PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH Oxy TRONG KỲ THI TSĐH

Biên soạn: GV Nguyễn Trung Kiên

Phần một: Bài tập liên quan đến xác định các yếu tố trong tam giác

Trong phần này ta thống nhất kí hiệu: Trong tam giác ABC:

- AM, AH, AD lần lượt là trung tuyến, đường cao, phân giác trong góc A
- G, I lần lượt là trọng tâm, tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác.
- S, p lần lượt là diện tích, nửa chu vi tam giác

Để giải quyết tốt bài tập trong phần này học sinh cần nắm chắc các vấn đề sau:

- Nếu $M(x_M;y_M)$ thuộc đường thẳng Δ:ax+by+c=0 $\Leftrightarrow ax_M+by_M+c=0$ hoặc

  $M(x_M;y_M)$ thuộc đường thẳng $\Delta\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}\Leftrightarrow M(x_0+at;y_0+bt)$
- Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là $d_{(M/\Delta)}=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- Nếu M là điểm bất kỳ thuộc cạnh AC của tam giác ABC thì điểm đối xứng với M qua phân giác trong AD luôn thuộc cạnh AB.(Tính chất rất quan trọng trong tam, giác ABC)
- Cho 2 đường thẳng $\Delta_1:a_1x+b_1y+c=0,\Delta_2:a_2x+b_2y+c=0$ góc tạo bởi Δ_1,Δ_2 kí hiệu

  $\varphi\Leftrightarrow\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, nếu $\Delta_1;\Delta_2$ vuông góc với nhau

  thì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$
- Tam giác ABC cân tại A $\Leftrightarrow$ cosB=cosC
- Trong tam giác vuông tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm cạnh huyền
- $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC.d_{(A/BC)}=p.r=\dfrac{abc}{4R}$
- Nếu đường thẳng Δ bất kỳ đi qua $M(x_M;y_M)$ thì phương trình

  $\Delta:a(x-x_M)+b(y-y_M)=0\Leftrightarrow ax+by-(ax_M+by_M)=0$ với $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của Δ và $(a^2+b^2\neq0)$
- Phương tích của điểm M bất kỳ với đường tròn (C) tâm I bán kính R là

$P_{(M/(C))}=\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=IM^2-R^2$ (Với A, B là giao điểm của cát tuyến qua M với đường tròn (C)

Nếu M nằm ngoài đường tròn thì $P_{(M/(C))}>0$

Nếu M nằm trong đường tròn thì $P_{(M/(C))}<0$

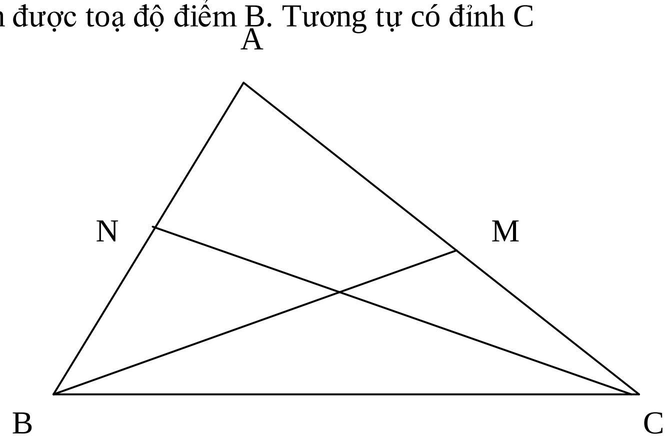
Nếu M thuộc đường tròn thì $P_{(M/(C))}=0$

Nếu MT là tiếp tuyến $P_{(M/(C))}=MT^2$

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP CẦN LƯU Ý:

1) Biết đỉnh A của tam giác ABC và 2 trung tuyến BM, CN. Viết phương trình các cạnh?

