GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN LỚP 9 THCS – TỈNH BÌNH ĐỊNH
NĂM HỌC 2008 – 2009

Bài 1.

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$ (1)

Biến đổi:

(1) $2n^3 - 3n^2 + 14n - 5 - m(n^2 + 7) = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 14n - 5}{n^2 + 7} = 2n - 3 + \dfrac{16}{n^2 + 7}$

Vì $m, n \in Z$, nên $(n^2 + 7) \in Ư(16)$, suy ra $(n^2 + 7) \in \{8; 16\}$, do đó $n^2 \in \{1; 9\}$.

+) Nếu $n^2 = 1$ thì $n = \pm 1$

+) Nếu $n^2 = 9$ thì $n = \pm 3$

+ Với n = 1, ta có m = 1

+ Với n = -1, ta có m = -3

+ Với n = 3, ta có m = 4

+ Với n = -3, ta có m = -8.

Vậy ta tìm được 4 cặp giá trị $(m, n) \in \{(1; 1), (-3; -1), (4; 3), (-8; -3)\}$.

Bài 2.

Cho x, y, z khác 0 thỏa $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$.

Chứng minh $\dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2} = 3$

Trước hết ta chứng minh hằng đẳng thức:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \dfrac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

Ta có:

$(a^3 + b^3) + c^3 - 3abc = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b) - 3abc$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \dfrac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ khi và chỉ khi: $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$, theo giả thiết $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ nên suy ra $a + b + c = 0$

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,

hoặc $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{3}{xyz}$

Nhân 2 vế của đẳng thức trên cho xyz, ta được $\dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2} = 3$ (đpcm).

Bài 3.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=7\\ \sqrt{x-20}+\sqrt{y+3}=6\end{cases}$$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là: $x \ge 20$, $y \ge 0$.

Đặt $a = \sqrt{x-20}$, $b=\sqrt{y+3}$ ($a \ge 0$, $b \ge 0$), suy ra $x = a^2 + 20$, $y = b^2 - 3$.

Hệ phương trình viết lại:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+20}+\sqrt{b^2-3}=7\,(1)\\ a+b=6\,(2)\end{cases}$$

Trong đó, $0 \le a \le 6$, $b \ge \sqrt{\ }$

Bình phương hai vế của (1) ta có:

$$a^2 + 20 + b^2 - 3 + 2\sqrt{\left(a^2+20\right)\left(b^2-3\right)} = 49\ (3)$$

Thay $b = 6 - a$ vào (3), ta có:

$$a^2 + 20 + (6 - a)^2 - 3 + 2\sqrt{\left(a^2+20\right)\left[(6-a)^2-3\right]} = 49$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 20 + 36 - 12a + a^2 - 3 + 2\sqrt{\left(a^2+20\right)\left(a^2-12a+33\right)} = 49$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a^2+20\right)\left(a^2-12a+33\right)} = -a^2 + 6a - 2\ (4)$$

Bình phương hai vế của (4) với $(a - 3)^2 \le 7$, ta có:

$(a^2 + 20)(a^2 - 12a + 33) = (-a^2 + 6a - 2)^2$

$\Leftrightarrow a^4 - 12a^3 + 53a^2 - 240a + 660 = a^4 + 36a^2 + 4 - 12a^3 + 4a^2 - 24a$

$\Leftrightarrow 13a^2 - 216a + 656 = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 4$: chọn, $a_2 = \dfrac{164}{13} > 6$: loại

Với $a = 4$, ta có $b = 2$.

Thế lại ẩn cũ:

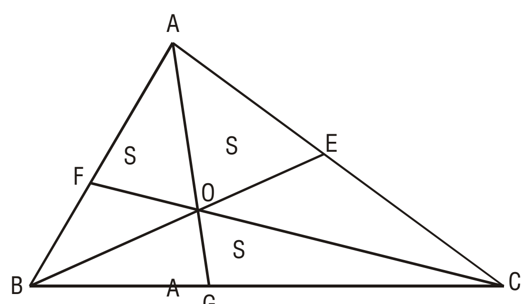
$a = 4 \Rightarrow \sqrt{x-20} = 4 \Leftrightarrow x = 36$

$b = 2 \Rightarrow \sqrt{y+3} = 2 \Leftrightarrow y = 1$

Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm:
$x = 36$, $y = 1$.

Bài 4.

Chứng minh: $\dfrac{OA}{AG}+\dfrac{OB}{BE}+\dfrac{OC}{CF} = 2$



Đặt $S_{OAB} = S_1$, $S_{OAC} = S_2$, $S_{OBC} = S_3$

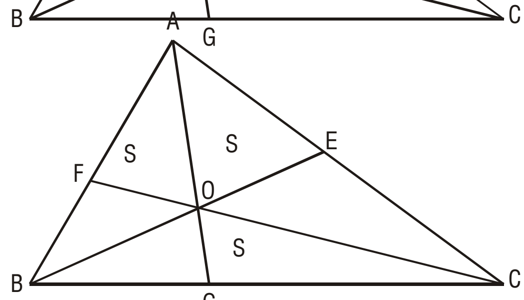
Ta có:

$$\frac{OA}{AG}=\frac{S_1}{S_{ABG}}=\frac{S_2}{S_{ACG}}=\frac{S_1+S_2}{S_{ABG}+S_{ACG}}=\frac{S_1+S_2}{S_{ABC}}\ (1)$$

