PHẦN I: CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC

1. Tính giá trị của biểu thức:

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = x^{15} - 2x^{12} + 4x^7 - 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 1$

Tính P(1,25); P(4,327); P(-5,1289); $P(1\frac{3}{4})$

H.Dẫn:

- Lập công thức P(x)
- Tính giá trị của đa thức tại các điểm: dùng chức năng $\boxed{\text{CALC}}$
- Kết quả: P(1,25) = ; P(4,327) =

P(-5,1289) = ; $P(1\frac{3}{4})$ =

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^8 + x^9$ tại x = 0,53241

$Q(x) = x^2 + x^3 + ... + x^8 + x^9 + x^{10}$ tại x = -2,1345

H.Dẫn:

- Áp dụng hằng đẳng thức: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Ta có:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^8 + x^9 = \frac{(x-1)(1+x+x^2+...+x^9)}{x-1} = \frac{x^{10}-1}{x-1}$$

Từ đó tính P(0,53241) =

Tương tự:

$$Q(x) = x^2 + x^3 + ... + x^8 + x^9 + x^{10} = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^8) = x^2\frac{x^9-1}{x-1}$$

Từ đó tính Q(-2,1345) =

Bài 3: Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25. Tính P(6); P(7); P(8); P(9) = ?

H.Dẫn:

Bước 1: Đặt **Q(x) = P(x) + H(x)** sao cho:

+ Bậc H(x) nhỏ hơn bậc của P(x)

+ Bậc của H(x) nhỏ hơn số giá trị đã biết của P(x), trongbài bậc H(x) nhỏ hơn 5, nghĩa là:

$Q(x) = P(x) + a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e$

Bước 2: Tìm a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 để Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = Q(5) = 0, tức là:

$$\begin{cases} a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+1=0 \\ 16a_1+8b_1+4c_1+2d_1+e_1+4=0 \\ 81a_1+27b_1+9c_1+3d_1+e_1+9=0 \\ 256a_1+64b_1+16c_1+4d_1+e_1+16=0 \\ 625a_1+125b_1+25c_1+5d_1+e_1+25=0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = b_1 = d_1 = e_1 = 0;\ c_1 = -1$$

Vậy ta có: **Q(x) = P(x) - $\mathbf{x^2}$**

Vì x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5 là nghiệm của Q(x), mà bậc của Q(x) bằng 5 có hệ số của x^5 bằng 1 nên: Q(x) = P(x) - x^2 = (x -1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)

$\Rightarrow$ P(x) = (x -1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x^2.

Từ đó tính được: P(6) = ; P(7) = ; P(8) = ; P(9) =

Bài 4: Cho đa thức P(x) = $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết P(1) = 5; P(2) = 7; P(3) = 9; P(4) = 11. Tính P(5); P(6); P(7); P(8); P(9) = ?

H.Dẫn:

- Giải tương tự bài 3, ta có: P(x) = (x -1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + (2x + 3). Từ đó tính được: P(5) = ; P(6) = ; P(7) = ; P(8) = ; P(9) =

Bài 5: Cho đa thức P(x) = $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết P(1) = 1; P(2) = 3; P(3) = 6; P(4) = 10.

Tính $A = \dfrac{P(5) - 2P(6)}{P(7)} = ?$

H.Dẫn:

- Giải tương tự bài 4, ta có: P(x) = (x -1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + $\dfrac{x(x+1)}{2}$. Từ đó tính được:

$$A = \frac{P(5) - 2P(6)}{P(7)} =$$

Bài 6: Cho đa thức f(x) bậc 3 với hệ số của x^3 là k, k $\in$ Z thoả mãn:

f(1999) = 2000; f(2000) = 2001

Chứng minh rằng: f(2001) - f(1998) là hợp số.

H.Dẫn:

* Tìm đa thức phụ: đặt g(x) = f(x) + (ax + b). Tìm a, b để g(1999) = g(2000) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1999a + b + 2000 = 0 \\ 2000a + b + 2001 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{g(x) = f(x) - x - 1}$$

* Tính giá trị của f(x):

- Do bậc của f(x) là 3 nên bậc của g(x) là 3 và g(x) chia hết cho:

(x - 1999), (x - 2000) nên: g(x) = k(x - 1999)(x - 2000)(x - x_0)

$\Rightarrow$ f(x) = k(x - 1999)(x - 2000)(x - x_0) + x + 1.

Từ đó tính được: f(2001) - f(1998) = 3(2k + 1) là hợp số.

Bài 7: Cho đa thức f(x) bậc 4, hệ số của bậc cao nhất là 1 và thoả mãn:

f(1) = 3; P(3) = 11; f(5) = 27. Tính giá trị A = f(-2) + 7f(6) = ?

H.Dẫn:

- Đặt g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c. Tìm a, b, c sao cho g(1) = g(3) = g(5) = 0 $\Rightarrow$ a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c+3=0 \\ 9a+3b+c+11=0 \\ 25a+5b+c+27=0 \end{cases} \Rightarrow \text{bằng MTBT ta giải được: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g(x) = f(x) - x^2 - 2

- Vì f(x) bậc 4 nên g(x) cũng có bậc là 4 và g(x) chia hết cho (x - 1), (x - 3), (x - 5), do vậy: g(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - x_0) $\Rightarrow$ f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - x_0) + x^2 + 2.

Ta tính được: A = f(-2) + 7f(6) =

Bài 8: Cho đa thức f(x) bậc 3. Biết f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = 4; f(3) = 1.

Tìm f(10) = ? *(Đề thi HSG CHDC Đức)*

H.Dẫn:

- Giả sử f(x) có dạng: f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. Vì f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = 4; f(3) = 1 nên:

$$\begin{cases} d = 10 \\ a+b+c+d = 12 \\ 8a+4b+2c+d = 4 \\ 27a+9b+3c+d = 1 \end{cases}$$

lấy 3 phương trình cuối lần lượt trừ cho phương trình đầu và giải hệ gồm 3 phương trình ẩn a, b, c trên MTBT cho ta kết quả: $a = \frac{5}{2}; b = -\frac{25}{2}; c = 12; d = 10$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10 \Rightarrow f(10) =$$

Bài 9: Cho đa thức f(x) bậc 3 biết rằng khi chia f(x) cho (x - 1), (x - 2), (x - 3) đều được dư là 6 và f(-1) = -18. Tính f(2005) = ?

H.Dẫn:

- Từ giả thiết, ta có: f(1) = f(2) = f(3) = 6 và có f(-1) = -18

- Giải tương tự như bài 8, ta có f(x) = x^3 - $6x^2$ + 11x

Từ đó tính được f(2005) =

Bài 10: Cho đa thức $P(x)=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$

a) Tính giá trị của đa thức khi x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4.

b) Chứng minh rằng P(x) nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên

Giải:

a) Khi x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 thì (tính trên máy) P(x) = 0

b) Do 630 = 2.5.7.9 và x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 là nghiệm của đa thức P(x) nên

$$P(x)=\frac{1}{2.5.7.9}(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3(x+4)$$

Vì giữa 9 số nguyên liên tiếp luôn tìm được các số chia hết cho 2, 5, 7, 9 nên với mọi x nguyên thì tích: $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3(x+4)$ chia hết cho 2.5.7.9 (tích của các số nguyên tố cùng nhau). Chứng tỏ P(x) là số nguyên với mọi x nguyên.

Bài 11: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Hãy tính các tổng sau:

$a)\quad S_1=f\left(\frac{1}{2002}\right)+f\left(\frac{2}{2002}\right)+...+f\left(\frac{2001}{2002}\right)$

$b)\quad S_2=f\left(\sin^2\frac{\pi}{2002}\right)+f\left(\sin^2\frac{2\pi}{2002}\right)+...+f\left(\sin^2\frac{2001\pi}{2002}\right)$

H.Dẫn:

* Với hàm số f(x) đã cho trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu a + b = 1 thì f(a) + f(b) = 1

* Áp dụng bổ đề trên, ta có:

a) $S_1=\left[f\left(\frac{1}{2002}\right)+f\left(\frac{2001}{2002}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{1000}{2002}\right)+f\left(\frac{1002}{2002}\right)\right]+f\left(\frac{1001}{2002}\right)$

$$=1+...+1+\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=1000+\frac{1}{2}=1000,5$$

b) Ta có $\sin^2\frac{\pi}{2002}=\sin^2\frac{2001\pi}{2002},...,\sin^2\frac{1000\pi}{2002}=\sin^2\frac{1002\pi}{2002}$. Do đó:

$$S_2=2\left[f\left(\sin^2\frac{\pi}{2002}\right)+f\left(\sin^2\frac{2\pi}{2002}\right)+...+f\left(\sin^2\frac{1000\pi}{2002}\right)\right]+f\left(\sin^2\frac{1001\pi}{2002}\right)$$

$$=2\left[\left(f\left(\sin^2\frac{\pi}{2002}\right)+f\left(\sin^2\frac{1000\pi}{2002}\right)\right)+...+\left(f\left(\sin^2\frac{500\pi}{2002}\right)+f\left(\sin^2\frac{501\pi}{2002}\right)\right)\right]+f\left(\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\left[\left(f\left(\sin^2\frac{\pi}{2002}\right)+f\left(\cos^2\frac{\pi}{2002}\right)\right)+...+\left(f\left(\sin^2\frac{500\pi}{2002}\right)+f\left(\cos^2\frac{500\pi}{2002}\right)\right)\right]+f(1)$$

$$=2\left[1+1+...+1\right]+\frac{4}{6}=1000+\frac{2}{3}=1000\frac{2}{3}$$

2. Tìm thương và dư trong phép chia hai đa thức:

***<u>Bài toán 1</u>**: Tìm dư trong phép chia đa thức P(x) cho (ax + b)*

Cách giải:

- Ta phân tích: P(x) = (ax + b)Q(x) + r $\Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.Q\left(-\frac{b}{a}\right) + r \Rightarrow$ r = $P\left(\frac{-b}{a}\right)$

Bài 12: Tìm dư trong phép chia P(x) = $3x^3 - 5x^2 + 4x - 6$ cho (2x - 5)

Giải:

- Ta có: P(x) = (2x - 5).Q(x) + r $\Rightarrow P\left(\frac{5}{2}\right) = 0.Q\left(\frac{5}{2}\right) + r \Rightarrow r = P\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ r = $P\left(\frac{5}{2}\right)$

Tính trên máy ta được: r = $P\left(\frac{5}{2}\right)$ =

***<u>Bài toán 2</u>**: Tìm thương và dư trong phép chia đa thức P(x) cho (x + a)*

Cách giải:

- Dùng lược đồ Hoocner để tìm thương và dư trong phép chia đa thức P(x) cho (x + a)

Bài 13: Tìm thương và dư trong phép chia P(x) = $x^7 - 2x^5 - 3x^4 + x - 1$ cho (x + 5)

H.Dẫn: - Sử dụng lược đồ Hoocner, ta có:

	1	0	-2	-3	0	0	1	-1
-5	1	-5	23	-118	590	-2950	14751	-73756

* Tính trên máy tính các giá trị trên như sau:

$\boxed{(-)}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{M}}$

1 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{+}$ 0 $\boxed{=}$ (-5) : ghi ra giấy -5

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$ (23) : ghi ra giấy 23

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{-}$ 3 $\boxed{=}$ (-118) : ghi ra giấy -118

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{+}$ 0 $\boxed{=}$ (590) : ghi ra giấy 590

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{+}$ 0 $\boxed{=}$ (-2950) : ghi ra giấy -2950

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ (14751) : ghi ra giấy 14751

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ (-73756) : ghi ra giấy -73756

$x^7 - 2x^5 - 3x^4 + x - 1 = (x + 5)(x^6 - 5x^5 + 23x^4 - 118x^3 + 590x^2 - 2950x + 14751) - 73756$

***<u>Bài toán 3</u>**: Tìm thương và dư trong phép chia đa thức P(x) cho (ax +b)*

Cách giải:

- Để tìm dư: ta giải như bài toán 1
- Để tìm hệ số của đa thức thương: dùng lược đồ Hoocner để tìm thương trong phép chia đa thức P(x) cho (x + $\frac{b}{a}$) sau đó nhân vào thương đó với $\frac{1}{a}$ ta được đa thức thương cần tìm.

Bài 14: Tìm thương và dư trong phép chia P(x) = $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ cho (2x - 1)

Giải:

- Thực hiện phép chia P(x) cho $\left(x-\frac{1}{2}\right)$, ta được:

P(x) = $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{8}$. Từ đó ta phân tích:

P(x) = $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 2.\left(x-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{8}$

$= (2x - 1).\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{8}$

Bài 15: Tìm các giá trị của m để đa thức P(x) = $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 + m$ chia hết cho Q(x) = 3x +2

H.Dẫn:

- Phân tích P(x) = $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) + m = P_1(x) + m$. Khi đó:

P(x) chia hết cho Q(x) = 3x + 2 khi và chỉ khi: $P_1(x) + m = (3x + 2).H(x)$

Ta có: $P_1\left(-\frac{2}{3}\right)+m=0 \Rightarrow m=-P_1\left(-\frac{2}{3}\right)$

Tính trên máy giá trị của đa thức $P_1(x)$ tại $x=-\frac{2}{3}$ ta được m =

Bài 16: Cho hai đa thức P(x) = $3x^2 - 4x + 5 + m$; Q(x) = $x^3 + 3x^2 - 5x + 7 + n$. Tìm m, n để hai đa thức trên có nghiệm chung $x_0=\frac{1}{2}$

H.Dẫn:

$x_0=\frac{1}{2}$ là nghiệm của P(x) thì m = $-P_1\left(\frac{1}{2}\right)$, với $P_1(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$x_0=\frac{1}{2}$ là nghiệm của Q(x) thì n = $-Q_1\left(\frac{1}{2}\right)$, với $Q_1(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$.

Tính trên máy ta được: m = $-P_1\left(\frac{1}{2}\right)$ = ;n = $-Q_1\left(\frac{1}{2}\right)$ =

Bài 17: Cho hai đa thức $P(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x + m$; $Q(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + n$.

a) Tìm m, n để P(x), Q(x) chia hết cho (x - 2)

b) Xét đa thức R(x) = P(x) - Q(x). Với giá trị m, n vừa tìm chứng tỏ rằng đa thức R(x) chỉ có duy nhất một nghiệm.

H.Dẫn:

a) Giải tương tự bài 16, ta có: m = ;n =

b) $P(x) \vdots (x - 2)$ và $Q(x) \vdots (x - 2) \Rightarrow R(x) \vdots (x - 2)$

Ta lại có: $R(x) = x^3 - x^2 + x - 6 = (x - 2)(x^2 + x + 3)$, vì $x^2 + x + 3 > 0$ với mọi x nên R(x) chỉ có một nghiệm x = 2.

Bài 18: Chia x^8 cho x + 0,5 được thương $q_1(x)$ dư r_1. Chia $q_1(x)$ cho x + 0,5 được thương $q_2(x)$ dư r_2. Tìm r_2 ?

H.Dẫn:

- Ta phân tích: $x^8 = (x + 0,5).q_1(x) + r_1$

$q_1(x) = (x + 0,5).q_2(x) + r_2$

- Dùng lược đồ Hoocner, ta tính được hệ số của các đa thức $q_1(x)$, $q_2(x)$ và các số dư r_1, r_2:

	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{7}{64}$	$-\frac{1}{16}$	

Vậy: $r_2 = -\frac{1}{16}$

PHẦN II: CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

Máy tính điện tử *Casio fx - 570 MS* có nhiều đặc điểm ưu việt hơn các MTBT khác. Sử dụng MTĐT *Casio fx - 570 MS* lập trình tính các số hạng của một dãy số là một ví dụ. Nếu biết cách sử dụng đúng, hợp lý một quy trình bấm phím sẽ cho kết quả nhanh, chính xác. Ngoài việc MTBT giúp cho việc giảm đáng kể thời gian tính toán trong một giờ học mà từ kết quả tính toán đó ta có thể dự đoán, ước đoán về các tính chất của dãy số (tính đơn điệu, bị chặn...), dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số, tính hội tụ, giới hạn của dãy...từ đó giúp cho việc phát hiện, tìm kiếm cách giải bài toán một cách sáng tạo. Việc biết cách lập ra quy trình để tính các số hạng của dãy số còn hình thành cho học sinh những kỹ năng, tư duy thuật toán rất gần với lập trình trong tin học.

Sau đây là một số quy trình tính số hạng của một số dạng dãy số thường gặp trong chương trình, trong ngoại khoá và thi giải Toán bằng MTBT:

I/ Lập quy trình tính số hạng của dãy số:

1) Dãy số cho bởi công thức số hạng tổng quát:

$\boxed{u_n = f(n),\ n \in N^*}$ trong đó f(n) là biểu thức của n cho trước.

Cách lập quy trình:

- Ghi giá trị n = 1 vào ô nhớ $\boxed{A}$: 1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$

- Lập công thức tính f(A) và gán giá trị ô nhớ $\boxed{:}$ $\boxed{A}$ $\boxed{=}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ 1

- Lặp dấu bằng: $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

Giải thích:

1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$: ghi giá trị n = 1 vào ô nhớ $\boxed{A}$

$\boxed{f(A)}$ $\boxed{:}$ $\boxed{A}$ $\boxed{=}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ 1 : tính $u_n = f(n)$ tại giá trị $\boxed{A}$ (khi bấm dấu bằng thứ lần nhất) và thực hiện gán giá trị ô nhớ $\boxed{A}$ thêm 1 đơn vị: $\boxed{A}$ $\boxed{=}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ 1 (khi bấm dấu bằng lần thứ hai).

