

CẤP SỐ CỘNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN $\mathbb{N}$

Nguyễn Trọng Tuấn
Trường PTNK – Đại học quốc gia TP.HCM

MỞ ĐẦU : Chúng ta đều biết dãy số $f_n = an + b$, ở đây $a, b \in \mathbb{N}$, là một cấp số cộng với công sai là a . Một hàm số cảm sinh ra một cấp số cộng nếu như nó có dạng tuyến tính. Theo cách tiếp cận này, có khá nhiều hàm trên $\mathbb{N}$ liên quan đến cấp số cộng. Một dấu hiệu để dự đoán hàm số f tuyến tính là bậc của các biến không vượt quá 1.

Bài viết sau đây trình bày những kỹ thuật cơ bản để giải phương trình hàm trên $\mathbb{N}$ liên quan đến cấp số cộng. Hy vọng rằng nó sẽ có ích cho các bạn học sinh chuyên toán.

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(m) + f(n)) = m + n \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^* ?$$

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được f là hàm có tính chất đơn ánh.

Giả sử m, n, p, q là 4 số tự nhiên thỏa mãn $m + n = p + q$.

Khi đó $f(f(m) + f(n)) = f(f(p) + f(q))$

Do f là đơn ánh nên ta có $f(m) + f(n) = f(p) + f(q)$

Từ đẳng thức trên suy ra:

$$f(m) - f(m-1) = f(m-1) - f(m-2) = \dots = f(3) - f(2) = f(2) - f(1)$$

Như thế dãy $(f(m))$ là một cấp số cộng với số hạng đầu là $f(1)$ và công sai là $d = f(2) - f(1)$.

Như thế để xác định được $f(m)$ ta chỉ cần xác định $f(2)$ và $f(1)$.

Ta có $f(m) = f(1) + (f(2) - f(1))(m-1)$ với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.

Thay biểu thức của $f(m)$ vào hệ thức đầu bài ta được

$$f(2f(1) + (m-1)d + (n-1)d) = m + n$$

$$\text{Hay } f(1) + [2f(1) + (m-1)d + (n-1)d - 1]d = m + n$$

$$\text{Suy ra } f(1) = d = 1.$$

Từ đó hàm số duy nhất cần tìm là $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Sử dụng kỹ thuật như trong **Bài toán 1**, giúp chúng ta giải được nhiều phương trình hàm một cách ngắn gọn.

Bài toán 2. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(m) + f(n) + f(p)) = m + n + p$$

với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Dễ thấy rằng f đơn ánh.

Cho $n = p$ ta có $f(f(m) + 2f(n)) = m + 2n$.

Với mọi số tự nhiên m và $n > 0$ ta có $m + 2n = (m+2) + 2(n-1)$

Từ đó $f(m + 2f(n)) = f(f(m+2) + 2f(n-1))$

Vì f đơn ánh nên $f(m) + 2f(n) = f(m+2) + 2f(n-1)$

Hay $f(m + 2) - f(m) = 2f(n) - 2f(n-1)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 1$.

Thay $n = m + 2$ ta có

$$f(m+2) - f(m) = 2f(m+2) - 2f(m+1)$$

Do đó $f(m+2) - f(m+1) = f(m+1) - f(m)$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Đẳng thức trên chứng tỏ dãy $\{f(m)\}$ là cấp số cộng. Do đó $f(m) = am + b$ với $a, b \in \mathbb{N}$.

Thay biểu thức của f vào hệ thức ở đầu bài ta được

$$f(am + b + an + b + ap + b) = m + n + p$$

Hay $a^2(m + n + p) + 3ab + b = m + n + p$ với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Từ đó ta có $a = 1, b = 0$.

Vậy hàm số cần tìm là $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ (thỏa mãn).

Có nhiều hàm số thỏa mãn hệ thức $f(f(n)) = an + b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nhưng lại không cảm sinh ra một cấp số cộng. Nghĩa là dãy $\{f(n)\}$ không phải là cấp số cộng. **Bài toán 3.** sẽ đề cập về một hàm số như thế.

Bài toán 3. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) f tăng thực sự;

ii) $f(f(n)) = 2n + 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa, dãy $f(n)$ không phải là cấp số cộng.

Lời giải

Chú ý rằng do f tăng thực sự nên với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*, (m > n)$ ta luôn có:

$$f(m) - f(n) \geq m - n \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $f(f(n+1)) - f(f(n)) \geq f(n+1) - f(n)$

Như thế $f(n+1) - f(n) \leq 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lại áp dụng (1) ta được:

$$f(n) - n \leq f(f(n)) - f(n)$$

Hay $f(n) - n \leq 2n + 3 - f(n)$

Do đó
$$f(n) \leq \frac{3n+3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Mặt khác, cũng từ (1) ta có :

$$f(f(n)) - f(n) \leq f(f(f(n))) - f(f(n))$$

Suy ra $4n + 6 - f(n) \leq 2f(n) + 3$

Hay
$$f(n) \geq \frac{4n+3}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó với mọi số tự nhiên n ta có $\frac{4n+3}{3} \leq f(n) \leq \frac{3n+3}{2}$ (2)

Từ (2) ta có $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ và $f(3) = f(f(1)) = 5$, $f(4) = f(f(2)) = 7$

Bây giờ giả sử $f(n) < m < f(n+1)$ và không tồn tại k sao cho $f(k) = m$.

Khi đó có $f(f(n)) < f(m) < f(f(n+1))$ hay $2n + 3 < f(m) < 2n + 5$.

Vậy $f(m) = 2n + 4 = f(f(n)) + 1$.

Từ đó ta có thuật toán xây dựng hàm $f(n)$ như sau :

- $f(1) = 3$

Ta có $f(3) = 5$ và từ đó $f(2) = 4$.

