , cần một sự nỗ lực rất lớn ngay từ bây giờ.

II- VÀI LỜI KẾT :

Qua các dạng toán được đúc rút ra ở trên, thật ngạc nhiên và thú vị khi một định lý tưởng chừng như chỉ hiện hữu trong vấn đề đa thức và phương trình, thì nay ta thấy nó được sử dụng một cách hiệu quả ở hầu hết các mảng của Đại số và Số học. Thật là thiếu sót nếu chúng ta chưa có một cái nhìn tổng thể về định lý Vi-et.

Sẽ còn rất nhiều mảng khác nữa mà định lý Vi-et có thể được sử dụng tới, chẳng hạn như Số phức hay Hình học tọa độ. Tuy nhiên do kinh nghiệm bản thân chưa nhiều nên chưa thể có sự hệ thống trọn vẹn.

Việc tìm ra mối quan hệ thống nhất giữa các mảng của Đại số và số học nói riêng và của Toán học nói chung là điều mà người dạy Toán và học toán luôn khao khát làm được.

Điều khiến tác giả thấy tâm đắc qua đề tài của mình là khi ta sử dụng định lý Vi-et thì lời giải trở nên cô đọng và trong sáng. Một lần nữa tôi mong và tin tưởng đề tài này sẽ góp thêm một phương pháp tốt cho học sinh khi làm toán.

Qua các ví dụ tác giả chốt lại được, ta thấy rằng việc ứng dụng của định lý Vi-et để giải bài tập xuất hiện trong đề thi rất nhiều. Bao gồm kì thi Đại học cao đẳng lẫn các kỳ thi học sinh giỏi. Do đó thiết nghĩ việc chú trọng định lý Vi-et trong quá trình giảng dạy học sinh là một điều cần thiết.

Do năng lực và kinh nghiệm còn nhiều hạn chế, có thể các lời giải và cách trình bày chưa thực sự hay và đặc sắc. Mong nhận được sự trao đổi từ các đồng nghiệp. Tác giả sẽ cố gắng hoàn thiện hơn trong thời gian tới. Cuối cùng xin chân thành cảm ơn sự góp ý, giúp đỡ chân tình của thầy cô trong tổ Toán trường THPT Phan Bội Châu, th.s Nguyễn Quốc Vũ, Nguyễn Thị Ly Na, bạn bè, đồng nghiệp và những người yêu Toán đã giúp tôi hoàn thành đề tài này.

MINH HÒA THÁNG 11 NĂM 2011

NGUYỄN THÀNH NHÂN

Đánh giá của Hội đồng khoa học

Tài liệu tham khảo

- 1) Các bài toán chọn lọc 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
(NXB GD)
- 2) Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990-2006), NXB GD.
- 3) Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học
(Trần Phương- NXB Tri Thức).
- 4) Chuyên đề 2 : Số học và dãy số (Phan Huy Khải- NXB GD)
- 5) Bài tập nâng cao và một số chuyên đề giải tích 11.
(Nguyễn Huy Doan, Đặng Hùng Thắng, NXB GD)
- 6) Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và tuổi trẻ T2,3,4
(NXB GD).
- 7) Tuyển tập đề thi Olympic 30 THÁNG 4 các năm
(NXB Đại học sư phạm).
- 8) Một số bài toán về dãy số trong các đề thi Olympic 30-4
(Võ Giang Giai- Nguyễn Ngọc Thu , NXB ĐHQG Hà Nội).
- 9) Các bài giảng luyện thi môn toán tập 1,2,3
(Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất, Tạ Mân,
NXB GD).
- 10) Bài tập nâng cao và một số chuyên đề giải tích 12
(Nguyễn Huy Doan, Đặng Hùng Thắng , NXB GD)
- 11) Trọng tâm kiến thức giải tích 12 , Phan Huy Khải, NXB GD
- 12) Các chuyên đề toán phổ thông, chủ đề Hàm số
(Phan Huy Khải, NXB GD).

- 13) Bộ đề thi tuyển sinh đại học , môn Toán, NXB GD).
- 14) Đa thức và ứng dụng , Nguyễn Hữu Điển, NXB GD.
- 15) Báo Toán học và Tuổi trẻ.

PHỤ LỤC

- 1/. Phần mở đầu 2.

2/. Nội dung đề tài , giới thiệu về định lý Vi-et.....	8
3/. Phần thứ hai: ứng dụng của định lý Vi-et.....	11
4/. Ứng dụng củ định lý Vi-et bậc hai.....	11
5/. Dạng 1: Biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm	11
6/. Dạng 2: Giải hệ đối xứng kiểu 1.....	16.
4/. Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức.....	19.
5/. Dạng 4: Khảo sát tính chất cực trị của hàm số.....	26.
6/. Dạng 5: Khảo sát tính chất tiếp tuyến.....	34.
7/. Dạng 6: Ứng dụng của một hệ thức truy hồi.....	40.
8/. Dạng 7: Tương giao của hai đồ thị và tập hợp điểm.....	46
9/. Dạng 8: Tìm số hạng tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính cấp hai	54
10/. Dạng 9: So sánh nghiệm của tam thức bậc hai với một số.	
11/. Ứng dụng của định lý Vi-et tổng quát.....	87.
12/. Dạng 1: Ứng dụng vào giải hệ phương trình.....	.87
13/. Dạng 2: ứng dụng vào tính các biểu thức lượng giác.....	91
14/. Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức.....	96
15/. Một số bài tập tổng hợp	114
16/. Phần kết thúc	119.
17/. Tài liệu tham khảo.....	122.
18/. Phụ lục.....	124