* Công thức được lặp lại mỗi khi ấn dấu $\boxed{=}$

Ví du 1: Tính 10 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad ; \quad n = 1,2,3...$$

Giải:

- *Ta lập quy trình tính u_n như sau:*

1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{(}$ 1 $\boxed{\div}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{-}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$

- *Lặp lại phím*: $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

Ta được kết quả: $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21,$
$u_9 = 34, u_{10} = 55.$

2) Dãy số cho bởi hệ thức truy hồi dạng:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; n \in N^* \end{cases}$$

trong đó $f(u_n)$ là biểu thức của u_n cho trước.

Cách lập quy trình:

- *Nhập giá trị của số hạng u_1*: a $\boxed{=}$

- *Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$* : (trong biểu thức của u_{n+1} chỗ nào có u_n ta nhập bằng $\boxed{\text{ANS}}$)

- *Lặp dấu bằng*: $\boxed{=}$

Giải thích:

- Khi bấm: a $\boxed{=}$ màn hình hiện $u_1 = a$ và lưu kết quả này

- Khi nhập biểu thức $f(u_n)$ bởi phím $\boxed{\text{ANS}}$, bấm dấu $\boxed{=}$ lần thứ nhất máy sẽ thực hiện tính $u_2 = f(u_1)$ và lại lưu kết quả này.

- Tiếp tục bấm dấu $\boxed{=}$ ta lần lượt được các số hạng của dãy số u_3, u_4...

Ví du 1: Tìm 20 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}, n \in N^* \end{cases}$$

Giải:

- Lập quy trình bấm phím tính các số hạng của dãy số như sau:

1 $\boxed{=}$ *(u_1)*

$\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ *(u_2)*

$\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$

- Ta được các giá trị gần đúng với 9 chữ số thập phân sau dấu phảy:

$u_1 = 1$	$u_8 = 1,414215686$
$u_2 = 1,5$	$u_9 = 1,414213198$
$u_3 = 1,4$	$u_{10} = 1,414213625$
$u_4 = 1,416666667$	$u_{11} = 1,414213552$
$u_5 = 1,413793103$	$u_{12} = 1,414213564$
$u_6 = 1,414285714$	$u_{13} = 1,414213562$
$u_7 = 1,414201183$	$u_{14} = ... = u_{20} = 1,414213562$

Ví du 2: Cho dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{3} \\ u_{n+1} = (u_n)^{\sqrt[3]{3}}, n \in N^* \end{cases}$$

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để u_n là số nguyên.

Giải:

- Lập quy trình bấm phím tính các số hạng của dãy số như sau:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 3 $\boxed{=}$ *(u_1)*

$\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 3 $\boxed{=}$ *(u_2)*

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ *($u_4 = 3$)*

Vậy n = 4 là số tự nhiên nhỏ nhất để $u_4 = 3$ là số nguyên.

3) Dãy số cho bởi hệ thức truy hồi dạng:

$$\boxed{\begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b \\ u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n + C\ ;\ n \in N^* \end{cases}}$$

Cách lập quy trình:

* **<u>Cách 1</u>**:

Bấm phím: b $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ B $\boxed{\times}$ a $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

Và lặp lại dãy phím:

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

<u>Giải thích</u>: Sau khi thực hiện

b $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ B $\boxed{\times}$ a $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

trong ô nhớ $\boxed{\text{A}}$ là $u_2 = b$, máy tính tổng $u_3 := Ab + Ba + C = Au_2 + Bu_1 + C$ và đẩy vào trong ô nhớ $\boxed{\text{B}}$, trên màn hình là: $u_3 : = Au_2 + Bu_1 + C$

Sau khi thực hiện: $\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ máy tính tổng $u_4 := Au_3 + Bu_2 + C$ và đưa vào ô nhớ $\boxed{\text{A}}$. Như vậy khi đó ta có u_4 trên màn hình và trong ô nhớ $\boxed{\text{A}}$ (trong ô nhớ $\boxed{\text{B}}$ vẫn là u_3).

Sau khi thực hiện: $\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$ máy tính tổng $u_5 := Au_4 + Bu_3 + C$ và đưa vào ô nhớ $\boxed{\text{B}}$. Như vậy khi đó ta có u_5 trên màn hình và trong ô nhớ $\boxed{\text{B}}$ (trong ô nhớ $\boxed{\text{A}}$ vẫn là u_4).

Tiếp tục vòng lặp ta được dãy số $u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n + C$

****<u>Nhân xét</u>:*** Trong cách lập quy trình trên, ta có thể sử dụng chức năng $\boxed{\text{COPY}}$ để lập lại dãy lặp bởi quy trình sau (giảm được 10 lần bấm phím mỗi khi tìm một số hạng của dãy số), thực hiện quy trình sau:

Bấm phím: b $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ B $\boxed{\times}$ a $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{+}$ C $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{\Delta}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{COPY}}$

Lặp dấu bằng: $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

* **<u>Cách 2</u>**: Sử dụng cách lập công thức

Bấm phím: a $\boxed{\text{SHIFT}}$

$\boxed{A}$ b $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

$\boxed{ANPHA}$ $\boxed{C}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{=}$ A $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{+}$ B $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ C

$\boxed{ANPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$

$\boxed{ANPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{C}$

Lặp dấu bằng: $\boxed{=}$ ...$\boxed{=}$ ...

Ví du : Cho dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n + 5\ ;\ n \in N^* \end{cases}$$

Hãy lập quy trình tính u_n.

Giải:

- Thực hiện quy trình:

2 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{\times}$ 1 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

$\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$

$\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

$\boxed{\Delta}$ $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{COPY}$

$\boxed{=}$ ...$\boxed{=}$ ...

ta được dãy: 15, 58, 239, 954, 3823, 15290, 61167, 244666, 978671...

Hoặc có thể thực hiện quy trình:

1 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$ 2 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

$\boxed{ANPHA}$ $\boxed{C}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{=}$ 3 $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ 5

$\boxed{ANPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$

$\boxed{ANPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ANPHA}$ $\boxed{C}$

$\boxed{=}$ ...$\boxed{=}$ ...

ta cũng được kết quả như trên.

4) Dãy số cho bởi hệ thức truy hồi với hệ số biến thiên dạng:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f\left(\{n, u_n\}\right) ;\ n \in N^* \end{cases}$$

Trong đó $f\left(\{n, u_n\}\right)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n.

**** Thuật toán để lập quy trình tính số hạng của dãy:***

- Sử dụng 3 ô nhớ: $\boxed{A}$ *: chứa giá trị của n*

$\boxed{B}$ *: chứa giá trị của* u_n

$\boxed{C}$ *: chứa giá trị của* u_{n+1}

- Lập công thức tính u_{n+1} *thực hiện gán* $\boxed{A}$ *: =* $\boxed{A}$ *+ 1 và* $\boxed{B}$ *:=* $\boxed{C}$ *để tính số hạng tiếp theo của dãy*

- Lặp phím : $\boxed{=}$

<u>Ví du</u> : Cho dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\left(u_n + 1\right) ;\ n \in N^* \end{cases}$$

Hãy lập quy trình tính u_n.

<u>Giải:</u>

- Thực hiện quy trình:

1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{)}$

$\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{C}}$

$\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

ta được dãy: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$,...

II/ Sử dụng MTBT trong việc giải một số dạng toán về dãy số:

1). Lập công thức số hạng tổng quát:

Phương pháp giải:

- Lập quy trình trên MTBT để tính một số số hạng của dãy số

- Tìm quy luật cho dãy số, dự đoán công thức số hạng tổng quát

- Chứng minh công thức tìm được bằng quy nạp

Ví du 1: Tìm a_{2004} biết:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n+1)\ ; \quad n \in N^* \end{cases}$$

Giải:

- Trước hết ta tính một số số hạng đầu của dãy (a_n), quy trình sau:

1 SHIFT STO A 0 SHIFT STO B

ANPHA C ANPHA = ANPHA A (ANPHA A + 1)

÷ ((ANPHA A + 2) (ANPHA A + 3)) ×

(ANPHA B + 1) ANPHA : ANPHA A ANPHA =

ANPHA A + 1 ANPHA : ANPHA B ANPHA = ANPHA C

- Ta được dãy: $\dfrac{1}{6}, \dfrac{7}{20}, \dfrac{27}{50}, \dfrac{11}{15}, \dfrac{13}{14}, \dfrac{9}{8}, \ldots$

- Từ đó phân tích các số hạng để tìm quy luật cho dãy trên:

$a_1 = 0$

$a_2 = \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1.5}{3.10}$

$a_3 = \dfrac{7}{20} = \dfrac{2.7}{40} = \dfrac{2.7}{4.10}$

$a_4 = \dfrac{27}{50} = \dfrac{3.9}{5.10}$

...

$\Rightarrow$ dự đoán công thức số hạng tổng quát:

$$\boxed{a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}} \quad (1)$$

* Dễ dàng chứng minh công thức (1) đúng với mọi $n \in N^*$ bằng quy nạp.

$$\Rightarrow a_{2004} = \frac{2003.4009}{20050}$$

Ví du 2: Xét dãy số: $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_n - a_n + 1; \quad n \in N^* \end{cases}$

Chứng minh rằng số A = $4a_n.a_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Giải:

- Tính một số số hạng đầu của dãy (a_n) bằng quy trình:

3 [SHIFT] [STO] [A] [×] 2 [-] 1 [+] 1 [SHIFT] [STO] [B]

[×] 2 [-] [ANPHA] [A] [+] 1 [SHIFT] [STO] [A]

[×] 2 [-] [ANPHA] [B] [+] 1 [SHIFT] [STO] [B]

[Δ] [SHIFT] [COPY]

[=] ... [=] ...

- Ta được dãy: *1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55,...*

- Tìm quy luật cho dãy số:

$a_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$a_2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$

$a_3 = 6 = \frac{3(3+1)}{2}$

$a_4 = 10 = \frac{4(4+1)}{2}$

$a_5 = 15 = \frac{5(5+1)}{2}$

...

$\Rightarrow$ dự đoán công thức số hạng tổng quát:

$$\boxed{a_n = \frac{n(n+1)}{2}} \quad (1)$$

* Ta hoàn toàn chứng minh công thức (1) đúng với mọi n $\in$ N^*

Từ đó: A = $4a_n.a_{n+2} + 1 = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

$\Rightarrow$ A là một số chính phương.

Cách giải khác: Từ kết quả tìm được một số số hạng đầu của dãy,ta thấy:

- Với $n = 1$ thì $A = 4a_1.a_3 + 1 = 4.1.6 + 1 = 25 = (2a_2 - 1)^2$

- Với $n = 2$ thì $A = 4a_2.a_4 + 1 = 4.3.10 + 1 = 121 = (2a_3 - 1)^2$

- Với $n = 3$ thì $A = 4a_3.a_5 + 1 = 4.6.15 + 1 = 361 = (2a_4 - 1)^2$

Từ đó ta chứng minh A = $4a_n.a_{n+2} + 1 = (2a_{n+1} - 1)^2$ (*)

Bằng phương pháp quy nạp ta cũng dễ dàng chứng minh được (*).

2). Dự đoán giới hạn của dãy số:

2.1. Xét tính hội tụ của dãy số:

Bằng cách sử dung MTBT cho phép ta tính được nhiều số hạng của dãy số một cách nhanh chóng. Biểu diễn dãy điểm các số hạng của dãy số sẽ giúp cho ta trực quan tốt về sự hội tụ của dãy số, từ đó hình thành nên cách giải của bài toán.

Ví du 1: Xét sự hội tụ của dãy số (a_n):

$$a_n = \frac{\sin(n)}{n+1}; \quad n \in N^*$$

Giải:

- Thực hiện quy trình:

$\boxed{MODE^4}$ 2 1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$

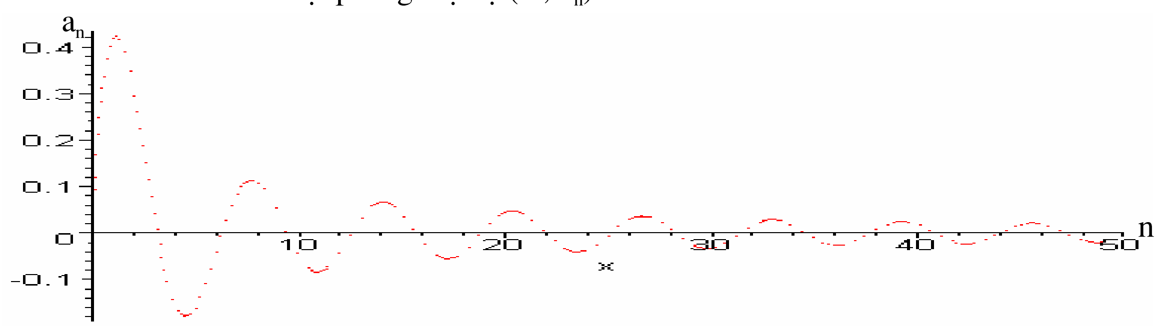
$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1

$\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

ta được kết quả sau (độ chính xác 10^{-9}):

n	$\mathbf{a_n}$	**n**	$\mathbf{a_n}$	**n**	$\mathbf{a_n}$	**n**	$\mathbf{a_n}$
1	*0,420735492*	13	*0,030011931*	25	*-0,005090451*	37	*-0,016935214*
2	*0,303099142*	14	*0,06604049*	26	*0,028242905*	38	*0,007599194*
3	*0,035280002*	15	*0,04064299*	27	*0,034156283*	39	*0,024094884*
4	*-0,151360499*	16	*-0,016935489*	28	*0,009341578*	40	*0,018173491*
5	*-0,159820712*	17	*-0,053410971*	29	*-0,022121129*	41	*-0,00377673*
6	*-0,039916499*	18	*-0,039525644*	30	*-0,031871987*	42	*-0,021314454*
7	*0,082123324*	19	*0,00749386*	31	*-0,012626176*	43	*-0,018903971*
8	*0,109928694*	20	*0,043473583*	32	*0,016709899*	44	*0,000393376*
9	*0,041211848*	21	*0,038029801*	33	*0,029409172*	45	*0,018497902*
10	*-0,049456464*	22	*-0,000384839*	34	*0,015116648*	46	*0,019186986*
11	*-0,083332517*	23	*-0,035259183*	35	*-0,011893963*	47	*0,00257444*
12	*-0,041274839*	24	*-0,036223134*	36	*-0,026804833*	48	*-0,015678666*

- Biểu diễn điểm trên mặt phẳng toạ độ $(n ; a_n)$:



Dựa vào sự biểu diễn trên giúp cho ta rút ra nhận xét khi n càng lớn thì a_n càng gần 0 ($a_n \to 0$) và đó chính là bản chất của dãy hội tụ đến số 0.

2.2. Dự đoán giới hạn của dãy số:

Ví du 1: Chứng minh rằng dãy số (u_n), (n = 1, 2, 3...) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}\ ; \quad n \in N^* \end{cases}$$

có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải:

- Thực hiện quy trình:

$\boxed{\sqrt{\ }}$ 2 $\boxed{=}$

$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{)}$

$\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$...

ta được kết quả sau (độ chính xác 10^{-9}):

n	$\mathbf{u_n}$	**n**	$\mathbf{u_n}$
1	*1,414213562*	11	*1,999999412*
2	*1,847759065*	12	*1,999999853*
3	*1,961570561*	13	*1,999999963*
4	*1,990369453*	14	*1,999999991*
5	*1,997590912*	15	*1,999999998*
6	*1,999397637*	16	*1,999999999*
7	*1,999849404*	17	*2,000000000*
8	*1,999962351*	18	*2,000000000*
9	*1,999990588*	19	*2,000000000*
10	*1,999997647*	20	*2,000000000*

Dựa vào kết quả trên ta nhận xét được:

1) Dãy số (u_n) là dãy tăng

2) Dự đoán giới hạn của dãy số bằng 2

Chứng minh nhận định trên:

+ Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được dãy số (u_n) tăng và bị chặn $\Rightarrow$ dãy (u_n) có giới hạn.

+ Gọi giới hạn đó là a: $\lim u_n = a$. Lấy giới hạn hai vế của công thức truy hồi xác định dãy số (u_n) ta được:

$\lim u_n = \lim(\sqrt{2+u_n}\,)$ hay $a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 = 2 + a \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$

Vậy: $\boldsymbol{\lim u_n = 2}$

Ví du 2: Cho dãy số (x_n), (n = 1, 2, 3...) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{2}{5\pi}x_{n+1}^2 + \dfrac{2\pi}{5}\sin(x_n), \quad n \in N^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn của nó.

Giải:

- Thực hiện quy trình:

$\boxed{MODE^4}$ 2 1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)}$

$\boxed{+}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)}$ $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$

$\boxed{\times}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)}$ $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$

$\boxed{\times}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

$\boxed{\Delta}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{COPY}}$

$\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

ta tính các số hạng đầu của dãy số (x_n) và rút ra những nhận xét sau:

1) Dãy số (x_n) là dãy không giảm

2) $x_{50} = x_{51} = ... =$ 1,570796327 (với độ chính xác 10^{-9}).