- Giả sử đã xác định được $f(1), f(2), \dots, f(k)$. Ta xác định $f(k+1)$ như sau :

Nếu có m mà $f(m) = k + 1$ (số m là duy nhất) thì đặt $f(k + 1) = 2m + 3$.

Nếu không có số m như thế thì đặt $f(k+1) = f(k) + 1$.

Từ đó ta có dãy $f(n)$ như sau :

$f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 5, f(4) = 7, f(5) = 9, f(6) = 10, \dots$

Rõ ràng dãy $f(n)$ xác định duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán và không phải là cấp số cộng.

Như vậy nếu f tăng thực sự và thỏa mãn $f(f(n)) = an + b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\{f(n)\}$ chưa chắc là cấp số cộng hay nói cách khác, f có thể không có dạng tuyến tính. Cần phải bổ sung điều kiện cho hàm f . Một trong những điều kiện đó được nêu trong **Bài toán 4.** sau đây.

Bài toán 4, Tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

i) $f(f(n)) = 4n + 9$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) $f(f(n)+1) = 4n + 11$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Trước hết, dễ dàng chứng minh được các kết quả :

$$f(4k+9) = 4f(k) + 9 \text{ và } f(4k+10) = 4f(k) + 11.$$

Tương tự bài số 2, ta có

$$f(n+1) - f(n) \leq 4 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Gọi k là số tự nhiên sao cho $f(k+1) - f(k) = M$ là số lớn nhất.

Ta có $f(f(f(k+1))) - f(f(f(k))) = 4f(k+1) + 9 - 4f(k) - 9 = 4M$

Mặt khác ,

$$f(f(f(k+1))) - f(f(f(k))) = [f(f(f(k+1))) - f(f(f(k+1))) - 1] + [f(f(f(k+1))) - 1] -$$

$$f(f(f(k+1)) - 2) + \dots + [f(f(f(k)) + 1) - f(f(f(k)))] \\ \leq [f(f(k+1)) - f(f(k))]]M = 4M$$

Từ đó các tổng trong ngoặc vuông phải bằng nhau và bằng M. Đặc biệt ta có

$$M = f(f(f(k)) + 1) - f(f(f(k))) = f(4k+10) - f(4k+9) = 2.$$

Chú ý rằng nếu $f(n+1) = f(n) + 1$ thì $f(f(n+1)) = f(f(n)+1)$

Hay $4(n+1) + 9 = 4n + 11$, mâu thuẫn.

Vậy ta phải có $f(n+1) = f(n) + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Như vậy $f(n) = 2n + b$.

Thay biểu thức của $f(n)$ vào $f(f(n)) = 4n + 9$ ta có:

$$2(2n+b) + b = 4n + 9, \text{ do đó } b = 3.$$

Ta thấy $f(n) = 2n + 3$ cũng thỏa mãn hệ thức $f(f(n) + 1) = 4n + 11$.

Vậy hàm số duy nhất cần tìm là $f(n) = 2n + 3$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét : Nếu gọi k là số tự nhiên sao cho $f(k+1) - f(k) = m$ là số nhỏ nhất thì ta cũng dẫn đến kết quả $m = 2$. Bài toán sau đây sử dụng kỹ thuật của **Bài toán 4**. để chứng minh dãy $\{f(n)\}$ là cấp số cộng bằng kết quả $M = m$.

Bài 5. (IMO– 2009) Giả sử $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ là một dãy tăng nghiêm ngặt các số nguyên dương thỏa mãn : Các dãy con $s_{s_1}, s_{s_2}, \dots, s_{s_n}, \dots$ và $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots, s_{s_n+1}, \dots$ là các cấp số cộng.

Chứng minh rằng bản thân dãy $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ cũng là cấp số cộng.

Lời giải

Để dễ xử lý, ta phát biểu bài toán dưới dạng tương đương:

Cho $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hàm tăng thực sự và thỏa mãn : Các dãy $(f(f(n)))$ và $(f(f(n)+1))$ là các cấp số cộng. Chứng minh rằng dãy $(f(n))$ cũng là cấp số cộng.

Từ giả thiết suy ra $f(f(n)) = an + b$ và $f(f(n)+1) = cn + d$

ở đây a, b, c, d là những số nguyên dương.

Ta có $f(f(n)) < f(f(n)+1) \leq f(f(n+1))$

Suy ra $an + b < cn + d \leq a(n+1) + b$

$$\text{Hay } a + \frac{b}{n} < c + \frac{d}{n} \leq a + \frac{a+b}{n}$$

Bằng cách cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $a = c$.

Tóm lại ta có $f(f(n)) = an + b$, $f(f(n)+1) = an + c$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dễ dàng chứng minh được

$$f(f(an + b)) = af(n) + b \text{ và } f(f(an+b+1)) = af(n) + c$$

Ta có $0 < f(n+1) - f(n) \leq a$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gọi r, t lần lượt là các số tự nhiên sao cho

$M = f(r+1) - f(r)$ lớn nhất và $m = f(t+1) - f(t)$ nhỏ nhất.

Với kỹ thuật tương tự như bài 3 ta có:

$$M = f(f(f(r))+1) - f(f(f(r))) = f(ar+b+1) - f(ar+b) = c - b.$$

Và $m = f(f(f(t))+1) - f(f(f(t))) = f(at+b+1) - f(at+b) = c - b$

Từ đó $M = m$. Suy ra $f(n+1) - f(n) = c - b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện
 $f(m+f(n)) = f(m) - n$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện
 $f(m + f(n)) = n + f(m + 2009)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện
 $f(f(m) + f(n) + f(m + n)) = n + m + 4$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

4. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện
i) f tăng thực sự
ii) $f(f(n)) = 9n + 2$ và $f(f(n) + 1) = 9n + 11$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.