Lập luận tương tự, ta có:

$$\frac{OB}{BE}=\frac{S_1+S_3}{S_{ABC}}\ (2)$$

$$\frac{OC}{CF}=\frac{S_2+S_3}{S_{ABC}}\ (3)$$



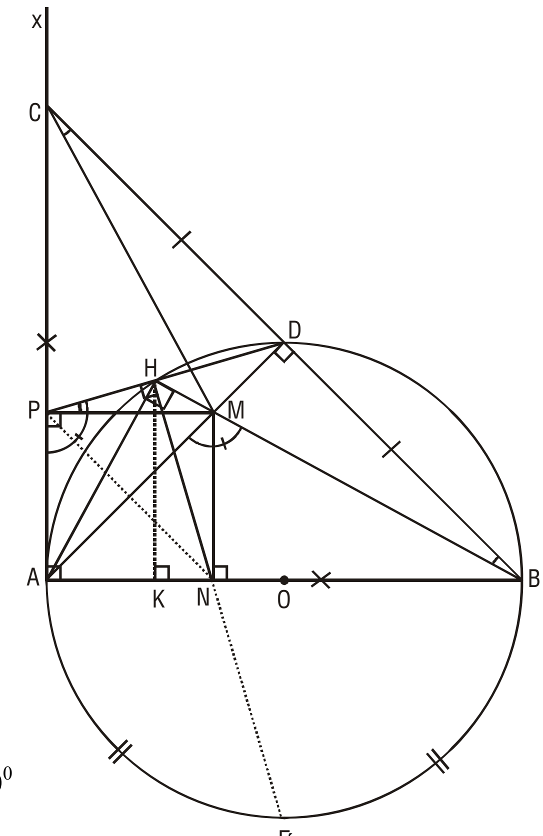
Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{OA}{AG}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=\frac{2(S_1+S_2+S_3)}{S_{ABC}}=\frac{2S_{ABC}}{S_{ABC}}=2\,.$$

Bài 5.

a) Vị trí của M để diện tích tam giác AHB lớn nhất

Ta có $\widehat{PAN}+\widehat{PHN} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác APHN nội tiếp (1)



Tứ giác APMN là hình vuông nên nội tiếp (2)
Từ (1), (2) ta có 5 điểm A, N, M, P, H cùng thuộc một đường tròn.

Do đó $\widehat{AHM}=\widehat{APM} = 90^0$

Mặt khác tứ giác MPCD nội tiếp nên

$\widehat{MPD}=\widehat{MCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

Tam giác ABC vuông cân tại A có AD vừa là đường cao vừa là đường trung trực, vừa là đường phân giác nên:

MB = MC $\Rightarrow$ ΔMBC cân tại M

$\Rightarrow$ $\widehat{MCD}=\widehat{MBD}$, do đó $\widehat{MPD}=\widehat{MBD}$ (3)

Ta lại có $\widehat{AMB}$ là góc ngoài ΔMBD tại M nên:

$\widehat{AMB}=\widehat{MBD}+\widehat{MDB}=\widehat{MBD}+90^0$ (4)

$\widehat{APH}=\widehat{APM}+\widehat{MPH}=90^0+\widehat{MPD}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra: $\widehat{APH}=\widehat{AMB}$ (6)

Vì tứ giác APHM nội tiếp nên:

$\widehat{APH}+\widehat{AMH} = 180^0$ (7)

Từ (6), (7) suy ra:

$\widehat{AMB}+\widehat{AMH} = 180^0$

Do đó ba điểm H, M, B thẳng hàng, nên $\widehat{AHB} = 90^0$

Vậy H thuộc đường tròn (O).

Suy ra tam giác AHB có diện tích lớn nhất khi độ dài đường cao HK lớn nhất

$\Rightarrow$ HK = R $\Rightarrow$ H $\equiv$ D $\Rightarrow$ M $\equiv$ D.

Vậy khi M ≡ D thì S_{AHB} đạt giá trị lớn nhất là R^2 (R là bán kính đường tròn (O)).

b) Chứng minh HN luôn đi qua một điểm cố định

Gọi E là giao điểm thứ hai của HN với đường tròn (O).

Ta có $\widehat{AHN}=\widehat{APN} = 45^0$. Vì $\widehat{AHB} = 90^0$, suy ra $\widehat{NHB} = 45^0$.

Do đó HN là tia phân giác của góc $\widehat{AHB}$, suy ra E là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$, nên điểm E cố định.

Vậy khi M di động trên đoạn thẳng AD thì HN luôn đi qua điểm E cố định là điểm chính giữa của cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O).

Bài 6.

Chứng minh:

$$17<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<18$$

Ta chứng minh bài toán tổng quát:

$$2\sqrt{n}-3<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2 \ \ (n\in N,\, n\geq 2)$$

Ta có:

*) $\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\ (1)$

Cho k lấy các giá trị từ 2 đến 100, thay vào bất đẳng thức (1), ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}<2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{\sqrt{99}}<2\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)\\ \dfrac{1}{\sqrt{100}}<2\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)\end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)=2\left(\sqrt{100}-\sqrt{1}\right)=18$$

*) $\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

Lập luận tương tự như trên, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}>2\left(\sqrt{101}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{101}-2\sqrt{2}>2\sqrt{100}-3=17$$

Vậy $17<\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}<18$

Quy Nhơn, ngày 16 tháng 04 năm 2009
Người gửi: BÙI VĂN CHI
Giáo viên Trường THCS LÊ LỢI
Tp. Quy Nhơn, Tỉnh Bình Định
ĐT: 056828529
E-mail: buivanchi@yahoo.com