3) Nếu lấy x_i (i = 50, 51,...) trừ cho $\frac{\pi}{2}$ ta đều nhận được kết quả là 0.

$\Rightarrow$ dự đoán giới hạn của dãy số bằng $\frac{\pi}{2}$.

Chứng minh nhận định trên:

+ Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $x_n \in (0\,;\,\frac{\pi}{2})$ và dãy (x_n) không giảm $\Rightarrow$ dãy (x_n) có giới hạn.

+ Gọi giới hạn đó bằng a, ta có:

$$a = \frac{2}{5\pi}a^2 + \frac{2\pi}{5}\sin(a), \quad (1).$$

+ Bằng phương pháp giải tích (xét hàm số $f(x) = \frac{2}{5\pi}x^2 + \frac{2\pi}{5}\sin(x) - x$) ta có (1) có nghiệm là a $= \frac{\pi}{2}$.

Vậy: $\lim x_n = \frac{\pi}{2}$.

3). Một số dạng bài tập sử dụng trong ngoại khoá và thi giải Toán bằng MTBT:

<u>Bài 1</u>: Cho dãy số (u_n), (n = 0, 1, 2,...):

$$u_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$$

a) Chứng minh u_n nguyên với mọi n tự nhiên.
b) Tìm tất cả n nguyên để u_n chia hết cho 3.

<u>Bài 2</u>: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_o = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60}\ , \quad n \in N^* \end{cases}$$

a) Xác định công thức số hạng tổng quát a_n.

b) Chứng minh rằng số: $A = \frac{1}{5}\left(a_{2n} + 8\right)$ biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp với mọi n ≥ 1.

<u>Bài 3</u>: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_o = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 1999u_{n+1} - u_n\ , \quad n \in N \end{cases}$$

Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho u_n là số nguyên tố.

<u>Bài 4</u>: Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 5, a_2 = 11 \\ a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}\ , \quad n \geq 2, n \in N \end{cases}$$

Chứng minh rằng:
a) Dãy số trên có vô số số dương, số âm.
b) a_{2002} chia hết cho 11.

<u>Bài 5</u>: Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3, n \in N \end{cases}$$

Chứng minh a_n nguyên với mọi n tự nhiên.

<u>Bài 6:</u> Dãy số (a_n) được xác định theo công thức:

$a_n = \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right], \quad n \in N^*$; *(kí hiệu* $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$ *là phần nguyên của số* $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ *).*

Chứng minh rằng dãy (a_n) là dãy các số nguyên lẻ.

PHẦN III: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ

1. Tính toán trên máy kết hợp trên giấy:

Bài 1: a) Nêu một phương pháp (kết hợp trên máy và trên giấy) tính chính xác kết quả của phép tính sau: A = 12578963 x 14375

b) Tính chính xác A

c) Tính chính xác của số: $B = 123456789^2$

d) Tính chính xác của số: $C = 1023456^3$

<u>Giải:</u>

a) Nếu tính trên máy sẽ tràn màn hình nên ta làm như sau:

$A = 12578963.14375 = (12578.10^3 + 963).14375 = 12578.10^3.14375 + 963.14375$

* *Tính trên máy:* $12578.14375 = 180808750 \Rightarrow 12578.10^3.14375 = 180808750000$

* *Tính trên máy:* $963.14375 = 13843125$

Từ đó ta có: A = 180808750000 + 13843125 = 180822593125 *(Tính trên máy)*

Hoặc viết: 180808750000 = 180000000000 + 808750000 và cộng trên máy:

$808750000 + 13843125 = 822593125 \Rightarrow A = 180822593125$

b) Giá trị chính xác của A là: 180822593125

c) $B = 123456789^2 = (123450000 + 6789)^2 = (1234.10^4)^2 + 2.12345.10^4.6789 + 6789^2$

Tính trên máy: $12345^2 = 152399025$

$2x12345x6789 = 167620410$

$6789^2 = 46090521$

Vậy: $B = 152399025.10^8 + 167620410.10^4 + 46090521$

$= 15239902500000000 + 1676204100000 + 46090521 = 15241578750190521$

d) $C = 1023456^3 = (1023000 + 456)^3 = (1023.10^3 + 456)^3$

$= 1023^3.10^9 + 3.1023^2.10^6.456 + 3.1023.10^3.456^2 + 456^3$

Tính trên máy:

$1023^3 = 1070599167$

$3.1023^2.456 = 1431651672$

$3.1023.456^2 = 638155584$

$456^3 = 94818816$

Vậy *(tính trên giấy):* C = 1070599167000000000 + 1431651672000000 + + 638155584000 + 94818816 = 1072031456922402816

Bài 2 *(Thi giải Toán trên MTBT khu vực - Năm học 2003-2004)*

Tính kết quả đúng của các tích sau:

a) M = 2222255555 x 2222266666

b) N = 20032003 x 20042004

Đáp số: a) M = 4938444443209829630 b) N = 401481484254012

Bài 3: *(Thi giải Toán trên MTBT lớp 12 tỉnh Thái Nguyên - Năm học 2003-2004)*

Tính kết quả đúng của các phép tính sau:

a) A = 1,123456789 - 5,02122003

b) B = 4,546879231 + 107,3564177895

Đáp số: a) A = b) B =

Bài 4: *(Thi giải Toán trên MTBT lớp 10 + 11 tỉnh Thái Nguyên - Năm học 2003-2004)*

Tính kết quả đúng của phép tính sau:

A = 52906279178,48 : 565,432

Đáp số: A =

Bài 5: Tính chính xác của số A = $\left(\dfrac{10^{12}+2}{3}\right)^2$

Giải:

- Dùng máy tính, tính một số kết quả:

$\dfrac{10^2+2}{3} = 34$ và $\left(\dfrac{10^2+2}{3}\right)^2 = 1156$

$\dfrac{10^3+2}{3} = 334$ và $\left(\dfrac{10^3+2}{3}\right)^2 = 111556$

$\dfrac{10^4+2}{3} = 3334$ và $\left(\dfrac{10^4+2}{3}\right)^2 = 11115556$

Nhận xét: $\dfrac{10^k+2}{3}$ là số nguyên có (k - 1) chữ số 3, tận cùng là số 4

$\left(\dfrac{10^k+2}{3}\right)^2$ là số nguyên gồm k chữ số 1, (k - 1) chữ số 5, chữ số cuối cùng là 6

* Ta dễ dàng chứng minh được nhận xét trên là đúng và do đó:

A = 111111111111555555555556

2. Tìm số dư trong phép chia số a cho số b:

Định lí: *Với hai số nguyên bất kỳ a và b, $b \neq 0$, luôn tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q và r sao cho:*

$a = bq + r$ và $0 \leq r < |b|$

* Từ định lí trên cho ta thuật toán lập quy trình ấn phím tìm dư trong phép chia a cho b:

+ *Bước 1:* *Đưa số a vào ô nhớ* $\boxed{A}$ *, số b vào ô nhớ* $\boxed{B}$

+ *Bước 2:* *Thực hiện phép chia* $\boxed{A}$ *cho* $\boxed{B}$ *{ghi nhớ phần nguyên q}*

+ *Bước 3:* *Thực hiện* $\boxed{A}$ $\boxed{-}$ *q* $\boxed{\times}$ $\boxed{B}$ *= r*

Bài 5: a) Viết một quy trình ấn phím tìm số dư khi chia 18901969 cho 3041975

b) Tính số dư

c) Viết quy trình ấn phím để tìm số dư khi chia 3523127 cho 2047. Tìm số dư đó.

<u>Giải:</u>

a) Quy trình ấn phím: 18901969 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$ 3041975 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{B}$

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{B}$ $\boxed{=}$ (6,213716089)

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{-}$ 6 $\boxed{\times}$ $\boxed{B}$ $\boxed{=}$ (650119)

b) Số dư là: r = 650119

c) Tương tự quy trình ở câu a), ta được kết quả là: r = 240

Bài 6: *(Thi giải Toán trên MTBT lớp 12 tỉnh Thái Nguyên - Năm học 2002-2003)*

Tìm thương và số dư trong phép chia: 123456789 cho 23456

<u>Đáp số</u>: q = 5263; r = 7861

Bài 7: *(Thi giải Toán trên MTBT lớp 10 + 11 tỉnh Thái Nguyên - Năm học 2003-2004)*

Tìm số dư trong phép chia:

a) 987654321 cho 123456789

b) 8^{15} cho 2004

H.Dẫn:

a) Số dư là: r = 9

b) Ta phân tích: $8^{15} = 8^8.8^7$

- Thực hiện phép chia 8^8 cho 2004 được số dư là $r_1 = 1732$
- Thực hiện phép chia 8^7 cho 2004 được số dư là $r_2 = 968$

$\Rightarrow$ Số dư trong phép chia 8^{15} cho 2004 là số dư trong phép chia 1732 x 968 cho 2004

$\Rightarrow$ Số dư là: r = 1232

3. Tìm ước chung lớn nhất (UCLN) và bội chung nhỏ nhất (BCNN):

Bổ đề *(cơ sở của thuật toán Euclide)*

Nếu $a = bq + r$ thì $(a, b) = (b, r)$

Từ bổ đề trên, ta có thuật toán Euclide như sau (với hai số nguyên dương a, b):

- Chia a cho b, ta được thương q_1 và dư r_1: $a = bq_1 + r_1$
- Chia b cho r_1, ta được thương q_2 và dư r_2: $b = r_1q_2 + r_2$
- Chia r_1 cho r_2, ta được thương q_3 và dư r_3: $r_1 = r_2q_3 + r_3$

....

Tiếp tục quá trình trên, ta được một dãy giảm: b, r_1, r_2, r_3... dãy này dần đến 0, và đó là các số tự nhiên nên ta se thực hiện không quá b phép chia. Thuật toán kết thúc sau một số hữu hạn bước và bổ đề trên cho ta:

$(a, b) = (b, r_1) = ... r_n$

Định lí: Nếu x, y là hai số nguyên khác 0, BCNN của chúng luôn luôn tồn tại và bằng:

$$\frac{xy}{(x, y)}$$

Bài 8: Tìm UCLN của hai số:

a = 24614205, b = 10719433

<u>Giải:</u>

* Thực hiện trên máy thuật toán tìm số dư trong phép chia số a cho số b, ta được:

- Chia a cho b được: 24614205 = 10719433 x 2 + 3175339
- Chia 10719433 cho 3175339 được: 10719433 = 3175339 x 3 + 1193416
- Chia 3175339 cho 1193416 được: 3175339 = 1193416 x 2 + 788507
- Chia 1193416 cho 788507 được: 1193416 = 788507 x 1 + 404909
- Chia 788507 cho 404909 được: 788507 = 404909 x 1 + 383598
- Chia 404909 cho 383598 được: 404909 = 383598 x 1 + 21311
- Chia 383598 cho 21311 được: 383598 = 21311 x 18 + 0

$\Rightarrow$ UCLN(a, b) = 21311

Bài 9: *(Thi giải Toán trên MTBT lớp 10 + 11 tỉnh Thái Nguyên - Năm học 2003-2004)*

Tìm ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của:

a = 75125232 và b = 175429800

<u>Đáp số:</u> UCLN(a, b) = ; BCNN(a, b) =

4. Một số bài toán sử dụng tính tuần hoàn của các số dư khi nâng lên luỹ thừa:

Định lí: *Đối với các số tự nhiên a và m tuỳ ý, các số dư của phép chia a, a^2, a^3, a^4... cho m lặp lại một cách tuần hoàn (có thể không bắt đầu từ đầu).*

Chứng minh. Ta lấy m + 1 luỹ thừa đầu tiên:

$$a, a^2, a^3, a^4..., a^m, a^{m+1}$$

và xét các số dư của chúng khi chia cho m. Vì khi chia cho m chỉ có thể có các số dư {0, 1, 2, ..., m - 2, m - 1}, mà lại có m + 1 số, nên trong các số trên phải có hai số có cùng số dư khi chia cho m. Chẳng hạn hai số đó là a^k và a^{k+1}, trong đó l > 0.

Khi đó:

$$a^k \equiv a^{k+1} \pmod{m} \qquad (1)$$

Với mọi n ≥ k nhân cả hai vế của phép đồng dư (1) với a^{n-k} sẽ được:

$a^n \equiv a^{n+1} \pmod{m}$

Điều này chứng tỏ rằng bắt đầu từ vị trí tương ứng với a^k các số dư lặp lại tuần hoàn.

Số l được gọi là chu kỳ tuần hoàn của các số dư khi chia luỹ thừa của a cho m.

Sau đây ta xét một số dạng bài tập sử dụng định lí trên:

Bài toán: Xét các luỹ thừa liên tiếp của số 2:

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9,...$$

Tìm xem khi chia các luỹ thừa này cho 5 nhận được các loại số dư nào ?

<u>Giải:</u> Ta có:

$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$, $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$ (1)

Để tìm số dư khi chia 2^5 cho 5 ta nhân cả hai vế phép đồng dư (1) với 2 sẽ được:

$2^5 = 2^4.2 \equiv 1x2 \equiv 2 \pmod{5}$

$2^6 = 2^5.2 \equiv 2x2 \equiv 4 \pmod{5}$

$2^7 = 2^6.2 \equiv 4x2 \equiv 3 \pmod{5}$

...

Ta viết kết quả vào hai hàng: hàng trên ghi các luỹ thừa, hàng dưới ghi số dư tương ứng khi chia các luỹ thừa này cho 5:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	...
(2	***4***	***3***	***1)***	(2	4	3	1)	(2	4	3	...

⇒ hàng thứ hai cho ta thấy rằng các số dư lặp lại một cách tuần hoàn: sau 4 số dư (2, 4, 3, 1) lại lặp lại theo đúng thứ tự trên.

Bài 10: Tìm số dư khi chia 2^{2005} cho 5

<u>Giải:</u>

* Áp dụng kết quả trên: ta có $2005 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$ số dư khi chia 2^{2005} cho 5 là 2

Bài 11: Tìm chữ số cuối cùng của số: 2^{3^4}

Giải:

- Xét các luỹ thừa của 2 khi chia cho 10 (sử dụng MTBT để tính các luỹ thừa của 2, ta thực hiện theo quy trình sau:

1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ 2 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ...)

ta được kết quả sau:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	...
(2	***4***	***8***	***6)***	(2	4	8	6)	(2	4	8	...

$\Rightarrow$ hàng thứ hai cho ta thấy rằng các số dư lặp lại tuần hoàn chu kỳ 4 số (2, 4, 8, 6)

ta có $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$ số dư khi chia 2^{3^4} cho 10 là 2

Vậy chữ số cuối cùng của số 2^{3^4} là 2.

Bài 12: Tìm hai chữ số cuối cùng của số:

$$A = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$$

Giải: Xét các luỹ thừa của 2 khi chia cho 100 (sử dụng MTBT để tính các luỹ thừa của 2, thực hiện theo quy trình như bài 11), ta được kết quả sau:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
2	***(4***	***8***	***16***	***32***	***64***	***28***	***56***	***12***	***24***	***48***	***96***
2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}	2^{24}
92	***84***	***68***	***36***	***72***	***44***	***88***	***76***	***52)***	(4	8	16

$\Rightarrow$ các số dư lặp lại tuần hoàn chu kỳ 20 số (từ số 4 đến số 52). Ta có:

$1999 \equiv 19 \pmod{20} \quad \Rightarrow$ số dư khi chia 2^{1999} cho 100 là 88
$2000 \equiv 0 \pmod{20} \quad \Rightarrow$ số dư khi chia 2^{2000} cho 100 là 76
$2001 \equiv 1 \pmod{20} \quad \Rightarrow$ số dư khi chia 2^{2001} cho 100 là 52
$88 + 76 + 52 = 216 \equiv 16 \pmod{100}$
$\Rightarrow$ số dư của $A = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ khi chia cho 100 là 16 hay hai chữ số cuối cùng của số A là 16.

Bài 13: Chứng minh rằng $\left(14^8\right)^{2004} + 10$ chia hết cho 11

Giải:

- Ta có: $14 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow \left(14^8\right)^{2004} \equiv \left(3^8\right)^{2004} \pmod{11}$

Do $3^8 = 6561 \equiv 5 \pmod{11}$, nên $\left(3^8\right)^{2004} = 6561^{2004} \equiv 5^{2004} \pmod{11}$

Xét sự tuần hoàn của các số dư khi chia luỹ thừa của 5 cho 11:

5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	...
(5	4	9	1)	(5	4	9	1)	...

$\Rightarrow 5^{2004} = (5^4)^{501} \equiv 1^{501} \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$ (1)

Mặt khác: $10 \equiv 10 \pmod{11}$ (2)

Cộng vế với vế phép đồng dư (1) và (2) có:

$14^{8^{2004}} + 10 \equiv 11 \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 14^{8^{2004}} + 10$ chia hết cho 11.

Bài 14: Chứng minh rằng số $222^{555} + 555^{222}$ chia hết cho 7.

Giải:

1) Trước hết tìm số dư của phép chia 222^{555} cho 7:

- Vì 222 = 7 x 31 + 5, nên $222 \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv 5^{555} \pmod 7$

- Xét sự tuần hoàn của các số dư khi chia luỹ thừa của 5 cho 7:

5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	...
(5	4	6	2	3	1)	(5	4	...

