CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Dạng cơ bản:

I. Kiến thức cần nhớ:

1. Dạng $a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \left(1 \neq a, b > 0\right)$

a. Nếu a=b thì f(x)=g(x).
b. Nếu a≠b thì logarit hoá cơ số a hoặc b 2 vế.

2. Dạng $\log_a f(x) = \log_b g(x) \quad \left(1 \neq a, b > 0\right)$.

a. Nếu a=b thì f(x)=g(x)>0.
b. Nếu a≠b và (a-1)(b-1)<1 thì tìm nghiệm duy nhất và chứng minh.
c. Nếu a≠b và (a-1)(b-1)>1 thì mũ hoá 2 vế.

II. Các bài tập áp dụng:

99. $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} = 12$

100. $\log_2 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$

101. $\log_2 \log_3 \log_4 x = \log_4 \log_3 \log_2 x$

102. $\log_2 \log_3 x + \log_3 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$

103. $\log_2 \log_x 3 \geq \log_3 \log_x 2$

104. $x^{\log_2(4x)} \geq 8x^2$

105. $x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4,5} = 10^{-2\lg x}$

106. $x^{\log_{x+1}(x-1)} + (x-1)^{\log_{x+1} x} \leq 2$

107. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$

108. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$

109. $2^{\log_5(x+3)} = x$

110. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

111. $8^{\frac{x}{x+2}} = 36.3^{2-x}$

112. $\dfrac{1}{3^{\sqrt{x^2+5x-6}}} > \dfrac{1}{3^{x+2}}$

113. $\dfrac{1}{3^{x+1}-1} \geq \dfrac{1}{1-3^x}$

114. $2^{\frac{1}{|2x-1|}} \geq 2^{\frac{1}{3x+1}}$

115. $1 < 5^{\left|x^2-x\right|} < 25$

116. $(0,08)^{\log_{x-0,5} x} \geq \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}(2x-1)}$

117. $\log_2 x + \log_{2x} 8 \le 4$

118. $\log_{5x} \dfrac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$

119. $\log_5\left(5x^2\right).\log_x^2 5 = 1$

120. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$

121. $\log_{\sin x} 4.\log_{\sin^2 x} 2 = 4$

122. $\log_{\cos x} 4.\log_{\cos^2 x} 2 = 1$

123. $\log_{2(x+1)} 4(x+1) + 2\log_{\frac{x+1}{2}}(x+1) = 5$

124. $\left|\log_3 x\right| - \log_3 x - 3 < 0$

125. $\log_{1/3}\left[\log_4\left(x^2-5\right)\right] > 0$

126. $\log_{1/3} x + 5/2 \ge \log_x 3$

127. $\log_x 2.\log_{2x} 2.\log_2 4x > 1$

128. $\log_3 \dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+\left|x-5\right|} \ge 0$

129. $\log_{\frac{x+6}{3}}\left(\log_2 \dfrac{x-1}{x+2}\right) > 0$

130. $\log_x 2.\log_{x/16} 2 > \dfrac{1}{\log_2 x - 6}$

131. $\log_{x^2} 2x \ge 1$

132. $\log_x \log_9\left(3^x - 9\right) \le 1$

133. $\log_x \dfrac{3x+2}{x+2} > 1$

134. $\log_{3x-x^2}(3-x) > 1$

135. $\log_x\left(5x^2 - 8x + 3\right) > 2$

136. $\log_x\left[\log_3\left(9^x - 6\right)\right] = 1$

137. $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$

138. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

139. $\dfrac{1}{\log_{1/3}\sqrt{2x^2-3x+1}} > \dfrac{1}{\log_{1/3}(x+1)}$

140. $\dfrac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1 \quad \left(0 < a \ne 1\right)$

141. $\dfrac{\log_a\left(35-x^3\right)}{\log_a\left(5-x\right)}>3 \quad với\, 0<a\neq 1$

142. $2^{2\sin x-2\cos x+1}-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\cos x-\sin x-\lg 7}+5^{2\sin x-2\cos x+1}=0$

143. $\dfrac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{2-5x-3x^2}\geq 0$

144. $2\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\log_{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=3$

145. $\log_2 x+\log_3 x+\log_5 x=\log_2 x\log_3 x\log_5 x$

146. $\log_{1/5}^2(x-5)+3\log_{5\sqrt{5}}(x-5)+6\log_{1/25}(x-5)+2\leq 0$

147. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $\log_{1/2}\left(x^2-2x+m\right)>-3$ có nghiệm và mọi nghiệm của nó đều không thuộc miền xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_x\left(x^3+1\right)\log_{x+1}x-2}$

148. Giải và biện luận theo m: $\log_x 100-\dfrac{1}{2}\log_m 100>0$

149. $\begin{cases}(x-1)\lg 2+\lg(2^{x+1}+1)<\lg(7.2^x+12)\\ \log_x\left(x+2\right)>2\end{cases}$

150. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}}}{\log_a\left(\dfrac{-x}{2}+\dfrac{5}{2}\right)}$ $\quad\left(0<a\neq 1\right)$

III. Các bài tập tự làm:

151. $\sqrt{\log_3^2 x-4\log_3 x+9}\geq 2\log_3 x-3$

152. $\sqrt{\log_{1/2}^2 x+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}\left(4-\log_{16}x^4\right)$

153. $\log_2\left(\sqrt{x^2+3}-x^2-1\right)+2\log_2 x\leq 0$

154. $\log_{|\cos x|}|\sin x|\geq\log_{\sin 2x}|\cos x|$

Dạng bậc hai:

I. Kiến thức cần nhớ:

1. Dạng $a_1.a^{2f(x)}+a_2.a^{f(x)}+a_3=0 \quad \left(a_1\neq 0, 1\neq a>0\right)$ đưa về phương trình bậc hai nhờ phép đặt ẩn phụ $t=a^{f(x)}$>0.
2. Dạng $a_1.(\log_a f(x))^2+a_2\log_a f(x)+a_3=0 \quad \left(a_1\neq 0, 1\neq a>0\right)$ đưa về phương trình bậc hai nhờ phép đặt ẩn phụ $t=\log_a f(x)$.
3. Với bất phương trình mũ và logarit cũng có phép đặt tương ứng, lưu ý khi gặp phương trình hay bất phương trình logarit mà chưa phải dạng cơ bản thì cần đặt điều kiện.

II. Các bài tập áp dụng:

155. $5^{\sqrt{x}} - 5^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$

156. $3^{x} + 9.3^{-x} - 10 < 0$

157. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{x} > 2\log_4 8$

158. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2/x} + 9.\left(\frac{1}{3}\right)^{2+1/x} > 12$

159. $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$

160. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$

161. $2^{2x} + 2^{-2x} + 2^{x} + 2^{-x} = 20\frac{5}{16}$

162. $\left(5+\sqrt{24}\right)^{x} + \left(5-\sqrt{24}\right)^{x} = 10$

163. $\left(3+\sqrt{5}\right)^{x} + 16\left(3-\sqrt{5}\right)^{x} = 2^{x+3}$

164. $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x} - 3\left(2-\sqrt{3}\right)^{x} + 2 = 0$

165. $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{x} \geq 14$

166. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} = 4$

167. $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\tan x} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\tan x} = 10$

168. $4^{1/x} + 6^{1/x} = 9^{1/x}$

169. $6.9^{x} - 13.6^{x} + 6.4^{x} = 10$

170. $5.4^{x} + 2.25^{x} - 7.10^{x} \leq 0$

171. $\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}^{\,x} + \sqrt[3]{4+\sqrt{15}}^{\,x} \geq 8^{\frac{x}{3}}$

172. $9^{2x-x^2+1} - 34.15^{2x-x^2} + 25^{2x-x^2+1} \geq 0$

173. $\log_{7-x^2}\frac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x\cos x} = \log_{7-x^2} 2$

174. $\log_{x+3}\left(3-\sqrt{1-2x+x^2}\right) = 1/2$

175. $\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2+x}} x = 2$

176. $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{(x+3)} 2} = 2 + \log_2(x+1)$

177. $\log_2\left(4^{x}+4\right) = x - \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-3\right)$

178. $\log_3\left(9^{x+1} - 4.3^{x} - 2\right) = 3x+1$

179. $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$

180. $\log_2\left(4^{x+1}+4\right).\log_2\left(4^x+1\right)=\log_{1/\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{8}}$

181. $\log_2\left(2^x-1\right)\log_{1/2}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$

182. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\geq\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

183. $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\leq 0$

184. $\log_3\left(\sin\frac{x}{2}-\sin x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)=0$

185. $\log_{27}\left(x^2-5x+6\right)^3=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\log_9\left(x-3\right)^2$

186. Tìm m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình
$2\log_4\left(2x^2-x+2m-4m^2\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+mx-2m^2\right)=0$ lớn hơn 1.

187. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+1\right)+\log_{\sqrt{5}-2}x=0$.

188. Tìm m để phương trình $2\log_4\left(2x^2-x+2m-4m^2\right)+\log_{1/2}\left(x^2+mx-2m^2\right)=0$ có 2 nghiệm u và v thoả mãn $u^2+v^2>1$

III. Các bài tập tự làm:

91. Tìm m để mọi nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$ cũng là nghiệm của bất phương trình $(m-2)^2x^2-3(m-6)x-(m+1)<0$. (*)

92. $\left(3+\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}-2^{1+2x-x^2}\leq 0$

93. $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+3$

94. $\dfrac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\leq 1$

95. $6.9^{2x^2-x}-13.6^{2x^2-x}+6.4^{2x^2-x}\leq 0$

96. $\log_2\left(x^2+2\right).\log_{(2-x)}2-2\geq 0$

97. $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}$

98. $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4$

Sử dụng tính đơn điệu:

I. Kiến thức cần nhớ:

1. Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi a>1 và nghịch biến khi 0<a<1.

2. Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến khi a>1 và nghịch biến khi 0<a<1.
3. Hàm số f(x) đơn điệu trên D và u, v thuộc D thì f(u)=f(v) tương đương u=v.
4. Nếu hàm số f(x) liên tục và đơn điệu trên (a, b) thì phương trình f(x)=0 có tối đa 1 nghiệm trên đó.

II. Các bài tập áp dụng:

189. $\sqrt{15}^x+1=4^x$

190. $2^x=3^{\frac{x}{2}}+1$

191. $9^x=5^x+4^x+2\sqrt{20}^x$

192. $2^{2x-1}+3^{2x}+5^{2x+1}=2^x+3^{x+1}+5^{x+2}$

193. $\left(\frac{5}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^{1/x}=2,9$ (*)

194. $1+2^{x+1}+3^{x+1}<6^x$

195. $3\log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)=2\log_2\sqrt{x}$

196. $2x^2-6x+2=\log_2\frac{2x+1}{(x-1)^2}$

197. $2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{x-2}{2x}$

198. $x^2-\left(3-2^x\right)x+2\left(1-2^x\right)=0$

199. $25.2^x-10^x+5^x>25$

200. $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20$

201. $\log_2 x+2\log_7 x=2+\log_2 x.\log_7 x$

202. $2\log_3\cot x=\log_2\cos x$

203. $\log_x(x+1)=\lg 1,5$

204. $\begin{cases}\log_2\sqrt{1+3\sin x}=\log_3(3\cos y)\\ \log_2\sqrt{1+3\cos y}=\log_3(3\sin x)\end{cases}$

205. $\begin{cases}\log_2\left(1+3\sqrt{1-x^2}\right)=\log_3\left(1-y^2\right)+2\\ \log_2\left(1+3\sqrt{1-y^2}\right)=\log_3\left(1-x^2\right)+2\end{cases}$

206. $\lg\left(x^2+x-6\right)+x^2+x-3=\lg(x+3)+3x$

207. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình $2\log_6\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)=\log_4 x$ thoả mãn bất đẳng thức $\cos\frac{\pi x}{16}<\sin\frac{16\pi}{x}$.

208. Tìm x sao cho bất phương trình sau đây được nghiệm đúng với mọi a:
$\log_x\left(a^2-4a+x+1\right)>0$

III. Các bài tập tự làm:

107. $x+\lg\left(x^2-x-6\right)=4+\lg(x+2)$

108. $\log_2 x+\log_3(x+1)=\log_4(x+2)+\log_5(x+3)$

109. Tìm nghiệm dương của bất phương trình $\dfrac{6-3^{x+1}}{x}>\dfrac{10}{2x-1}$ (*)

110. $\begin{cases}\log_x(6x+4y)=2\\ \log_y(6y+4x)=2\end{cases}$

111. $\log_2\left(\sqrt{x^2+3}-x^2-1\right)+2\log_2 x\le 0$

Dạng tổng hợp:

I. Một vài lưu ý:

II. Các bài tập áp dụng:

209. $(x+2)\log_3^2(x+1)+4(x+1)\log_3(x+1)-16=0$

210. $3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}+3-x=0$

211. Tìm a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt $2\log_3^2 x-\left|\log_3 x\right|+a=0$

212. $(x+1)\log_{1/2}^2 x+(2x+5)\log_{1/2} x+6\ge 0$

213. $x^4-8e^{x-1}>x\left(x^2e^{x-1}-8\right)$

214. $4x^2+3^{\sqrt{x}}.x+3^{1+\sqrt{x}}<2.3^{\sqrt{x}}.x^2+2x+6$

215. $\left|\ln(2x-3)+\ln\left(4-x^2\right)\right|=\left|\ln(2x-3)\right|+\left|\ln(4-x^2)\right|$

216. $\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\le\left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)\log_x\dfrac{2}{x}$

III. Các bài tập tự làm:

Trong các nghiệm (x, y) của bất phương trình $\log_{x^2+y^2}(x+y)\ge 1$ hãy tìm nghiệm có tổng x+2y lớn nhất

$\sqrt{2-5x-3x^2}+2x>2x.3^x\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2.3^x$

Tìm t để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x: $\log_2\left[\dfrac{t+1}{t+2}\left(x^2+3\right)\right]>1$

Tìm a để bất phương trình sau thoả mãn với mọi x: $\log_{\frac{1}{a}+1}\left(x^2+2|a|\right)>0$.

Tìm a để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x: $\dfrac{x^2.\log_2 a^2+2x+\log_a 2}{2x-3-x^2}<1$