

MỘT KỸ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN N

Nguyễn Trọng Tuấn
PTNK - Đại học quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

MỞ ĐẦU: Các bài toán về phương trình hàm đòi hỏi phải biết vận dụng tổng hợp các kiến thức về hàm số. Đối với lớp các phương trình hàm trên N , chúng ta còn phải biết vận dụng các kiến thức của lý thuyết số.

Ta đã biết các kết quả rất cơ bản và quen thuộc sau đây :

1. Mọi số tự nhiên đều có thể phân tích được một cách duy nhất (không kể thứ tự) thành tích của các thừa số nguyên tố:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

ở đây p_i là các số nguyên tố phân biệt và $a_i \in N$

2. Mọi số tự nhiên n đều được biểu diễn duy nhất dưới dạng $n = 2^m \cdot k$, ở đây m là số tự nhiên và k là số lẻ.

3. Với hai số tự nhiên p khác 0 cho trước, mọi số n đều có thể viết được duy nhất dưới dạng $n = kp + r$ với $0 \leq r \leq p - 1$.

Các kết quả trên rất hữu ích khi giải một số phương trình hàm trên N . Nội dung của phương pháp này có thể tóm tắt như sau :

- Tìm công thức xác định $f(n)$ với n thuộc về một tập hợp $T \subset N$ nào đó.
- Biểu diễn n theo các phần tử của tập hợp T .

Nói tóm lại, để xác định hàm $f(n)$ ta chỉ cần xác định hàm $f(n)$ trên T . Tập hợp T có thể vô hạn hoặc hữu hạn, thậm chí T có thể gồm 1 hoặc 2 phần tử.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(m) + f(n)) = m + n \text{ với mọi } n \in N^* ?$$

Giải. Dễ dàng chứng minh được f là hàm có tính chất đơn ánh.

Giả sử m, n, p, q là 4 số tự nhiên thỏa mãn $m + n = p + q$.

Khi đó $f(f(m) + f(n)) = f(f(p) + f(q))$

Do f là đơn ánh nên ta có $f(m) + f(n) = f(p) + f(q)$

Từ đẳng thức trên suy ra:

$$f(m) - f(m-1) = f(m-1) - f(m-2) = \dots = f(3) - f(2) = f(2) - f(1)$$

Như thế dãy $(f(m))$ là một cấp số cộng với số hạng đầu là $f(1)$ và công sai là $d = f(2) - f(1)$.

Như thế để xác định được $f(m)$ ta chỉ cần xác định $f(2)$ và $f(1)$.

Ta có $f(m) = f(1) + (f(2) - f(1))(m-1)$ với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.

Thay biểu thức của $f(m)$ vào hệ thức đầu bài ta được

$$f(2f(1) + (m-1)d + (n-1)d) = m + n$$

$$\text{Hay } f(1) + [2f(1) + (m-1)d + (n-1)d - 1]d = m + n$$

$$\text{Suy ra } f(1) = d = 1.$$

Từ đó hàm số duy nhất cần tìm là $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) = n + 4 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} ?$$

Giải Giả sử $f(m) = n$. Khi đó $f(n) = f(f(m)) = m + 4$.

$$\text{Suy ra } f(m+4) = f(f(n)) = n + 4 \text{ hay } f(m+4) = f(m) + 4.$$

Bằng qui nạp theo k , dễ dàng chứng minh được $f(m+4k) = f(m) + 4k$.

Viết m dưới dạng $m = 4k + r$, ở đây $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\text{Khi đó } f(m) = f(4k+r) = f(r) + 4k.$$

Như vậy, để xác định hàm số ta chỉ cần xác định các giá trị $f(0), f(1), f(2), f(3)$.

Với mỗi $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, ta viết $f(r)$ dưới dạng duy nhất

$$f(r) = 4p + s \text{ với } s \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{Khi đó } f(4p+s) = f(f(r)), \text{ suy ra } 4p + f(s) = r + 4.$$

Như thế $r = f(s) + 4(p-1)$, từ đó dẫn tới $p = 0$ hoặc $p = 1$.

- Xét $p = 0$.

$$\text{Ta có } f(r) = s \text{ và } f(s) = r + 4.$$

- Xét $p = 1$.

$$\text{Ta có } f(r) = s + 4 \text{ và } f(s) = r$$

Chú ý rằng ta không thể có $f(r) = r$. Từ đó ta có thể xây dựng tất cả các hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:

– Chia tập hợp $\{0, 1, 2, 3\}$ thành 2 tập rời nhau $\{a, b\}$ và $\{c, d\}$

– Nếu $f(a) = c, f(b) = d$ thì $f(c) = a+4, f(d) = b+4$

Nếu $f(a) = d, f(b) = c$ thì $f(d) = a+4, f(c) = b+4$

Chẳng hạn, ta có thể chỉ ra một hàm như sau:

$$f(1) = 3, f(4) = 2, f(3) = 5, f(2) = 8 \text{ và } f(4k+r) = 4k + f(r), r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Dễ thấy có tất cả 12 hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Bằng phương pháp trên ta có thể giải bài toán tổng quát:

Cho b là số tự nhiên, tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) = n + b \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 3. Cho hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) = 2n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Xác định giá trị nhỏ nhất có thể có của $f(2010)$.