$\Rightarrow 5^{555} = 5^{6.92+3} = (5^6)^{92}.5^3 \equiv 5^3 \equiv 6 \pmod 7$ (1)

Vậy số dư khi chia 222^{555} cho 7 là 6.

2) Tương tự, tìm số dư của phép chia 555^{222} cho 7:

- Vì 555 = 7 x 79 + 2, nên $555 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$

- Xét sự tuần hoàn của các số dư khi chia luỹ thừa của 2 cho 7:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	...
(2	4	1	2	4)	(2	4	1	...

$\Rightarrow 2^{222} = 2^{3.74} = (2^3)^{74} \equiv 1^{74} \equiv 1 \pmod 7$ (2)

Vậy số dư khi chia 555^{222} cho 7 là 1.

Cộng vế với vế các phép đồng dư (1) và (2), ta được:

$222^{555} + 555^{222} \equiv 6 + 1 \equiv 0 \pmod 7$

Vậy số $222^{555} + 555^{222}$ chia hết cho 7.

5. Số nguyên tố:

Định lí 1 *(Định lí cơ bản về số nguyên tố):*

Mọi số nguyên dương n, n > 1, đều có thể được viết một cách duy nhất (không tính đến việc sắp xếp các nhân tử) dưới dạng:

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$,

với k, e_i là số tự nhiên và p_i là các số nguyên tố thoả mãn:

$1 < p_1 < p_2 < ... < p_k$

Khi đó, dạng phân tích trên được gọi là *dạng phân tích chính tắc* của số n.

Bài 15: Tìm các ước nguyên tố nhỏ nhất và lớn nhất của số:

$A = 215^2 + 314^2$

<u>H. Dẫn:</u>

- Tính trên máy, ta có: A = 144821

- Đưa giá trị của số A vào ô nhớ $\boxed{A}$: 144821 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$

- Lấy giá trị của ô nhớ $\boxed{A}$ lần lượt chia cho các số nguyên tố từ số 2:

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ (72410,5)

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ (48273,66667)

....

tiếp tục chia cho các số nguyên tố: 5, 7, 11, 13,...,91: ta đều nhận được A không chia hết cho các số đó. Lấy A chia cho 97, ta được:

$\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\div}$ 97 $\boxed{=}$ (1493)

Vậy: 144821 = 97 x 1493

<u>Nhận xét</u>: Nếu một số n là hợp số thì nó phải có ước số nguyên tố nhỏ hơn $\sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ để kiểm tra xem 1493 có là hợp số hay không ta chỉ cần kiểm tra xem 1493 có chia hết cho số nguyên tố nào nhỏ hơn $\sqrt{1493} < 40$ hay không.

- Thực hiện trên máy ta có kết quả 1493 không chia hết cho các số nguyên tố nhỏ hơn 40 $\Rightarrow$ 1493 là số nguyên tố.

Vậy $A = 215^2 + 314^2$ có ước số nguyên tố nhỏ nhất là 97, lớn nhất là 1493.

Bài 15: Tìm các ước nguyên tố nhỏ nhất và lớn nhất của số:

A = 10001

<u>Đáp số:</u> A có ước số nguyên tố nhỏ nhất là 73, lớn nhất là 137

Bài 16: Số $N = 2^7.3^5.5^3$ có bao nhiêu ước số ?

<u>Giải:</u>

- Số các ước số của N chỉ chứa thừa số: 2 là 7, 3 là 5, 5 là 3
- Số các ước số của N chứa hai thừa số nguyên tố:

2 và 3 là: 7x5 = 35; 2 và 5 là: 7x3 = 21; 3 và 5 là: 5x3 = 15

- Số các ước số của N chứa ba thừa số nguyên tố 2, 3, 5 là 7x5x3 = 105

Như vậy số các ước số của N là: 7 + 5 + 3 + 35 + 21 + 15 + 105 + 1 = 192.

Định lí 2 *(Xác định số ước số của một số tự nhiên n):*

Cho số tự nhiên n, n > 1, giả sử khi phân tích n ra thừa số nguyên tố ta được:

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$,

với k, e_i là số tự nhiên và p_i là các số nguyên tố thoả mãn:

$1 < p_1 < p_2 <...< p_k$

Khi đó số ước số của n được tính theo công thức:

$\tau_{(n)} = (e_1 + 1) (e_2 + 1)... (e_k + 1)$

Bài 17: *(Thi giải Toán trên MTBT lớp 10 + 11 tỉnh Thái Nguyên - Năm học 2003-2004)*

Hãy tìm số các ước dương của số A = 6227020800.

<u>Giải:</u>

- Phân tích A ra thừa số nguyên tố, ta được:

$A = 2^{10}.3^5.5^2.7.11.13$

Áp dụng định lí trên ta có số các ước dương của A là:

$\tau_{(A)} = 11.6.3.2.2.2 = 1584$

Bài 18: *(Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Phú Thọ tham gia kì thi khu vực năm 2004):*

Có bao nhiêu số tự nhiên là ước của:

N = 1890 x 1930 x 1945 x 1954 x 1969 x 1975 x 2004

<u>Giải:</u>

- Phân tích N ra thừa số nguyên tố, ta được:

$N = 2^5 \times 3^4 \times 5^5 \times 7 \times 11 \times 79 \times 167 \times 179 \times 193 \times 389 \times 977$

Áp dụng định lí 2, ta có số các ước dương của N là:

$\tau_{(N)} = 6 \times 5 \times 6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 46080$

6. Tìm số tự nhiên theo các điều kiện cho trước:

Bài 19: Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất trong các số tự nhiên dạng:

$\overline{1x2y3z4}$

chia hết cho 7.

Giải:

- Số lớn nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7 sẽ phải có dạng:

$\overline{19293z4}$ với $z \in \{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$

lần lượt thử với z = 9; 8; 7; 6; 5... đến z = 5, ta có:

1929354 $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ (275622)

Vậy số lớn nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7 là 1929354, thương là 275622

- Số nhỏ nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7 sẽ phải có dạng:

$\overline{10203z4}$ với $z \in \{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$

lần lượt thử với z = 0; 1; 2; 3... đến z = 3, ta có:

1020334 $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ (145762)

Vậy số nhỏ nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7 là 1020334, thương là 145762

Bài 20: Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất trong các số tự nhiên dạng:

$\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 13.

Đáp số: - Số lớn nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 13 là 1929304

- Số nhỏ nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 13 là 1020344

Bài 21: *(Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Phú Thọ tham gia kì thi khu vực năm 2004)*

Tìm tất cả các số n dạng:
$N = \overline{1235679x4y}$ chia hết cho 24.

H.Dẫn:

- Vì N $\vdots$ 24 $\Rightarrow$ N $\vdots$ 3 ; N $\vdots$ 8 $\Rightarrow$ (37 + x + y) $\vdots$ 3 ; $\overline{x4y} \vdots 8$.

$\Rightarrow$ y chỉ có thể là 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8.

Dùng máy tính, thử các giá trị x thoả mãn: (x + y + 1) $\vdots$ 3 và $\overline{x4y} \vdots 8$, ta có:

N_1 = 1235679048 ; N_2 = 1235679840

Bài 22: Tìm các số khi bình phương sẽ có tận cùng là ba chữ số 4. Có hay không các số khi bình phương có tận cùng là bốn chữ số 4 ?

H.Dẫn:

- Chữ số cuối cùng của x^2 là 4 thì chữ số cuối cùng của x là 2 hoặc 8. *Tính trên máy* bình phương của số:

2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98

ta chỉ có các số:

12, 62, 38, 88

khi bình phương có tận cùng là hai chữ số 4.

- *Tính trên máy* bình phương của các số:

12, 112, 212, 312, 412, 512, 612, 712, 812, 912;

62, 162, 262, 362, 462, 562, 662, 762, 862, 962;

38, 138, 238, 338, 438, 538, 638, 738, 838, 938

88, 188, 288, 388, 488, 588, 688, 788, 888, 988

ta được: **462, 962, 38, 538** khi bình phương có tận cùng là 444.

* Tương tự cách làm trên, ta có kết luận: không có N nào để N^2 kết thúc bởi 4444.

Bài 23: Tìm tất cả các số có 6 chữ số thoã mãn:

1) Số tạo thành bởi ba chữ số cuối lớn hơn số tạo thành bởi ba chữ số đầu 1 đơn vị

2) Là số chính phương.

H. Dẫn:

- Gọi số cần tìm là: $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

- Đặt $x = \overline{a_1a_2a_3}$. Khi ấy $\overline{a_4a_5a_6} = x + 1$ và n = 1000x + x + 1 = 1001x + 1 = y^2

hay (y - 1)(y + 1) = 7.11.13x.

Vậy hai trong ba số nguyên tố 7, 11, 13 phải là ước của một trong hai thừa số của vế trái và số còn lại phải là ước của thừa số còn lại của vế trái.

Dùng máy tính, xét các khả năng đi đến đáp số:

n = 183184 ; 328329 ; 528529 ; 715716.

Bài 24: Tìm tất cả các số tự nhiên x thoả mãn: 10000 < x < 15000 và khi chia x cho 393 cũng như 655 đều có số dư là 210.

H.Dẫn:

- Từ giả thiết, ta có: $x = 393.q_1 + 210 \Rightarrow x - 210$ chia hết cho 393

$x = 655.q_2 + 210 \Rightarrow x - 210$ chia hết cho 655

$\Rightarrow x - 210$ chia hết cho BCNN (393 ; 655) = 1965

$\Rightarrow x - 210 = 1965.k$; $(k = 1, 2, ...)$ hay $x = 1965k + 210$

- Từ giả thiết $10000 < x < 15000 \Rightarrow 10000 < 1965k + 210 < 15000$

hay $9790 < 1965k < 14790 \Rightarrow 5 \le k < 8$.

Tính trên máy:

Với k = 5, ta có: x = 1965.5 + 210 = 10035

Với k = 6, ta có: x = 1965.6 + 210 = 12000

Với k = 7, ta có: x = 1965.7 + 210 = 13965

Vậy các số phải tìm là: 10035, 12000, 13965

Bài 25: Tìm các chữ số x, y, z để $\overline{579xyz}$ chia hết cho 5, 7 và 9.

<u>Giải:</u>

- Vì các số 5, 7, 9 đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta phải tìm các chữ số x, y, z sao cho $\overline{579xyz}$ chia hết cho 5.7.9 = 315.

Ta có $\overline{579xyz} = 579000 + \overline{xyz} = 1838.315 + 30 + \overline{xyz}$

$\Rightarrow 30 + \overline{xyz}$ chia hết cho 315. Vì $30 \le 30 + \overline{xyz} < 1029$ nên *(Dùng máy tính tìm các bội của 315 trong khoảng (30 ; 1029):*

- Nếu $30 + \overline{xyz} = 315$ thì $\overline{xyz} = 315 - 30 = 285$

- Nếu $30 + \overline{xyz} = 630$ thì $\overline{xyz} = 630 - 30 = 600$

- Nếu $30 + \overline{xyz} = 945$ thì $\overline{xyz} = 945 - 30 = 915$

Vậy ta có đáp số sau:

x	y	z
2	8	5
6	0	0
9	1	5

Bài 26: *(Thi Quốc tế IMO 1962):*

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất sau:

1) Viết dưới dạng thập phân a có tận cùng là số 6.

2) Nếu bỏ chữ số 6 cuối cùng và đặt chữ số 6 lên trước các chữ số còn lại sẽ được một số gấp 4 lần chữ số ban đầu.

<u>Giải:</u>

- Giả sử số cần tìm có n + 1 chữ số.

- Từ điều kiện 1) số đó dạng: $\overline{a_1a_2...a_n6}$

- Từ điều kiện 2), ta có: $\overline{6a_1a_2...a_n} = 4.\overline{a_1a_2...a_n6}$ (*)

- Đặt $a = \overline{a_1a_2...a_n}$, thì: $\overline{a_1a_2...a_n6} = 10a + 6$

$$\overline{6a_1a_2...a_n} = 6.10^n + a$$

- Khi đó (*) trở thành:

$$6.10^n + a = 4.(10a + 6) \Leftrightarrow 2.(10^n - 4) = 13a \quad (**)$$

Đẳng thức (**) chứng tỏ vế trái chia hết cho 13.

Vì (2 ; 13) = 1 nên: $10^n - 4$ chia hết cho 13.

Bài toán quy về: *Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để (10^n - 4) chia hết cho 13*, khi đó tìm ra số a và số cần tìm có dạng: 10a + 6.

Thử lần lượt trên máy các giá trị n = 1; 2;... thì (10^n - 4) lần lượt là:

6, 96, 996, 9996, 99996,... và số đầu tiên chia hết cho 13 là: 99996.

Khi đó a = 15384 $\Rightarrow$ Số cần tìm là: 153846.

Bài 27: Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) 2n + 7 chia hết cho n + 1

b) n + 2 chia hết cho 7 - n

<u>H.Dẫn:</u>

a) *Lập công thức (2n + 7) : (n + 1) trên máy và thử lần lượt n = 0, 1, 2,... ta được n = 0 và n = 4 thì 2n + 7 chia hết cho n + 1.*

Chứng minh với mọi n ≥ 5, ta đều có 2n + 7 không chia hết cho n + 1, thật vậy:

$(2n + 7) \vdots (n + 1) \Rightarrow [(2n + 7) - 2(n + 1)] \vdots (n + 1) \Rightarrow 5 \vdots (n + 1) \Rightarrow n \leq 5$.

Vậy số n cần tìm là 0 hoặc 4.

b) Tương tự ta có: n = 4 hoặc n = 6.

Bài 28: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho n^3 là một số có 3 chữ số đầu và 4 chữ số cuối đều là số 1.

Giải:

Nhận xét:

1) Để n^3 có tận cùng là 11 thì n có tận cùng là số 1. Thử trên máy các số:

11, 21, 31,...81, 91

được duy nhất số **71** khi luỹ thừa bậc ba có tận cùng là 11.

2) Để n^3 có tận cùng là 111 thì n có phải tận cùng là số **471**.

(Thử trên máy với các số: 171, 271, 371,...871, 971)

3) Để n^3 có tận cùng là 1111 thì n phải có tận cùng là số **8471**.

(Thử trên máy với các số: 1471, 2471, 3471,...8471, 9471)

- Giả sử m là số chữ số đứng giữa các số 111 và 1111:

+ Nếu m = 3k, $k \in Z^+$, thì:

$$111 \times 10^{3k+4} < n^3 = 111...1111 < 112 \times 10^{3k+4}$$

$$(111\underbrace{000...00}_{3k}\underbrace{0000}_{4} \;<\; 111\underbrace{...}_{m=3k}1111 \;<\; 112\underbrace{000...00}_{3k}\underbrace{0000}_{4})$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1110}.10^{k+1} < \sqrt[3]{n^3} = \sqrt[3]{111...1111} < \sqrt[3]{1120}.10^{k+1}$$

Tính trên máy:

$$10,35398805 \times 10^{k+1} < n < 10,3849882 \times 10^{k+1}$$

Do đó, với $k \geq 1$. Cho k = 1 ta được n bắt đầu bằng số 103, nghĩa là:

n = 103...8471

$\Rightarrow$ Số nhỏ nhất trong các số đó là: n = 1038471

+ Nếu m = 3k + 1 và m = 3k + 2, ta được các số này đều vượt quá số 1038471

Kết luận: Số nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu bài toán là: ***n = 1038471*** khi đó:

(tính kết hợp trên máy và trên giấy): ***n^3 = 1119909991289361111***

Bài 29: a) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất mà n^2 bắt đầu bởi số 19 và kết thúc bằng số 89

b) Tìm số tự nhiên n sao cho: $n^2 = 2525xxxxxx89$ (trong đó xxxxxx là 6 số có thể khác nhau).

Giải:

a) Trước hết ta tìm số n^2 có tận cùng là 89:

- Vì n^2 có tận cùng là 9 nên n chỉ có thể có tận cùng là 3 hoặc 7.

- *Thử trên máy* các số: 13, 23,..., 93 ; 17, 27,..., 97 ta tìm được:

để n^2 có tận cùng là 89 thì n phải có 2 số tận cùng là một trong các số sau:

17, 33, 67, 83 *(*)*

* Bây giờ ta tìm số n^2 bắt đầu bởi số 19:

- Để n^2 bắt đầu bởi số 19 thì nó phải có dạng:

$19 \times 10^k \le n^2 < 20 \times 10^k \Leftrightarrow \sqrt{19.10^k} \le n < \sqrt{20.10^k}$ (1)

+ Nếu k = 2m thì ta có (1), trở thành:

$$\sqrt{19}.10^m \le n < \sqrt{20}.10^m$$

$\Leftrightarrow 4{,}3588989.10^m \le n < 4{,}472135955.10^m$ (2)

Trong (2) ta cho m = 0, 1, 2,... *(tính trên máy):*

ta được n có thể là: ***44, 436, 437, 438, 439, ... , 447***

+ Nếu k = 2m thì ta có (1), trở thành:

$$\sqrt{190}.10^m \le n < \sqrt{200}.10^m$$

$\Leftrightarrow 13{,}78404875.10^m \le n < 14{,}14213562.10^m$ (3)

Trong (3) ta cho m = 0, 1, 2,... *(tính trên máy):*

ta được n có thể là: ***14, 138, 139, ... , 141***

1379, 1380, 1381, ... , 1414

Tóm lại để n bắt đầu bởi số 19 thì n có thể là:

14, 44, 138, 139, ..., 141, 436, 437, ... , 447, 1379, 1380, ... , 1414 (**)

Từ (*) và (**) ta nhận thấy trong các số trên chỉ có số ***1383*** thoả mãn bài toán.

b) Ta có: $2525 \times 10^8 \le x^2 < 2526 \times 10^8$

$\Leftrightarrow 50{,}24937811 \times 10^4 \le x < 50{,}25932749 \times 10^4$

Vậy : $502493 < x < 502593$

Số x tận cùng phải là: 17, 33, 67, 83 *(theo câu a)*, do đó các số thoả mãn là:

502517, 502533, 502567, 502583.

