

Chú ý chung:

- Số nào mà bị chia hết cho 3, thì số đó chia hết cho 3, nhưng không chia hết cho 2,5.
- Mọi bài giải của học sinh cần phải có lời giải, nếu không có lời giải thì bài giải không được tính.

Câu 1 (3,5 điểm)

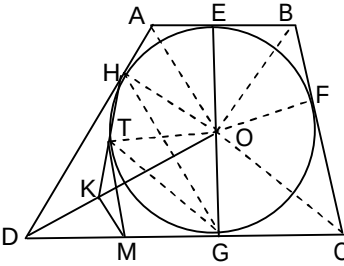
1) (1,50đ)	
Biểu thức cho tính	0,50
$\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}$	0,50
$= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$	0,50
$= \frac{6-3+\sqrt{3}+6-3-\sqrt{3}}{9-3} = 1$	0,50
2) (2,00đ)	
Tổ a = $\sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$ suy ra $a^3 = (\sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}})^3$	0,50
$\Leftrightarrow a^3 = 6 + 3\sqrt[3]{3+\sqrt{17}}\sqrt[3]{3-\sqrt{17}}(\sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}})$	0,50
$\Leftrightarrow a^3 = 6 - 6a$	0,50
$\Leftrightarrow a^3 + 6a - 6 = 0$	0,50
Vậy $f(a) = (a^3 + 6a - 5)^{2010} = (f(x) = (a^3 + 6a - 6 + 1)^{2010} = 1$	0,50

Câu 2 (4,5 điểm)

1) (2,50đ)	
Điều kiện: $(x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$	0,25
Với điều kiện trên hãy cho tính đúng sai của hệ phương trình	0,75
$\begin{cases} (x-\sqrt{y})^2 = x-y & (1) \\ (y-\sqrt{z})^2 = y-z & (2) \\ (z-\sqrt{x})^2 = z-x & (3) \end{cases}$	
Nếu hệ cho cả nghiệm, do vậy từ mỗi phương trình trong hệ đều không có,	
do vậy từ (1); (2) và (3) lần lượt suy ra hệ	0,75
$\begin{cases} x-y \geq 0 \\ y-z \geq 0 \\ z-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq y \geq z \geq x \Rightarrow x = y = z$	
$\Rightarrow \begin{cases} x = y = z \geq 0 \\ x - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = 1 \end{cases}$	0,50
Thử lại hai nghiệm trên vào hệ cho, thấy nghiệm đúng.	0,25
Vậy hệ cho cả 2 nghiệm $x = y = z = 0; x = y = z = 1$	
2) (2,00đ)	
Phương trình cho tính đúng sai của	0,50
$3x^3 - 3x^2 - 3x = 1$	
$\Leftrightarrow 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	0,50
$\Leftrightarrow 4x^3 = (x+1)^3$	0,50

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4}x = x + 1$	0,50
$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{4} - 1)x = 1$	
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$	0,50

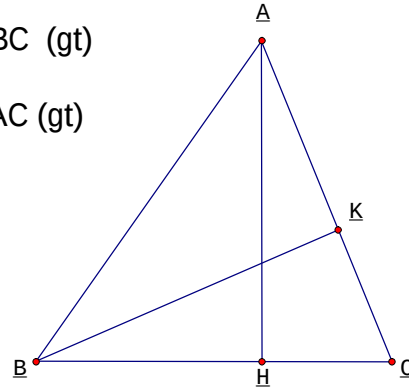
Câu 3 (4,00 điểm)

Số p, n	Điểm
1) (2,00đ) Do $AB//CD \Rightarrow \angle CDA + \angle DAB = 180^\circ$; (O,R) là đường tròn nội tiếp ABCD nên DO và AO theo thứ tự là phân giác của các góc CDA và DAB $\Rightarrow \angle ODA + \angle OAD = \frac{1}{2}(\angle CDA + \angle DAB) = 90^\circ \Rightarrow \angle AOD = 90^\circ$, hay tam giác AOD vuông ở O, từ đó từ tam giác BOC vuông ở O.	0,25
Xét các tam giác OAD và BOC vuông ở O Các đường cao OH và OF cũng bằng R $\Rightarrow$ $HA \cdot HD = FB \cdot FC = R^2$. Mặt khác theo tính chất các tiếp tuyến của (O, R), ta có $HA = EA$; $EB = FB$ $HD = GD$; $FC = GC$. Vậy $EA \cdot GD = EB \cdot GC$ $\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC} = k$ (1)	0,25
	0,25
Ta phải tìm $k > 0$ khi $AB = \frac{4R}{3}$ và $BC = 3R$. Vì $AB//CD$ và AB; CD là các tiếp tuyến của (O, R) $\Rightarrow OE \perp AB$ và $OG \perp CD$ $\Rightarrow E$; O; G thẳng hàng, nên $EG = 2R$ và $EG^2 = BC^2 - (GC - EB)^2$ (2)	0,25
Từ (1) và $\frac{EB}{EB+EA} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow EB = \frac{kAB}{k+1} \Rightarrow EB = \frac{4kR}{3(k+1)}$ (3) $\Rightarrow BF = \frac{4kR}{3(k+1)}$	0,25
$\Rightarrow CF = BC - BF = 3R - \frac{4kR}{3(k+1)} \Rightarrow GC = 3R - \frac{4kR}{3(k+1)}$ (4)	0,25
Thay (4) và (3) vào (2), ta có $4R^2 = 9R^2 - \left[3R - \frac{8kR}{3(k+1)}\right]^2 \Leftrightarrow 5 = \frac{(k+9)^2}{9(k+1)^2}$	0,25
$\Leftrightarrow 11k^2 + 18k - 9 = 0$, giải phương trình bậc hai nghiệm $k > 0$ là $k = \frac{-9+6\sqrt{5}}{11}$	
Vậy $\frac{EB}{EA} = \frac{-9+6\sqrt{5}}{11}$.	0,25
2) (2,00đ)	
Ta có $DH = DG$ (hai tiếp tuyến của (O, R) kẻ từ D) $\Rightarrow \triangle DHG$ cân ở D, mà DO là phân giác góc HDG $\Rightarrow HG \perp DO$, và $MK \perp DO \Rightarrow MK//HG \Rightarrow \angle KMG = \angle HGC$. Mặt khác GC là tiếp tuyến của (O, R) và góc HTG nội tiếp chung HFG của (O, R) $\Rightarrow \angle HTG = \angle HGC \Rightarrow \angle KMG = \angle HTG \Rightarrow$ tứ giác KTGM nội tiếp (5)	0,50
Lại có $\angle OKM = \angle OGM = 90^\circ \Rightarrow$ 4 điểm O; K; G; M thuộc đường tròn đường kính MO (6)	0,50
Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ 5 điểm O; K; G; M; T thuộc đường tròn đường kính MO $\Rightarrow \angle MTO = 90^\circ \Rightarrow OT \perp MT$ mà T thuộc (O, R), nên MT là tiếp tuyến của (O, R)	0,50
MT và MG là 2 tiếp tuyến của (O, R) kẻ từ M $\Rightarrow MT = MG$.	0,50