Giải. Giả sử $f(m) = n$, khi đó $f(n) = f(f(m)) = 2m$ và như thế

$$f(2m) = f(f(n)) = 2n \text{ hay } f(2m) = 2f(m) \text{ với mọi } m \in \mathbb{N}.$$

Bằng qui nạp, ta chứng minh được $f(2^k m) = 2^k f(m), \forall m \in \mathbb{N}$

Mọi số tự nhiên n luôn viết được duy nhất dưới dạng $n = 2^m \cdot a$, trong đó m là số tự nhiên, còn a là một số lẻ.

$$\text{Ta có } f(n) = f(2^m a) = 2^m f(a)$$

Như vậy để xác định hàm số, ta chỉ cần xác định $f(a)$ với a lẻ.

Bây giờ, giả sử $f(a) = 2^p b$ với p là số tự nhiên và b lẻ.

$$\text{Khi đó } f(2^p b) = f(f(a)) \text{ hay } 2^p f(b) = 2a \Rightarrow 2^{p-1} f(b) = a$$

Do a lẻ nên $p = 1$ và từ đó $f(a) = 2b$ và $f(b) = a$.

Hiển nhiên rằng $a \neq b$ vì nếu $f(a) = 2b = 2a$ thì $f(2a) = f(f(a)) = 2a$ hay $4b = 2a$, mâu thuẫn.

Như vậy, có thể xây dựng hàm f như sau :

– Chia tập hợp vô hạn các số lẻ thành hai tập con vô hạn rời nhau A và B .

Với mỗi $a \in A$ đặt tùy ý $f(a) = b \in B$ và $f(b) = 2a$.

– Với mỗi $n = 2^m \cdot a$ với a lẻ, đặt $f(n) = 2^m f(a)$.

Ta có $2010 = 2 \cdot 1005$

Từ đó $f(2010) = 2f(1005)$. Suy ra $f(2010)$ nhỏ nhất khi $f(1005) = 1$ ứng với hàm f mà $f(1005) = 1$, $f(1) = 2010$ và các giá trị k lẻ khác ta đặt tùy ý theo qui tắc trên.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(mf(n)) = n^2 f(m), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Xác định giá trị nhỏ nhất có thể có của $f(2010)$.

Giải. Dễ thấy f là hàm đơn ánh.

Cho $m = n = 1$ ta được $f(f(1)) = f(1)$, suy ra $f(1) = 1$.

Cho $m = 1$ ta có $f(f(n)) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Thay m bởi $f(m)$ ta được:

$$f(f(m)f(n)) = n^2 f(f(m)) = n^2 m^2 = f(f(mn))$$

Do f đơn ánh nên $f(mn) = f(m)f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy f có tính chất nhân. Từ đó để xác định hàm f ta chỉ cần xác định giá trị của nó tại các điểm p nguyên tố.

Gọi p là số nguyên tố và giả sử $f(p) = ab$. Khi đó $f(ab) = f(f(p))$ hay

$$f(a)f(b) = p^2$$

Do p nguyên tố nên chỉ xảy ra khả năng $f(a) = f(b) = p$, suy ra $a = b$.

Vậy $f(p) = a^2$ và $f(a^2) = f(f(p)) = p^2$. Như thế $f(a) = p$.

Ta sẽ chứng minh a là một số nguyên tố. Thật vậy, nếu $a = mn$ với $m, n > 1$ thì $p = f(a) = f(m)f(n)$, vô lí vì $f(m) > 1$ và $f(n) > 1$.

Tóm lại, nếu p là số nguyên tố thì $f(p)$ hoặc là số nguyên tố, hoặc là bình phương của một số nguyên tố.

Chú ý rằng không thể có khả năng $f(p) = p$ hoặc $f(p) = p^2$ với p nguyên tố.

Từ đó ta có thể xây dựng hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau :

– Chia tập hợp các số nguyên tố thành vô hạn cặp rời nhau (p, q) và đặt

$$f(p) = q, f(q) = p^2.$$

– Với mỗi số $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ ta đặt $f(n) = f(p_1)^{a_1} f(p_2)^{a_2} \dots f(p_k)^{a_k}$

Ta có $2010 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ nên giá trị nhỏ nhất có thể có của $f(2010)$ ứng với hàm f mà $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(5) = 7$, $f(67) = 11$ và

$$f(2012) = 3^2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 11 = 2772.$$

Hy vọng rằng qua 4 ví dụ trên, chúng ta sẽ phần nào nắm được kĩ thuật giải một lớp các phương trình hàm trên $\mathbb{N}$. Sau đây là một số bài tập rèn luyện.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện $f(mf(n)) = n + f(2m)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) = n + 2 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

3. Cho hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) = 3n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Xác định giá trị nhỏ nhất có thể có của $f(2012)$.

4. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(n + f(n)) = 2n + 2 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

5. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện

i) $f(mf(n)) = n^2 f(mn)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Nếu p nguyên tố thì $f(p)$ là hợp số nhưng không phải là số chính phương.

6. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện
 $f(mf(n)) = n^3 f(m)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
7. (IMO 1998) Xét các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện
 $f(m^2 f(n)) = n(f(m))^2$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.