Bài 30: Với giá trị tự nhiên nào của n thì:

$1,01^{n-1} < (n - 1)$ và $1,01^{n} > n$.

Giải:

- Ta có:

$1,01^{512} \approx 163,133... < 512$

$1,01^{1024} \approx 26612,56.. > 1024$

Vậy: $512 < n < 1024$

Thu hẹp khoảng cách chứa n bằng phương pháp chia đôi:

- Chia đôi đoạn [512 ; 1024], ta có:

$$1,01^{\frac{521+1024}{2}} = 1,01^{768} = 2083,603... > 768$$

Vậy lại có: $512 < n < 768$

Sau một số bước chia đôi như thế đi đến:

$650 < n < 652$

Cuối cùng ta có: $1,01^{651} = 650,45... < 651$

$1,01^{652} = 656,95.. > 652$

$\Rightarrow$ **n = 652**

Ta hoàn toàn giải bài toán trên bằng một quy trình trên MTBT:

(*Thuật toán:* Xét hiệu $1,01^{A} - A$, gán cho A các giá trị tự nhiên: 0, 1, 2,...

dừng lại khi hiệu trên chuyển từ (-) sang (+))

- Gán cho ô nhớ $\boxed{A}$ *giá trị tự nhiên đầu tiên:*

0 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$

- Lập công thức tính hiệu $1,01^{A}$ - A và gán giá trị ô nhớ bởi số tự nhiên kế tiếp:

1,01 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$

$\boxed{:}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANPHA}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ 1

- Lặp lại công thức trên:

$\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$

Bài toán kết thúc khi chuyển từ n = 651 sang n = 652.

7. Một số dạng toán khác:

7.1 Số có đuôi bất biến với mọi luỹ thừa:

1) Luỹ thừa bậc bất kì của các số có chữ số tận cùng bằng 1 ; 5 ; 6 (và chỉ những số ấy) đều có chữ số tận cùng bằng 1 ; 5 ; 6 (có đuôi bất biến).

2) Luỹ thừa bậc bất kì của các số có chữ số tận cùng bằng 25 hoặc 76 (và chỉ những số ấy) đều có chữ số tận cùng bằng 25 hoặc 76 (có đuôi bất biến).

3) Luỹ thừa bậc bất kì của các số có chữ số tận cùng bằng 376 hoặc 625 (và chỉ những số ấy) đều có chữ số tận cùng bằng 376 hoặc 625 (có đuôi bất biến).

4) Luỹ thừa bậc bất kì của các số có chữ số tận cùng bằng 9376 hoặc 0625 (và chỉ những số ấy) đều có chữ số tận cùng bằng 9376 hoặc 0625 (có đuôi bất biến).

...

Bài 31: Tìm số dư khi chia số $13376^{2005!}$ cho 2000 *(TH & TT T_3/ 317)*

Giải:

- Giả sử A, B là hai số tự nhiên có tận cùng là 376, thì:

$A.B = (1000.a + 376)(1000.b + 376) = 376000(a + b) + 10^6a.b + 376^2$

$= 2000t + 1376$; với $a, b\ t \in N$

$\Rightarrow$ A.B chia 2000 có số dư là 1376.

Với $k > 1$ khi chia 13376^k cho 2000 (thực hiện (k - 1) lần phép nhân 2 số đều có tận cùng là 376 rồi chia cho 2000) thì được dư là 1376. Đề bài ứng với k = 2005!

Bài 32: Tìm 2 chữ số tận cùng của số:

$A = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$

H.Dẫn:

- Ta có: $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 2^{1999}(1 + 2 + 2^2) = 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times 2^{1980}$

$= 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times (2^{20})^{99}$

- Ta có (*dùng máy*): $2^9 = 512$

$2^{10} = 1024$;

$2^{20} = 1048576$

Nhận xét: số có 2 chữ số tận cùng là 76, luỹ thừa bậc bất kỳ cũng có 2 chữ số tận cùng là 76. Vậy $(2^{20})^{99}$ cũng có 2 số tận cùng là 76.

$\Rightarrow 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 7 \times 512 \times 1024 \times (...76) = ...16.$

Vậy 2 chữ số cuối cùng của A là 16

(Xem cách giải khác ở bài 12)

Bài 33: Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1994}.

Giải:

- Ta có: $5^4 = 625$
- Nhận thấy số có tận cùng là 625 luỹ thừa bậc bất kỳ vẫn có tận cùng là 625
- Do đó:

$$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25.(5^4)^k = 25.(625)^k = 25(...625) = ...5625.$$

Vậy bốn chữ số tận cùng của số 5^{1994} là 5625.

7.2 Khai triển nhị thức Newton và bài toán chia hết:

-Ta có khai triển:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n+1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + ... + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

- Khi chứng minh về tính chia hết của các luỹ thừa, cần nhớ một số kết quả sau:

1) $a^n - b^n$ chia hết cho a - b (a ≠ b)
2) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho a + b (a ≠ -b)
3) $(a + b)^n$ = BS a + b^n (BS a: bội số của a)

Đặc biệt:

$(a + 1)^n$ = BS a + 1

$(a - 1)^{2n}$ = BS a + 1

$(a - 1)^{2n+1}$ = BS a - 1

Bài 34: Tìm số dư khi chia 2^{100} cho:

a) 9 b) 5 c) 125

Giải:

a) Luỹ thừa của 2 sát với một bội của 9 là $2^3 = 8 = (9 - 1)$

- Ta có: $2^{100} = 2(2^3)^{33} = 2(9 - 1)^{33}$ = 2(BS 9 - 1) = BS 9 - 2 = BS 9 + 7

Vậy số dư khi chia 2^{100} cho 9 là 7.

b) Luỹ thừa của 2 sát với một bội của 25 là 2^{10} = 1024 = (BS 25 - 1)

- Ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10}$ = (BS 25 - 1)^{10} = BS 25 + 1

Vậy số dư khi chia 2^{100} cho 25 là 1

c) Dùng công thức Newton:

$$2^{100} = (5-1)^{50} = 5^{50} - 50.5^{49} + ... + \frac{50.49}{2}.5^2 - 50.5 + 1$$

Để ý rằng 48 số hạng đầu đều chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên chia hết cho 125, hai số hạng kế tiếp cũng chia hết cho125, số hạng cuối là 1.

Vậy 2^{100} = BS 125 + 1 $\Rightarrow$ Số dư của 2^{100} khi chia cho 125 là 1

Tổng quát: *Nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì chia n^{100} cho 125 ta được số dư là 1.*

Bài 35: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100}.

H.Dẫn: - Ta tìm dư trong phép chia 2^{100} cho 1000.

- Trước hết tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125. Theo bài 34: 2^{100} = BS 125 + 1, mà 2^{100} là số chẵn, nên ba chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là *(dùng máy tính để thử):*

126, 376, 626 hoặc 876.

- Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 8. Bốn số trên chỉ có 376 thoả mãn điều kiện này. Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

Tổng quát: *Nếu n là số tự nhiên chẵn không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 376.*

Bài 36: Tìm ba chữ số tận cùng của 3^{100}.

Giải: - Ta phân tích như sau: $3^{100} = (10-1)^{50} = 10^{50} - ... + \frac{50.49}{2}.10^2 - 50.10 + 1$

= BS 1000 + ...500 - 500 + 1 = BS 1000 + 1.

Vậy 3^{100} tận cùng là 001.

Tổng quát: *Nếu n là số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 001.*

Bài 37: Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp:

89^6 = 496 9 * * 290 961.

H.Dẫn:

- Ta có: $(89^6 - 1) \vdots (89 - 1) \Rightarrow (89^6 - 1) \vdots 11$

$(89^6 - 1) \vdots (89^3 + 1) \Rightarrow (89^6 - 1) \vdots (89 + 1) \Rightarrow (89^6 - 1) \vdots 9$

- Đặt A = $(89^6 - 1)$ = 496 9 x y 290 960. Ta có A chia hết cho 9 và 11.

Ta có tổng các chữ số hàng lẻ (từ phải sang trái) của A bằng: 36 + y ; tổng các chữ số hàng chẵn của A bằng: 18 + x

A chia hết cho 9 nên: $54 + x + y \vdots 9 \Rightarrow x + y \in \{0 ; 9 ; 18\}$

A chia hết cho 11 nên: $[(36 + y) - (18 + x)] \vdots 11 \Rightarrow x - y \in \{-4 ; 7\}$

+ Nếu x + y = 0 thì x = y = 0 (loại)

+ Nếu x + y = 18 thì x = y = 9 (loại)

+ Nếu x + y = 9 : chú ý rằng (x + y) và (x - y) cùng chẵn hoặc cùng lẻ nên:

x - y = 7 $\Rightarrow$ x = 8 ; y = 1.

Vậy 89^6 = 496 981 290 961

7.3 Tìm chữ số thứ k ($k \in N$) trong số thập phân vô hạn tuần hoàn:

Định lí: *(Dấu hiệu nhận biết một phân số đổi được ra số thập phân hữu hạn)*

Điều kiện cần và đủ để một phân số tối giản có thể viết được thành ra số thập phân hữu hạn là mẫu số của nó không chứa những thừa số nguyên tố ngoài 2 và 5.

* Từ định lí trên ta rút ra nhận xét sau:

Nếu phân số tối giản $\frac{a}{b}$ có mẫu b không chứa các thừa số nguyên tố 2, 5 hoặc ngoài thừa số nguyên tố 2, 5 còn chứa cả thừa số nguyên tố khác thì do các số dư trong quá trình chia bao giờ cũng phải nhỏ hơn b nên các số dư chỉ có thể là các số trong:

{1; 2; 3;...;b-1}

Như vậy trong phép chia a cho b, nhiều nhất là sau (b - 1) lần chia có thể gặp các số dư khác nhau, nhưng chắc chắn rằng sau b lần chia thì thế nào ta cũng gặp lại số dư đã gặp trước. Do đó, nếu ta cứ tiếp tục chia thì các số dư sẽ lặp lại và dĩ nhiên các chữ số trong thương cũng lặp lại.

Từ đó để tìm chữ số thứ k sau dấu phảy của số thập phân vô hạn tuần hoàn, ta chỉ cần xác định được chu kỳ lặp lại của các chữ số trong thương, từ đó dễ dàng suy ra được chữ số cần tìm.

Bài 38: Tìm chữ số thập phân thứ 2005 sau dấu phảy của số:

$$a)\quad A=\frac{1}{37};\quad b)\quad B=\frac{1}{41};\quad c)\quad C=\frac{10}{51};\quad d)\quad C=\frac{1}{49}$$

<u>H.Dẫn:</u>

a) Số $A=\frac{1}{37}=0,027\,027\,(027)...$ tuần hoàn chu kỳ 3 chữ số 027.

Vì 2005 ≡ 1 (mod 3) nên chữ số thứ 2005 sau dấu phảy của A là:

b) Số $B=\frac{1}{41}=0,02439\,02439\,(02439)...$ tuần hoàn chu kỳ 5 chữ số 02439.

Vì 2005 ≡ 0 (mod 5) nên chữ số thứ 2005 sau dấu phảy của B là:

c) Số $C=\frac{10}{51}=0,(1960784313725490)$ TH chu kỳ 16 chữ số:1960784313725490

Vì 2005 ≡ 5 (mod 16) nên chữ số thứ 2005 sau dấu phảy của C là:

d) Số $D=\frac{1}{49}=0,(020408163265306122448979591836734693877551)$

tuần hoàn chu kỳ 42 chữ số 020408163265306122448979591836734693877551

Vì 2005 ≡ 31 (mod 42) nên chữ số thứ 2005 sau dấu phảy của D là:

PHẦN IV: GIẢI TAM GIÁC

1. Giải tam giác:

Bài 1: Tính các góc của tam giác ABC, biết:

AB = 4,123 ; BC = 5,042 ; CA = 7,415

Đáp số: $\widehat{A} =$; $\widehat{B} =$; $\widehat{C} =$

Bài 2: Tính cạnh BC, góc B , góc C của tam giác ABC, biết:

AB = 11,52 ; AC = 19,67 và góc $\widehat{A} = 54^o35'12''$

Đáp số: BC = ; $\widehat{B} =$; $\widehat{C} =$

Bài 3: Tính cạnh AB, AC, góc C của tam giác ABC, biết:

BC = 4,38 ; $\widehat{A} = 54^o35'12''$; $\widehat{B} = 101^o15'7''$

Đáp số: AB= ; AC = ; $\widehat{C} =$

Bài 4: Tam giác ABC có ba cạnh: AB = 4,123 ; BC = 5,042 ; CA = 7,415

Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho: BM = 2,142

1) Tính độ dài AM?

2) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM

3) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACM.

Đáp số: 1) AM = 2) R = 3) r =

Bài 5: Tam giác ABC có: $\widehat{B} = 49^o27'$; $\widehat{C} = 73^o52'$ và cạnh BC = 18,53.

Tính diện tích S của tam giác ?

Đáp số: S =

Bài 6: Tam giác ABC có chu vi 58 (cm) ; $\widehat{B} = 57^o18'$ và $\widehat{C} = 82^o35'$

Tính độ dài các cạnh AB, BC, CA ?

Đáp số: AB = ; BC = ; CA =

Bài 7: Tam giác ABC có $90^o < \widehat{A} < 180^o$ và sinA = 0,6153 ; AB = 17,2 ; AC = 14,6.

Tính: 1) Độ dài cạnh BC ? Trung tuyến AM ?

2) Góc $\widehat{B} = ?$

3) Diện tích tam giác S = ?

Đáp số: BC = ; AM = ; $\widehat{B} =$; S =

Bài 8: Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^o$; AB = 7 (cm) ; AC = 5 (cm).

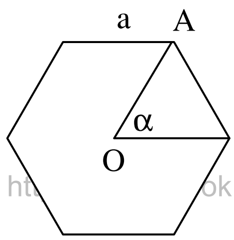
Tính độ dài đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE ?

Đáp số: AD = ; AE =

2. Đa giác, hình tròn:

* Một số công thức:

1) Đa giác đều n cạnh, độ dài cạnh là a:

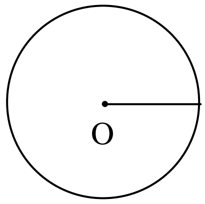


+ Góc ở tâm: $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ (rad), hoặc: $a^o = \dfrac{360}{n}$ (độ)

+ Góc ở đỉnh: $\widehat{A} = \dfrac{n-2}{n}\pi$ (rad), hoặc $\widehat{A} = \dfrac{n-2}{n}.180$ (độ)

+ Diện tích: $S = \dfrac{na}{4}\cot g\dfrac{\alpha}{2}$

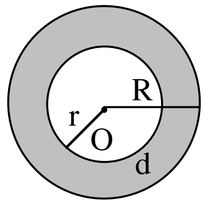
2) Hình tròn và các phần hình tròn:



+ Hình tròn bán kính R:

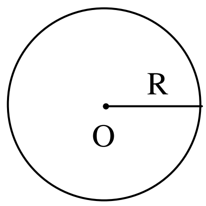
- Chu vi: $C = 2\pi R$

- Diện tích: $S = \pi R^2$



+ Hình vành khăn:

- Diện tích: $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(2r + d)d$



+ Hình quạt:

- Độ dài cung: $l = \alpha R$; (α: rad)

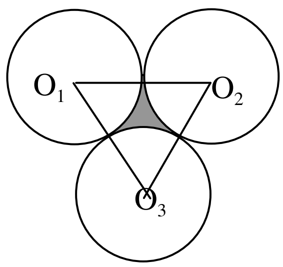
- Diện tích: $S = \dfrac{1}{2}R^2\alpha$ (α: rad)

$= \dfrac{\pi R^2 a}{360}$ (a: độ)

Bài 9: Ba đường tròn có cùng bán kính 3 cm đôi một tiếp xúc ngoài (Hình vẽ)

Tính diện tích phần xen giữa ba đường tròn đó ?

H.Dẫn:



$S_{gạch\ xọc} = S_{\Delta O1O2O3} - 3\ S_{quạt}$

Tam giác $O_1O_2O_3$ đều, cạnh bằng 1 nên:

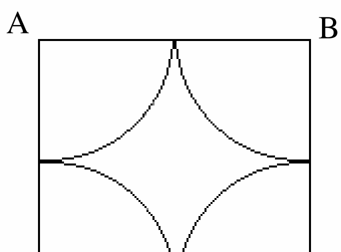
$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}6.6.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{quạt} = \frac{\pi R^2 a}{360} = \frac{\pi.9.60}{360} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow S_{gạch\ xọc} = S_{\Delta O1O2O3} - 3\ S_{quạt} = 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2} = \frac{18\sqrt{3} - 9\pi}{2} \approx 1,451290327$$

Bài 10: Cho hình vuông ABCD, cạnh a = 5,35. Dựng các đường tròn tâm A, B, C, D có bán kính R $= \dfrac{a}{2}$. Tính diện tích xen giữa 4 đường tròn đó.