Câu 4 (4, 00 điểm)

1) (2,00 đ)	
-------------	--

Tõ $R(b+c) = a\sqrt{bc}$ suy ra $\sqrt{bc} = \frac{R(b+c)}{a}$	0,50
Mà $b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức C-Si cả $\frac{R(b+c)}{a} = \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$	1,00
Suy ra $2R \leq a$. Mặt khác, $a \leq 2R$. Vậy $a = 2R$. Do đó tam giác ABC vuông tại A	0,50
2) (2,00 @)	
Tam giác AHC vuông tại H $\Rightarrow AC \geq AH \geq BC$ (gt)	0,50
Tam giác BKC vuông tại K $\Rightarrow BC \geq BK \geq AC$ (gt)	0,50
Suy ra $AC = AH = BC = BK \Rightarrow C \equiv H \equiv K$	0,50
Vậy ABC vuông cân tại C	0,50



Câu 5 (4,0 @iôm)

1) (2,00 @)	
Đặt $M = n^4 + 4^{2k+1}$ + Khi n chẵn ta cả n^4 chia hết cho 2, mặt khác, 4^{2k+1} chia hết cho 2 và $4^{2k+1} > 2$, với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vậy M không là số nguyên tố. + Khi n lẻ: a) Khi $n = 1$ và $k = 0$, ta cả $M = 5$ là số nguyên tố. b) Khi $n \geq 1$ và $k \geq 1$, ta chứng minh M không là số nguyên tố: Ta cả $M = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - (n \cdot 2^{k+1})^2 = (n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1})$ Ta cả $n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1}$ là số nguyên lớn hơn 1 (1) $n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1}$ là số nguyên, mặt khác, $n^2 + 2^{2k+1} \geq 2\sqrt{n^2 \cdot 2^{2k+1}} \geq 2n \cdot 2^k \sqrt{2}$ $n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1} \geq 2n \cdot 2^k \sqrt{2} - n \cdot 2^{k+1} = n \cdot 2^{k+1}(\sqrt{2} - 1) > 1$ (2) Tõ (1) và (2), suy ra M là hợp số. Kết luận: $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố khi và chỉ khi $n=1$ và $k=0$.	0,50
2) (2,00 @)	
Cả $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Tõ giả thiết $a^3 + b^3 = 2$ (*) $\Rightarrow 2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ mà $a^2 - ab + b^2 > 0 \Rightarrow a+b > 0$ (1)	0,25
Đặt $a = x+1$ và $b = y+1 \Rightarrow 2 = (x+1)^3 + (y+1)^3$ $\Rightarrow x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 3(x+y) = 0$ mà $3(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + 3(x+y) \leq 0$ $\Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 + 3) \leq 0$ mà $x^2 - xy + y^2 + 3 > 0 \Rightarrow x+y \leq 0$ $\Rightarrow a+b-2 \leq 0 \Rightarrow a+b \leq 2$ (2)	0,75
Tõ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < a+b \leq 2$, nên giả sử nguyên của $a+b$ chỉ có thể là 1 hoặc 2	0,25
+ Chắn $a=1$ và $b=1$, thoả mãn điều kiện (*), khi đó $a+b=2$	0,25
+ Số $a+b=1$, ta sẽ chứng tỏ: cả a và b thoả mãn	
$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^2-ab+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-1/3 \end{cases} \quad (I).$ (a; b) là nghiệm của (I) khi và chỉ khi a và b là nghiệm phương trình $t^2 - t - \frac{1}{3} = 0$, phương trình này luôn cả nghiệm $\Rightarrow$ Điều cần chứng minh.	0,25
Kết luận: $a+b$ chỉ hai giá trị, nguyên là 1 và 2.	0,25