H.Dẫn: $S_{gạch} = S_{ABCD} - 4S_{quạt}$



$S_{quạt} = \frac{1}{4}S_{H.tròn} = \frac{1}{4}\pi R^2$

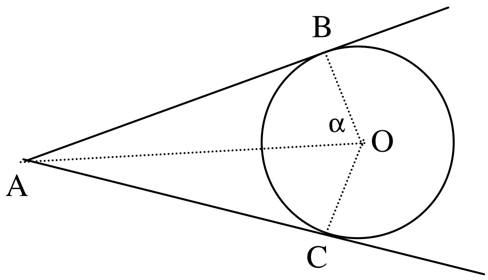
$\Rightarrow S_{gạch} = a^2 - 4.\frac{1}{4}\pi R^2 = a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2$

$= a^2(1 - \frac{1}{4}\pi) \approx 6,142441068$

Bài 11: Cho đường tròn tâm O, bán kính R = 3,15 cm. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm thuộc (O)). Tính diện tích phần giới hạn bởi hai tiếp tuyến và cung tròn nhỏ BC. Biết OA = a = 7,85 cm.

H.Dẫn:

- Tính α: $\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{a} = \frac{3,15}{7,85}$



$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{3,15}{7,85}$

$S_{OBAC} = 2S_{OBA} = aR\sin\alpha$

$S_{quạt} = \frac{\pi R^2.2\alpha}{360} = \frac{\pi R^2.\alpha}{180}$

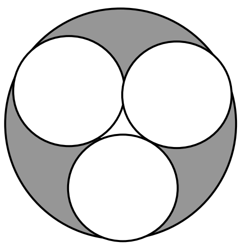
$S_{gạch} = S_{OBAC} - S_{quạt} = aR\sin\alpha - \frac{\pi R^2.\alpha}{180} \approx 11,16 \quad (cm^2)$

Bài 12: Tính diện tích phần được tô đậm trong hình tròn đơn vị (R = 1) (Xem hình 1)

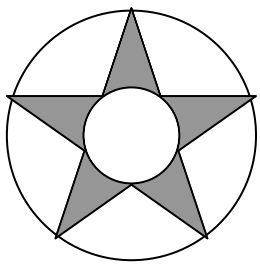
Đáp số:

Bài 13: Tính tỷ lệ diện tích của phần được tô đậm và diện tích phần còn lại trong hình tròn đơn vị (Xem hình 2)

Đáp số:



Hình 1



Hình 2

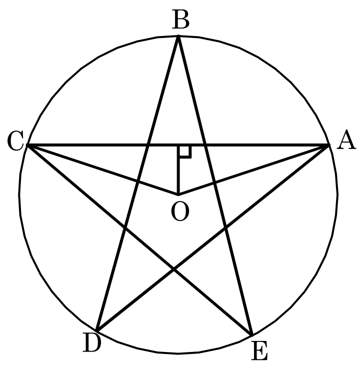
PHẦN V. ĐA GIÁC VÀ HÌNH TRÒN

Bài 1. (Sở GD & ĐT Đồng Nai, 1998, vòng Tỉnh, cấp PTTH & PTCS)

Một ngôi sao năm cánh có khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp là $9,651\,cm$. Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp (qua 5 đỉnh).

Giải: Ta có công thức tính khoảng cách giữa hai đỉnh không kề nhau của ngôi sao năm cánh đều (hình vẽ):

$$AC = d = 2R\cos 18^o = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$



Công thức $d = 2R\cos 18^o$ là hiển nhiên.

Công thức $\cos 18^o = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ có thể chứng minh như sau:

Ta có:

$$1-\sin^2 18^o = \cos^2 18^o = \frac{1+\cos 36^o}{2} = \frac{1+\sin 54^o}{2} = \frac{1+3\sin 18^o - 4\sin^3 18^o}{2}.$$

hay $4\sin^3 18^o - 2\sin^2 18^o - 3\sin 18^o + 1 = 0.$.

Suy ra $\sin 18^o$ là nghiệm của phương trình:

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(4x^2+2x-1) = 0.$$

Vậy $\sin 18^o = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Từ đây ta có: $\cos^2 18^o = 1-\sin^2 18^o = 1-(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$.

hay $\cos 18^o = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Suy ra $d = 2R\cos 18^o = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

và $R = \frac{d}{2\cos 18^o} = \frac{2d}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Cách giải 1: 9.651 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\div}$ 18 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ (5.073830963)

Cách giải 2: 2 $\boxed{\times}$ 9.651 $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ $\boxed{[(}$ 10 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ (5.073830963)

Bài 2. (Sở GD & ĐT TP Hồ Chí Minh, 1996, vòng 1)

Tính khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp của một ngôi sao 5 cánh nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 5,712cm$.

Cách giải 1: Ta có công thức tính khoảng cách giữa hai đỉnh không kề nhau của ngôi sao năm cánh (xem hình vẽ và chứng minh bài 1):

$$d = 2R\cos 18^o = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Tính: $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{4}$ 2 $\boxed{\times}$ 5.712 $\boxed{\times}$ 18 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ (10.86486964)

Cách giải 2: 10 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 5.712 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ (10,86486964)

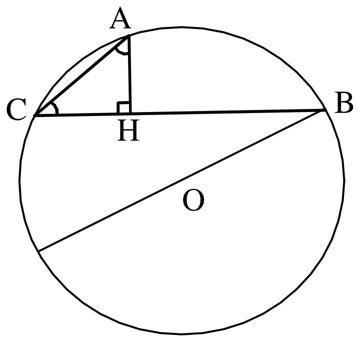
Đáp số: 10,86486964.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 11,25\ cm$. Trên đường tròn đã cho, đặt các cung $AB = 90^o$, $BC = 120^o$ sao cho A và C nằm cùng một phía đối với BO.

a) Tính các cạnh và đường cao AH của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC (chính xác đến 0,01).

Giải: a) Theo hình vẽ:



sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ - sđ $\overset{\frown}{AB}$ = $120^0 - 90^0 = 30^0$.

Tính các góc nội tiếp ta được: $\widehat{ABC} = 15^0$; $\widehat{ACB} = 45^0$.

Suy ra: $\widehat{BAC} = 120^0$; $\widehat{CAH} = 45^0$; $\widehat{BAH} = 75^0$.

Ta có: $AB = R\sqrt{2}$; $BC = R\sqrt{3}$.

Vì ΔAHC vuông cân, nên $AH = HC$ (đặt $AH = x$).

Theo định lí Pitago ta có: $AH^2 = AB^2 - HB^2$. Do đó:

$x^2 + \left(R\sqrt{3} - x\right)^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2$ hay $2x^2 - 2R\sqrt{3}x + R^2 = 0$. Suy ra: $x_1 = \dfrac{R\sqrt{3} - R}{2}$; $x_2 = \dfrac{R\sqrt{3}+R}{2}$.

Vì $AH < AC < R$, nên nghiệm $x_2 = \dfrac{R\sqrt{3}+R}{2}$ bị loại. Suy ra: $AC = AH\sqrt{2} = \dfrac{R(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$.

Gọi diện tích ΔABC là S, ta có:

$$S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}-R}{2}\cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2(3-\sqrt{3})}{4}.$$

ấn phím: 11.25 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (15.91) Vậy $AB \approx 15,91\ cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ *Kết quả*:19.49 Vậy: $BC \approx 19,49\ cm$.

ấn phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ (5.82) Vậy $AC \approx 5,82\ cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ (4.12) Vậy: $AH \approx 4,12\ cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 3 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$

Kết quả: $S \approx 40,12\ cm^2$.

Bài 4. (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1972)

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 12. Vẽ đoạn AE với E là điểm trên cạnh CD và $DE = 5\ cm$. Trung trực của AE cắt AE, AD và BC tại M, P và Q. Tỷ số độ dài đoạn PM và MQ là:

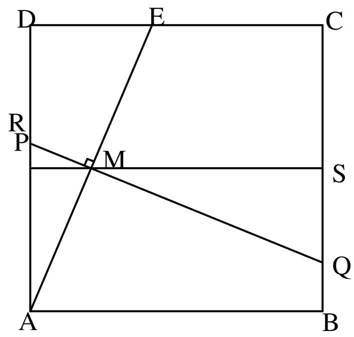
(A) 5:12; (B) 5:13; (C) 5:19; (D) 1:4; (E) 5:21.

Giải: Vẽ RS qua M song song với cạnh AB,CD.

Ta có: $\frac{MP}{MQ}=\frac{MR}{MS}$.

Vì RM là đường trung bình của tam giác ADE nên $MR=\frac{DE}{2}$.

Mà: $MS = RS - MR$.



Vậy: $\frac{MP}{MQ}=\frac{MR}{MS}=\frac{\frac{DE}{2}}{RS-\frac{DE}{2}}$.

áp dụng bằng số với $DE = 5\ cm,\ RS = 12\ cm$:

5 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ 12 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ ($\frac{5}{19}$)

Đáp số (C) là đúng.

Chú ý: Nếu không sử dụng phân số (5 $\boxed{a^{b/c}}$ 2) mà dùng (5 $\boxed{\div}$ 2) thì máy sẽ cho đáp số dưới dạng số thập phân.

Hãy tính: 5 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ 12 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ (0.2631579)

So sánh: 5 $\boxed{a^{b/c}}$ 19 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{a^{b/c}}$ $\boxed{a^{b/c}}$ *Kết quả*: 0.2631579

Như vậy, hai kết quả như nhau, nhưng một kết quả được thực hiện dưới dạng phân số (khi khai báo 5 $\boxed{a^{b/c}}$ 2), còn một kết quả được thực hiện dưới dạng số thập phân (khi khai báo 5 $\boxed{\div}$ 2).

Bài 5. Trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 15,25\ cm$, người ta đặt các cung liên tiếp: $\overset{\frown}{AB} = 60^0$, $\overset{\frown}{BC} = 90^0$, $\overset{\frown}{CD} = 120^0$.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

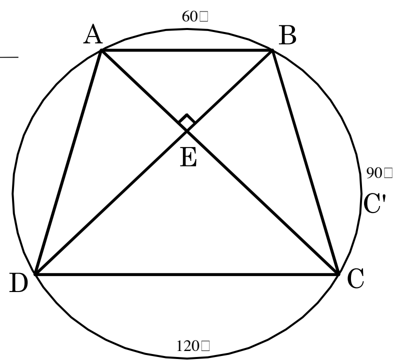
b) Chứng minh $AC \perp BD$.

c) Tính các cạnh và đường chéo của $ABCD$ theo R chính xác đến 0,01.

d) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Giải: a) sđ $\overset{\frown}{AD} = 360^0$ - (sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{BC}$ + sđ $\overset{\frown}{CD}$)

$= 360^0 - (60^0 + 90^0 + 120^0) = 90^0$.



Suy ra: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 45^0$ (vì cùng bằng $\frac{90^0}{2}$).

Từ đó ta có: $AB // CD$. Vậy $ABCD$ là hình thang.

Mặt khác, $\widehat{ADB} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng $\frac{60^0+90^0}{2}$).

Vậy $ABCD$ là hình thang cân (đpcm).

b) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} = 45^0$ (vì cùng bằng $\frac{90^0}{2}$).

Suy ra $\widehat{AEB} = 90^0$, vậy $AC \perp BD$ (đpcm).

c) Theo cách tính cạnh tam giác đều, tứ giác đều, lục giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính R, ta có:

$$AB = R;\quad AD = BC = R\sqrt{2};\quad DC = R\sqrt{3}.$$

Các tamgiác AEB, CED vuông cân, suy ra $AE = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$, $CE = \dfrac{CD}{\sqrt{2}}$.

Vậy: $AE = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $CE = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $AC = AE + EC = \dfrac{R + R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{R(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$.

d) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC\cdot DB = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{2} = \dfrac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{4} = [\dfrac{R(1+\sqrt{3})}{2}]^2$.

Tính: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 1 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (433.97).

Vậy $S_{ABCD} \approx 433,97$ cm^2.

ấn tiếp: 15.25 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ *Kết quả*: 21.57

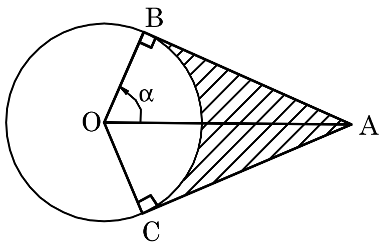
Vậy $AD = BC \approx 21,57$ cm.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ (26.41) Vậy: $CD \approx 26,41\,cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 1 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ (29.46)

Vậy $AC = BD \approx 29,46\,cm$.

Bài 6. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 3,15\,cm$. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm thuộc (O)).
Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tiếp tuyến và cung tròn nhỏ BC
biết rằng $AO = a = 7,85\,cm$ (chính xác đến 0,01 cm).



Giải: Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{a} = \dfrac{3,15}{7,85}$.

$$S_{ABOC} = 2S_{AOB} = a.R.\sin\alpha;$$

$$S_{\text{quạt OBC}} = \frac{\pi R^2.2\alpha}{360} = \frac{\pi R^2\alpha}{180}.$$

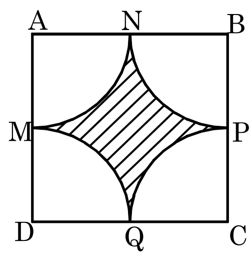
$$S_{\text{gạch xọc}} = S_{\text{ABOC}} - S_{\text{quạt OBC}} = aR\sin\alpha - \frac{\pi R^2\alpha}{180}.$$

Tính trên máy: 3.15 $\boxed{\div}$ 7.85 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$

7.85 $\boxed{\times}$ 3.15 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 3.15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\div}$ 180 $\boxed{=}$ (11.16)

Đáp số: $S_{\text{gạch xọc}} = 11,16$ cm^2.

Bài 7. Tính diện tích hình có 4 cạnh cong(hình gạch sọc) theo cạnh hình vuông a = 5,35 chính xác đến 0,0001cm.



Giải: Diện tích hình gạch xọc $MNPQ$ (S_{MNPQ}) bằng diện tích hình vuông $ABCD$ (S_{ABCD}) trừ đi 4 lần diện tích của $\dfrac{1}{4}$ hình tròn bán kính $R = \dfrac{a}{2}$.

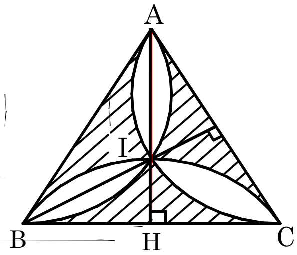
$$S_{MNPQ} = a^2 - 4\frac{\pi R^2}{4} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(4-\pi)}{4} = \frac{5,35^2(4-\pi)}{4}.$$

ấn phím: 5.35 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 4 $\boxed{-}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (6.14)

Kết luận: $S_{MNPQ} \approx$ 6,14 cm^2.

Bài 8. Tính diện tích phần hình phẳng (phần gạch xọc) giới hạn bởi các cung tròn và các cạnh của tam giác đều *ABC* (xem hình vẽ),

biết: $AB = BC = CA = a = 5,75\ cm$.



Giải: $R = OA = OI = IA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{AOI} = 60^0$.

Diện tích hình gạch xọc bằng diện tích tam giác ABC trừ diện tích hình hoa 3 lá (gồm 6 hình viên phân có bán kính R và góc ở tâm bằng 60^0).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\Delta O_1AI} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Diện tích một viên phân: $\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

Tính theo *a*, diện tích một viên phân bằng: $\frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36}$;

$$S_{\text{gạch xọc}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6\cdot\frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36} = \frac{a^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}; \quad S_{\text{gạch xọc}} = \frac{5,75^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}.$$

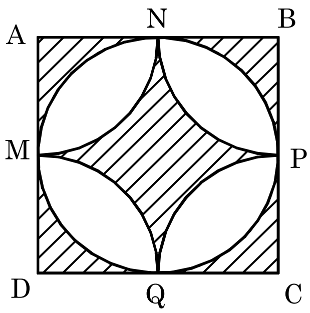
Bấm tiếp: 5,75 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 9 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 4 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{=}$

Kết quả: $S_{\text{gạch xọc}} \approx$ 8,33 cm^2.

Bài 9. Viên gạch cạnh $a = 30\ cm$ có hoa văn như hình vẽ .

a) Tính diện tích phần gạch xọc của hình đã cho, chính xác đến 0,01 cm.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch.



Giải: a) Gọi R là bán kính hình tròn.

Diện tích S một hình viên phân bằng:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{16}(\pi - 2).$$

Vậy diện tích hình gồm 8 viên phân bằng $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$.

Diện tích phần gạch xọc bằng: $a^2 - \frac{a^2(\pi - 2)}{2} = \frac{a^2(4 - \pi)}{2}$.

Tính trên máy: 30 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 4 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$

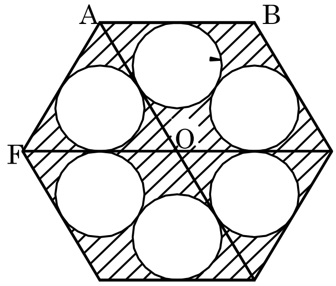
$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (386.28) Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx$ 386,28 cm^2.

ấn phím tiếp: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (42.92)

Tỉ số của diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch là 42,92%.

Đáp số: 386,28 cm^2; 42,92 %.

Bài 10. Nhân dịp kỷ niệm 990 năm Thăng Long, người ta cho lát lại đường ven hồ Hoàn Kiếm bằng các viên gạch hình lục giác đều. Dưới đây là viên gạch lục giác đều có 2 mầu (các hình tròn cùng một mầu, phần còn lại là mầu khác).
Hãy tính diện tích phần gạch cùng mầu và tỉ số diện tích giữa hai phần đó,
biết rằng $AB = a = 15\ cm$.



Giải: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều là: $R = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Diện tích mỗi hình tròn là: $\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12}$

Diện tích 6 hình tròn là: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Tính trên máy: 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ (353.4291)

Diện tích toàn bộ viên gạch là: $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

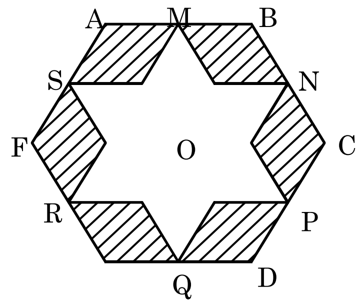
Diện tích phần gạch xọc là: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi a^2}{2}$.

Bấm tiếp phím: 3 $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (231.13797)

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 65.40

Đáp số: 353,42 cm^2 (6 hình tròn); 231,14 cm^2 (phần gạch xọc); 65,40 %

Bài 11. Viên gạch hình lục giác đều ABCDEF có hoa văn hình sao như hình vẽ, trong đó các đỉnh hình sao M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của lục giác.
Viên gạch được tô bằng hai mầu (mầu của hình sao và mầu của phần còn lại).
Biết rằng cạnh của lục giác đều là a = 16,5 cm.
+ Tính diện tích mỗi phần (chính xác đến 0,01).
+ Tính tỉ số phần trăm giữa hai diện tích đó.



Giải: Diện tích lục giác $ABCDEF$ bằng: $S_1 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lục giác nhỏ có cạnh là $b = \frac{a}{2}$, 6 cánh sao là các tam giác đều cũng có cạnh là $b = \frac{a}{2}$. Từ đó suy ra: diện tích lục giác đều cạnh b là S_2 bằng: $S_2 = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$, diện tích 6 tam giác đều cạnh b là S_3: $S_3 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

Tính trên máy: 3 $\boxed{\times}$ 16.5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (353.66) $\boxed{\text{Min}}$

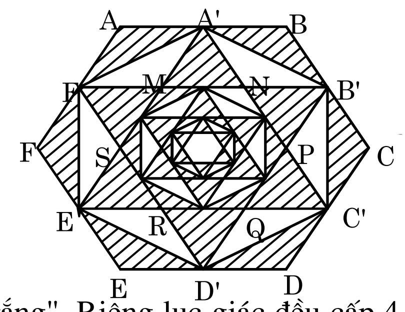
ấn tiếp phím: 3 $\boxed{\times}$ 16,5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (353.66)

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 100.

Vậy diện tích hai phần bằng nhau.

Lời bình: Có thể chứng minh mỗi phần có 12 tam giác đều bằng nhau, do đó diện tích hai phần bằng nhau. Từ đó chỉ cần tính diện tích lục giác đều và chia đôi.

Bài 12. Cho lục giác đều cấp 1 $ABCDEF$ có cạnh $AB = a = 36\ mm$. Từ các trung điểm của mỗi cạnh dựng một lục giác đều $A'B'C'D'E'F'$ và hình sao 6 cánh cũng có đỉnh là các trung điểm A', B', C', D', E', F' (xem hình vẽ). Phần trung tâm của hình sao là lục giác đều cấp 2 $MNPQRS$. Với lục giác này ta lại làm tương tự như đối với lục giác ban đầu $ABCDEF$ và được hình sao mới và lục giác đều cấp 3. Đối với lục giác cấp 3, ta lại làm tương tự như trên và được lục giác đều cấp 4. Đến đây ta dừng lại. Các cánh hình sao cùng được tô bằng một mầu (gạch xọc), còn các hình thoi trong hình chia thành 2 tam giác và tô bằng hai mầu: mầu gạch xọc và mầu "trắng". Riêng lục giác đều cấp 4 cũng được tô mầu trắng.



a) Tính diện tích phần được tô bằng mầu "trắng" theo *a*.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần "trắng" và diện tích hình lục giác ban đầu.

Giải: a) Chia lục giác thành 6 tam giác đều có cạnh là a bằng 3 đường chéo đi qua 2 đỉnh đối xứng qua tâm, từ đó ta có $S = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Chia lục giác $ABCDEF$ thành 24 tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$. Mỗi tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$ có diện tích bằng diện tích tam giác "trắng" $A'NB'$ (xem hình vẽ). Suy ra diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài bằng $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ diện tích lục giác cấp 1 $ABCDEF$.

Vậy diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài là: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. (1)

b) Tương tự với cách tính trên ta có: $MN = b = \frac{a}{2}$; $c = \frac{b}{2}$.

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 2 $MNPQRS$ là: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$. (2)

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 3 là: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$. (3)

Diện tích lục giác trắng trong cùng bằng (với $d = \frac{c}{2}$): $\frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$. (4)

Tóm lại ta có:

$$S_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^3};\quad S_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{3b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot 2^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^5};$$

$$S_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{3c^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot 4^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7};\quad S_4 = \frac{3d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot 8^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7}.$$

$$S_{\text{trắng}} = S_1+S_2+S_3+S_4 = 3a^2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{2}{2^7}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\ \frac{2^4+2^2+2}{2^6}.$$

ấn phím: 3 $\boxed{\times}$ 36 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (3367.11) $\boxed{\text{Min}}$

Vậy $S_{ABCDEF} = 3367{,}11\ mm^2$.

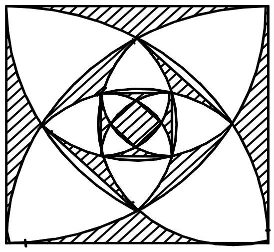
ấn tiếp phím: 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$

$\boxed{x^y}$ 6 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (1157.44)   Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1157{,}44$ mm^2.

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (34.38). Vậy $\dfrac{S_{\text{trang}}}{S_{\text{ABCDEF}}} \approx 34{,}38\%$.

Đáp số: 1157,44 mm^2 và 34,38%.

Bài 13. Cho hình vuông cấp một $ABCD$ với độ dài cạnh là $AB = a = 40\,cm$. Lấy A, B, C, D làm tâm, thứ tự vẽ các cung tròn bán kính bằng a, bốn cung tròn cắt nhau tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ cũng là hình vuông, gọi là hình vuông cấp 2. Tương tự như trên, lấy M, N, P, Q làm tâm vẽ các cung tròn bán kính MN, được 4 giao điểm E, F, G, H là hình vuông cấp 3. Tương tự làm tiếp được hình vuông cấp 4 $XYZT$ thì dừng lại (xem hình vẽ).



a) Tính diện tích phần hình không bị tô mầu (phần để trắng theo a).

b) Tìm tỉ số phần trăm giữa hai diện tích tô mầu và không tô mầu.

Giải: a) Tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 1 (bằng 4 viên phân trừ đi 2 lần diện tích hình vuông cấp 2).

$$S_1 = 4\cdot\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2b^2 \quad (b \text{ là cạnh hình vuông cấp 2}).$$

Tương tự, tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 2 và cấp 3:

$$S_2 = 4(\frac{\pi b^2}{4} - \frac{b^2}{2}) - 2c^2 \quad (c \text{ là cạnh hình vuông cấp 3}).$$

$$S_3 = (\frac{\pi c^2}{4} - \frac{c^2}{2}) - 2d^2 \quad (d \text{ là cạnh hình vuông cấp 4}).$$

Rút gọn: $S_1 = a^2(\pi - 2) - 2b^2$; $S_2 = b^2(\pi - 2) - 2c^2$; $S_3 = c^2(\pi - 2) - 2d^2$;

$$S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 = \pi(a^2 + b^2 + c^2) - 4(b^2 + c^2) - 2(a^2 + d^2).$$

b) Ta có: $\widehat{MCQ} = 30^0$; $b = QM = 2MK = 2a.\sin15^0 = a(2\sin15^0)$.

Tương tự: $c = 2b.\sin15^0 = a(2\sin15^0)^2$; $d = 2c.\sin15^0 = a(2\sin15^0)^3$.

Ký hiệu $x = 2\sin15^0$, ta có: $b = a.x$; $c = ax^2$; $d = ax^3$.

Thay vào công thức tính diện tích $S_{\text{trắng}}$ ta được:

$$S_{\text{trắng}} = \pi(a^2 + a^2x^2 + a^2x^4) - 4(a^2x^2 + a^2x^4) - 2(a^2 + a^2x^6)$$
$$= \pi a^2(1 + x^2 + x^4) - 4a^2(x^2 + x^4) - 2a^2(1 + x^6)$$

ấn phím: 15 $\boxed{\text{o,,,}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$

$\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 4 $\boxed{\times}$ 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$

$\boxed{[(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{)]}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\times}$ 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$

$\boxed{[(}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 6 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (1298.36) $\boxed{\text{Min}}$

Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1298{,}36$ cm^2.

Bấm tiếp phím: 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (301.64)

Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx 301{,}64$ cm^2.

Bấm tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (23.23)

Vậy $\dfrac{S_{\text{gach xoc}}}{S_{\text{trang}}} \approx 23{,}23\%$.

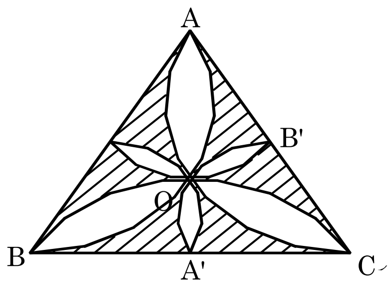
Đáp số: 1298,36 cm^2; 23,23%.

Bài 14. Cho tam giác đều ABC có cạnh là $a = 33{,}33\,cm$ và tâm là O. Vẽ các cung tròn qua hai đỉnh và trọng tâm O của tam giác được hình 3 lá. Gọi A', B', C' là các trung điểm các cạnh BC, CA và AB.

Ta lại vẽ các cung tròn qua hai trung điểm và điểm O, ta cũng được hình 3 lá nhỏ hơn.

a) Tính diện tích phần cắt bỏ (hình gạch xọc) của tam giác ABC để được hình 6 lá còn lại.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa phần cắt bỏ và diện tích của tam giác ABC.



Giải: $A'B'C'$ cũng là tam giác đều nhận O làm tâm (vì AA', BB', CC' cũng là các đường cao, đường trung tuyến của $\Delta\, A'B'C'$). 6 chiếc lá chỉ có điểm chung duy nhất là O, nghĩa là không có phần diện tích chung.

Mỗi viên phân có góc ở tâm bằng 60^0, bán kính bằng $\dfrac{2}{3}$ đường cao tam giác đều. Gọi S_1 là diện tích 1 viên phân. Khi ấy $S_1 = \dfrac{\pi OA^2}{6} - \dfrac{OA^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{OA^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Ta có: $OA = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi S là diện tích 3 lá lớn, S' là diện tích 3 lá nhỏ. Khi ấy:

$$S = 6S_1 = \frac{OA^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Gọi cạnh tam giác đều $A'B'C'$ là b, tương tự ta cũng có:

$$S' = \frac{b^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Tổng diện tích 6 lá là: $S + S' = (2\pi - 3\sqrt{3})\left(\dfrac{a^2}{6} + \dfrac{a^2}{24}\right)$.

Diện tích phần gạch xọc (phần cắt bỏ) là S''.

$$S'' = S_{\Delta ABC} - (S + S') = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - (2\pi - 3\sqrt{3})\left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24}\right) = \left(\frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi\right)a^2.$$

Tính $S_{\Delta ABC}$: 33.33 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ (481.0290040) $\boxed{\text{Min}}$

Tính S'' : 7 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 33.33 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ (229.4513446)

Vậy $S'' \approx 229{,}45$ cm^2.

ấn tiếp phím để tính $\dfrac{S''}{S_{ABC}}$: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 47.70

Đáp số: $S'' \approx 229{,}45\ \text{cm}^2$; $\dfrac{S''}{S_{ABC}} \approx 47{,}70\ \%$.

PHẦN VI. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 15. (Sở GD&ĐT Hà Nội, 1996, vòng trường, lớp 10)

1) Tính thể tích V của hình cầu bán kính $R = 3{,}173$.

2) Tính bán kính của hình cầu có thể tích $V = 137{,}45\ dm^3$.

Giải: 1) Ta có công thức tính thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Tính trên máy: 3.173 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ (133.8131596)

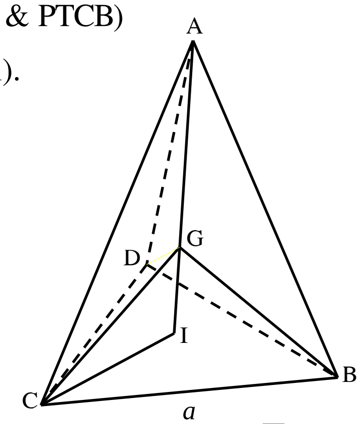
2) Từ công thức $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ suy ra $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

áp dụng: 3 $\boxed{\times}$ 137.45 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{\div}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 3 $\boxed{=}$ (3.20148673)

Đáp số: $V = 133.8134725\ dm^3$; $R = 3{,}201486733\ dm$.

Bài 16. (Sở GD & ĐT TP HCM, 1998, vòng chung kết, PTTH & PTCB)

Tính góc $\measuredangle HCH$ trong phân tử mêtan (H: Hydro, C: Carbon).



Giải: Gọi G là tâm tứ diện đều $ABCD$ cạnh là a, I là tâm tam giác đều BCD. Góc $\measuredangle HCH$ trong phân tử mêtan chính là góc $\measuredangle AGB$ của tứ diện $ABCD$. Khi ấy ta có: $IB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{\sqrt{3}})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

và $BG = AG = \frac{3}{4}AI = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Gọi E là điểm giữa AB. Khi ấy $\sin AGE = \frac{AE}{AG} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

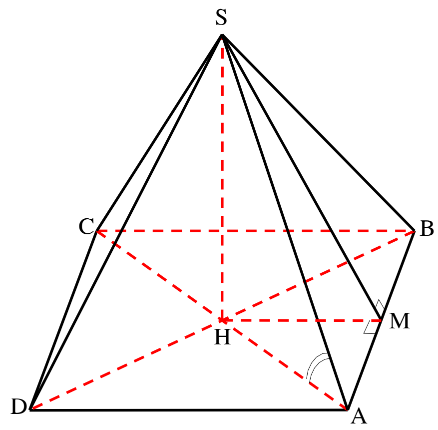
Tính AGB :2 $\boxed{a^{b/c}}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\overleftarrow{\text{o,,,}}}$ ($109^o28^o16.39$)

Đáp số: $109^o28'16"$.

Bài 17. (Sở GD & ĐT TP HCM, 1998, vòng chung kết, PTTH & PTCB)

Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$, biết trung đoạn $d = 3,415\,cm$, góc giữa cạnh bên và đáy bằng $42^o17'$. Tính thể tích.

Giải: Gọi cạnh đáy của chóp tứ giác đều $SABCD$ là a, chiều cao là h, φ là góc giữa cạnh bên và đáy. Khi ấy $\frac{SH}{AH} = tg\varphi$ hay $h = SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}tg\varphi$. Mặt khác,



$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = d^2 \text{ hay } (\frac{a\sqrt{2}}{2}tg\varphi)^2 + (\frac{a}{2})^2 = d^2.$$

Suy ra $a = \frac{2d}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$ và $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}tg\varphi = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{1+2tg^2\varphi}}tg\varphi$.

Thể tích tứ diện được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}ha^2 = \frac{1}{3}\frac{d\sqrt{2}tg\varphi}{\sqrt{1+2tg^2\varphi}}\frac{4d^2}{(1+2tg^2\varphi)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{d^2tg\varphi}{\sqrt{(1+2tg^2\varphi)^3}}.$$

Tính trên máy:

4 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{\times}$ 3.415 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{\times}$ 42 $\boxed{o,,,}$ 17 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\div}$

$\boxed{[(}$ 1 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{=}$ (15.795231442)

Đáp số: $V = 15,795\,cm^3$.

PHẦN VII. PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH $f(x)=0$

Nội dung phương pháp: Giả sử phương trình có duy nhất nghiệm trong khoảng (a,b). Giải phương trình $f(x)=0$ bằng phương pháp lặp gồm các bước sau:

1. Đưa phương trình $f(x)=0$ về phương trình tương đương $x=g(x)$.

2. Chọn $x_0 \in (a,b)$ làm nghiệm gần đúng ban đầu.

3.Thay $x=x_0$ vào vế phải của phương trình $x=g(x)$ ta được nghiệm gần đúng thứ nhất $x_1=g(x_0)$. Thay $x_1=g(x_0)$ vào vế phải của phương trình $x=g(x)$ ta được nghiệm gần đúng thứ hai $x_2=g(x_1)$. Lặp lại quá trình trên, ta nhận được dãy các nghiệm gần đúng

$$x_1=g(x_0)\,,\; x_2=g(x_1)\,,\; x_3=g(x_2)\,,\; x_4=g(x_3)\,,\ldots,\, x_n=g(x_{n-1})\,,\ldots$$

Nếu dãy các nghiệm gần đúng $\{x_n\}$, $n=1,2,\ldots$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\overline{x}$ thì (với giả thiết hàm $g(x)$ là liên tục trong khoảng (a,b)) ta có:

$$\overline{x}=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} g(x_{n-1})=g(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=g(\overline{x}).$$

Chứng tỏ $\overline{x}$ là nghiệm đúng của phương trình $x=g(x)$ và do đó $\overline{x}$ cũng là nghiệm đúng của phương trình $f(x)=0$.

Tính hội tụ: Có nhiều phương trình dạng $x=g(x)$ tương đương với phương trình $f(x)=0$. Phải chọn hàm số $g(x)$ sao cho dãy $\{x_n\}$ xây dựng theo phương pháp lặp là dãy hội tụ và hội tụ nhanh tới nghiệm. Ta có tiêu chuẩn sau.

Định lý. Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm $\overline{x}$ của phương trình $f(x)=0$ và phương trình $x=g(x)$ tương đương với phương trình $f(x)=0$. Nếu $g(x)$ và $g'(x)$ là những hàm số liên tục sao cho $|g'(x)|\le q<1\ \forall x\in[a,b]$ thì từ mọi vị trí ban đầu $x_0\in(a,b)$ dãy $\{x_n\}$ xây dựng theo phương pháp lặp $x_n=g(x_{n-1})$ sẽ hội tụ tới nghiệm duy nhất $\overline{x}$ trong khoảng (a,b) của phương trình $f(x)=0$.

Thí dụ 1. Giải phương trình $x^3-x^2-1=0$.

Phương trình này có duy nhất nghiệm trong khoảng $(1;1.5)$ và tương đương với $x=\sqrt[3]{x^2+1}$. Do $g(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ có đạo hàm $g'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$ thỏa mãn điều kiện $|g'(x)|=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<1$ trong khoảng $(1;1.5)$ nên dãy lặp $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n^2+1}$ hội tụ tới nghiệm duy nhất từ một điểm bất kỳ trong khoảng $(1;1.5)$.

Dãy lặp trên máy **Casio fx-570 MS**:

Khai báo hàm $g(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$:

SHIFT $\sqrt[3]{\ }$ (ALPHA X x^2 + 1)

Bắt đầu tính toán bằng CALC máy hiện X?

Khai báo giá trị ban đầu $x_0=1$ và bấm phím =.

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x = 1.465571232$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS hoặc **Casio fx-500 MS** :

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = 1$ bằng cách bấm phím $\boxed{1}$ $\boxed{=}$.

Khai báo dãy xấp xỉ $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n^2 + 1}$:

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{Ans}}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ 1\ \boxed{)}$$

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x = 1.465571232$.

Vậy nghiệm xấp xỉ (chính xác đến 9 chữ số thập phân) là $x = 1.465571232$.

Thí dụ 2. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $e^x + x - 3 = 0$.

Vì $f(x) = e^x + x - 3$ có đạo hàm $f'(x) = e^x + 1 > 0 \ \forall x$ nên nó đồng biến trên toàn trục số. Hơn nữa, $f(0) = -3$, $f(1) = e - 2 > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $(0,1)$.

Phương trình đã cho tương đương với $x = \ln(3 - x)$.

Đặt $g(x) = \ln(3 - x)$ thì $g'(x) = -\dfrac{1}{3 - x}$ nên $|g'(x)| < \dfrac{1}{2} \ \forall x \in (0,1)$.

Do đó dãy lặp $x_{n+1} = \ln(3 - x_n)$ hội tụ từ mọi điểm bất kỳ trong khoảng $(0,1)$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS:

Khai báo $g(x) = \ln(3 - x)$: $\boxed{\ln}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{X}$ $\boxed{)}$

Bắt đầu tính toán bằng $\boxed{\text{CALC}}$ máy hiện X?

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = \dfrac{1}{2}$: 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 và bấm phím $\boxed{=}$.

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$ ta cũng đi đến

$$x_{26} = x_{27} = x_{28} = 0.792059968.$$

Vậy nghiệm gần đúng là $0,792059968$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS hoặc **Casio fx-500 MS** :

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = \dfrac{1}{2}$: 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 và bấm phím $\boxed{=}$.

Khai báo dãy xấp xỉ $x_{n+1} = g(x_n) = \ln(3 - x_n)$: $\boxed{\ln}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{)}$

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x_{26} = x_{27} = x_{28} = 0,792059968$.

Vậy nghiệm xấp xỉ (chính xác đến 9 chữ số thập phân) là $\bar{x} = 0,792059968$

Nhận xét 1. Nếu chỉ đòi hỏi nghiệm chính xác đến 5 chữ số thập phân sau dấu phẩy thì chỉ cần sau 13 bước lặp ta đã đi đến nghiệm là 0,79206.

Nhận xét 2. Nếu ta đưa phương trình $e^x + x - 3 = 0$ về dạng $x = 3 - e^x$ thì $g(x) = 3 - e^x$ có đạo hàm $g'(x) = -e^x$ không thỏa mãn điều kiện

$$|g'(x)| \le q < 1 \ \forall x \in (0,1)$$

nên ta chưa thể nói gì được về sự hội tụ của dãy lặp.

Nhận xét 3. Chọn điểm xuất phát $x_0 = 2$ ([2], trang 62) thì cần nhiều bước lặp hơn.

Dùng lệnh solve để giải phương trình trên Maple:

> solve(exp(x)+x-3,x);

-LambertW(exp(3)) + 3

Máy cho đáp số thông qua hàm LambertW.

Ta có thể tính chính xác nghiệm đến 30 chữ số nhờ lệnh:

> evalf(",30);

.792059968430677001418395877 88

Lời bình: Maple cho ta đáp số đến độ chính xác tuỳ ý.

Thí dụ 3. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x + \ln x = 0$.

Vì $f(x) = x + \ln x$ là một hàm đồng biến ngặt trên $(0,+\infty)$. Hơn nữa $f(1) = 1 > 0$ và $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ nên phương trình có duy nhất nghiệm trên khoảng $(\frac{1}{e},1)$.

Phương trình đã cho tương đương với $x = e^{-x} = g(x)$.

Vì $g'(x) = -e^{-x}$ nên $|g'(x)| = e^{-x} \le \frac{1}{\sqrt[e]{e}} < 1$ với mọi $x \in (\frac{1}{e},1)$ nên dãy lặp $x_{n+1} = e^{-x_n}$ hội tụ.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS:

Khai báo $g(x) = e^{-x}$: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{(}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{X}$ $\boxed{)}$

Bắt đầu tính toán bằng $\boxed{\text{CALC}}$ máy hiện X? Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = \frac{1}{2}$:

1 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 và bấm phím $\boxed{=}$. Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x = 0,567143290$.

Vậy nghiệm gần đúng là $x = 0,567143290$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS hoặc **Casio fx-500 MS**:

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = \frac{1}{2}$: 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 và bấm phím $\boxed{=}$.

Khai báo $x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x_n}$: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{(}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{)}$

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x = 0,567143290$.

Vậy nghiệm gần đúng là $x = 0,567143290$.

Thí dụ 4. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x = \cos x := g(x)$.

Vì $f(x) = x - \cos x$ có đạo hàm $f'(x) = 1 + \sin x \ge 0$ $\forall x$ và chỉ bằng 0 tại một số điểm rời rạc $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ nên nó là hàm đồng biến ngặt. Do $f(0) = -1$ và $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ nên phương trình có duy nhất nghiệm trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$.

Hiển nhiên $|g'(x)| = |-\sin x| < \sin(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) < 1$ với mọi $x \in (0,\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ với ε đủ nhỏ nên dãy $x_{n+1} = \cos x_n$ hội tụ trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS:

ấn phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ (tính theo Radian).

Khai báo $g(x) = \cos x$: $\boxed{\cos}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{X}$

Bắt đầu tính toán bằng $\boxed{\text{CALC}}$ máy hiện X? Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = 1.5$ và bấm phím $\boxed{=}$. Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x = 0,739085133$ *radian*.

Dãy lặp trên máy Casio fx-500 MS hoặc Casio fx-570 MS:

Bấm phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ (tính theo Radian) trên **Casio fx-570 MS hoặc** $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ (tính theo Radian) trên **Casio fx-500 MS**.

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = 1.5$: 1.5 và bấm phím $\boxed{=}$.

Khai báo $x_{n+1} = g(x_n) = \cos x_n$: $\boxed{\cos}$ $\boxed{\text{Ans}}$

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x = 0.739085133$.

Thí dụ 5. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Vì $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ và $x^3 - 3x + 1 = 0$ là phương trình là bậc 3 nên nó có đúng 3 nghiệm trong các khoảng $(-2,-1)$, $(-1,1)$, $(1,2)$.

Phương trình trên tương đương với $x = \sqrt[3]{3x-1}$. Xét khoảng $(-2,-1)$.

Đặt $g(x) = \sqrt[3]{3x-1}$. Ta có $|g'(x)| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} < 1$ nên dãy $x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1}$ hội tụ trong khoảng $(-2,-1)$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS:

ấn phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ (tính theo số thực).

Khai báo $g(x) = \sqrt[3]{3x-1}$: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{X}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$

Bắt đầu tính toán bằng $\boxed{\text{CALC}}$ máy hiện X? Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = -1$ và bấm phím $\boxed{=}$.

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x_1 \approx -1,879385242$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS hoặc Casio fx-500 MS :

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = -1$: $\boxed{-}$ 1 và bấm phím $\boxed{=}$.

Khai báo $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{3x_n - 1}$: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x_1 \approx -1,879385242$.

Vậy một nghiệm gần đúng là $x_1 \approx -1,879385242$.

Dùng sơ đồ Horner để hạ bậc, sau đó giải phương trình bậc hai ta tìm được hai nghiệm còn lại là: $x \approx 1,53208886$ và $x \approx 0,3472963$.

Chú ý: Để tính nghiệm $x_2 \approx 0,3472963$ ta không thể dùng phương trình tương đương $x = \sqrt[3]{3x-1} = g(x)$ như trên vì $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$ không thỏa mãn điều kiện $|g'(x)| \le q < 1$ trong khoảng $(0,1)$ và dãy lặp $x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1}$ không hội tụ (Hãy thử khai báo giá trị ban đầu $x = 0,3472963$ và thực hiện dãy lặp $x_{n+1}=\sqrt[3]{3x_n-1}$ theo quy trình bấm phím trên, ta sẽ thấy dãy lặp hội tụ tới $x_1\approx -1,879385242$).

Nhận xét 1: Có thể giải phương trình $x^3-3x+1=0$ trên **Casio fx-570 MS** hoặc **Casio fx-570 MS** theo chương trình cài sẵn trên máy, quy trình bấm phím sau:

Vào $\boxed{\text{MODE}}$ giải phương trình bậc ba: $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{3}$

Khai báo hệ số: $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Máy hiện đáp số $x_1=1.53088886$.

Bấm tiếp phím $\boxed{=}$, máy hiện $x_2=-1.879385242$.

Bấm tiếp phím $\boxed{=}$, máy hiện $x_3=0.347296355$.

Vậy phương trình có ba nghiệm thực

$$x_1=1.53088886\ ;\ x_2=-1.879385242\ ;\ x_3=0.347296355.$$

Thí dụ 6. Tìm giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+3x^2-1$ với trục hoành (chính xác đến 10^{-7}).

Giải: Giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+3x^2-1$ với trục hoành chính là nghiệm của phương trình $f(x)=-x^3+3x^2-1=0$.

Vì $f(-1)=3$, $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(2,5)=2,125$ và $f(3)=-1$ nên phương trình có 3 nghiệm trong các khoảng $(-1;0)$, $(0;1)$ và $(2,5;3)$.

Phương trình $f(x)=-x^3+3x^2-1=0$ tương đương với $x=\sqrt[3]{3x^2-1}$.

Đặt $g(x)=\sqrt[3]{3x^2-1}$ thì $g'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2-1)^2}}$ và $|g'(x)|<0,9<1$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS:

Bấm phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ (tính theo số thực).

Khai báo $g(x)=\sqrt[3]{3x^2-1}$: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{X}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$

Bắt đầu tính toán bằng $\boxed{\text{CALC}}$ máy hiện X? Khai báo giá trị ban đầu $x_0=2,7$ và bấm phím $\boxed{=}$.

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$ ta đi đến nghiệm $x\approx 2,879385242$.

Dãy lặp trên máy Casio fx-570 MS hoặc **Casio fx-500 MS** :

Khai báo giá trị ban đầu $x_0=2,7$: 2.7 $\boxed{=}$.

Khai báo $x_{n+1}=g(x_n)=\sqrt[3]{3x_n^2-1}$: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$

Sau đó thực hiện dãy lặp $\boxed{=}$ ta cũng đi đến $x\approx 2,879385242$.

Vậy một nghiệm gần đúng là $x\approx 2,879385242$.

Hai nghiệm còn lại có thể tìm bằng phương pháp lặp hoặc phân tích ra thừa số rồi tìm nghiệm của phương trình bậc hai hoặc một lần nữa dùng phương pháp lặp.

Bài tập

Bài tập 1. Tìm khoảng cách ly nghiệm của các phương trình sau đây:

1) $x^4-4x-1=0$; 2) $x^3-9x^2+18x-1=0$; 3) $\lg x-3x+5=0$.

Bài tập 2 (Thi Giải toán trên máy tính bỏ túi, Sở GD & ĐT Tp. HCM, 24.11.1996).

Giải phương trình (tìm nghiệm gần đúng của phương trình):

1) $x^3-7x+4=0$; 2) $x^3+2x^2-9x+3=0$; 3) $32x^5+32x-17=0$;

4) $x^6-15x-25=0$; 5) $2x^5-2\cos x+1=0$; 6) $x^2+\sin x-1=0$;

7) $2\cos 3x-4x-1=0$; 8) $x^2-tgx-1=0$ $(-\frac{\pi}{2}<x<0)$; 9) Cho $-1<x<0$.

Tìm một nghiệm gần đúng của $\cos x+tg3x=0$;

10) (Câu hỏi thêm cho trường chuyên Lê Hồng Phong):

10a) $x^4-x^2+7x+2=0$; 10b) $x-\sqrt[6]{x}-1=0$.

Bài tập 3 (Thi Giải toán trên máy tính bỏ túi, Sở GD & ĐT Hà Nội, 18.12.1996).

Tìm một nghiệm gần đúng của phương trình:

1) $x^3+5x-1=0$; 2) $x^6-15x-25=0$; 3) $x^9+x-10=0$;

4) $x-\sqrt[6]{x}-1=0$; 5) $x^3-\cos x=0$; 6) $x-\cot gx=0$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$;

7) Tìm một nghiệm gần đúng (lấy 3 số lẻ) của phương trình: $x^2-tgx-1=0$;

8) Tìm một nghiệm gần đúng (lấy 2 số lẻ thập phân) của: $x^2+\sin x-1=0$.

Bài tập 4 (Thi Giải toán trên máy tính bỏ túi, Sở GD & ĐT Đồng Nai, 15.2.1998).

Tìm một nghiệm gần đúng của phương trình:

1) $x^3+5x-2=0$; 2) $x^9+x-7=0$; 3) $x+\sqrt[7]{x}-1=0$; 4) $x+\sqrt[7]{x}-2=0$.

Bài tập 5 (Thi Giải toán trên máy tính bỏ túi, Sở GD & ĐT Tp. HCM, 15.3.1998).

Tìm một nghiệm gần đúng của phương trình:

1) $3x-2\sqrt[8]{x}-5=0$; 2) $x^5-2x-\sin(3x-1)+2=0$;

3) Tìm nghiệm âm gần đúng của phương trình: $x^{10}-5x^3+2x-3=0$;

4) (Câu hỏi thêm cho trường chuyên Lê Hồng Phong):

Tìm một nghiệm gần đúng của phương trình $2^x+3^x+5^x=11^x$.

Bài tập 6. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên máy tính điện tử bỏ túi:

1) $x^3+3x^2-3=0$; 2) $x^3-x-1=0$; 3) $x^3+5x-1=0$;

4) $5x^3-20x+3=0$; 5) $8x^3+32x-17=0$; 6) $x^5-x-0,2=0$;

7) $x^3+x-1000=0$; 8) $x^7+5x-1=0$; 9) $x^{16}+x-8=0$;

10) $x-\sqrt{x}=1$; 11) $5x-\sqrt{x}-3=0$; 12) $\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}$;

13) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}=1$; 14) $3x-2\sqrt[6]{x}-5=0$; 15) $3x-2\sqrt[8]{x}-5=0$

16) $4^x+5^x=6^x$; 17) $13^x+11^x=19^x$; 18) $2^x+3^x+4^x=10^x$;

19) $x^3 + \log x - 2 = 0$; 20) $2\cos x - e^x = 0$; 21) $\cos x = \log x \ (0 < x < \frac{\pi}{2})$; 22) $\cos x - tgx = 0$.