PP: Trước hết ta tìm tọa độ đỉnh $B(x_B;y_B)$: Vì $B \in BM$ ta có phương trình (1). Từ toạ độ B ta biểu diễn $N(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2})$ vì $N \in CN$ ta có phương trình (2). Giải hệ gồm 2 phương trình (1) (2) ta tìm được toạ độ điểm B. Tương tự có đỉnh C



Ví dụ 1) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có A(4;-1) và phương trình 2 đường trung tuyến BM: 8x-y-3=0, CN:14x-13y-9=0. Tính toạ độ các đỉnh B, C

HD Giải:

Giả sử $B(x_1;y_1); B \in BM \Rightarrow 8x_1 - y_1 - 3 = 0$.(1) Vì N là trung điểm AB nên

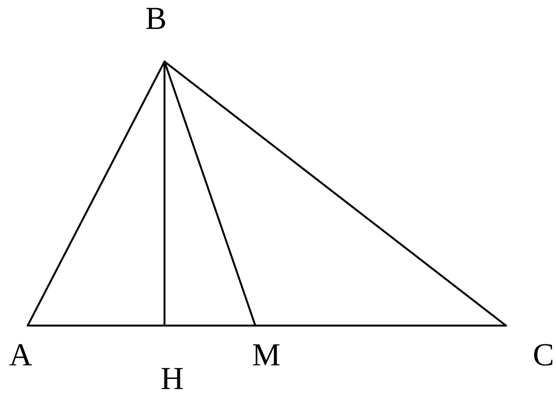
$N(\frac{4+x_1}{2};\frac{-1+y_1}{2}); N \in CN \Rightarrow 14\left(\frac{4+x_1}{2}\right) - 13\left(\frac{-1+y_1}{2}\right) - 9 = 0$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta có $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1;5)$

Tương tự ta có C(-4;-5)

2) Biết đỉnh A của tam giác ABC và trung tuyến BM, đường cao BH. Viết phương trình các cạnh?

PP: - Tìm toạ độ B là giao điểm của BM và BH. Viết phương trình AB, AC. Giao của AC và BM ta có toạ độ M dùng tính chất trung điểm suy ra toạ độ C.



Ví dụ 1) Tam giác ABC có đường trung tuyến $m_A : x - y + 1 = 0$, đường cao $h_A : x + 2y - 1 = 0$ đoạn AB có trung điểm M(1;1). Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC

Giải: $m_A : x - y + 1 = 0; h_B : x + 2y - 1 = 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1;2)$

Gọi $A(t;t+1) \in m_A, B(1-2u;u) \in h_B$.

Toạ độ trung điểm M của AB là $\begin{cases} x_M = \dfrac{t+1-2u}{2} \\ y_M = \dfrac{t+1+u}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{t+1-2u}{2} \\ 1 = \dfrac{t+1+u}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

Vậy A=(1;2), B=(1;0). Suy ra $\overrightarrow{AB} = (0;-2)$ và phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \end{cases}$

Đường thẳng AC đi qua A(1;2) có véc tơ chỉ phương $\vec{n}(1;2)$

nên có phương trình: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} \Leftrightarrow y = 2x$

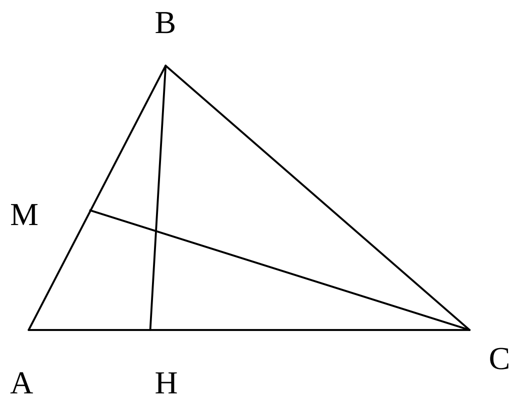
Giả sử $C(v;2v) \in AC$. Toạ độ trung điểm N của BC là: $N\left(\dfrac{1+v}{2};v\right)$

$N \in m_A \Leftrightarrow \dfrac{1+v}{2} - v + 1 = 0 \Leftrightarrow v = 3$. Vậy C=(3;6), $\overrightarrow{BC} = (2;6) = 2(1;3)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B(1;0) có véc tơ chỉ phương (1;3) là: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3}$.

3) Biết đỉnh A đường cao BH trung tuyến CM. Viết phương trình các cạnh tam giác?

PP: Viết phương trình AC.Giao điểm của AC và CM ta có toạ độ C. Gọi $B(x_B;y_B)$ vì M là trung điểm AM nên $M(\dfrac{x_B+x_A}{2};\dfrac{y_B+y_A}{2})$ M thuộc CM nên thay vào phương trình CM ta tìm được toạ độ điểm B.



Ví dụ 3) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có C(-4;-5) và phương trình đường cao AD:x+2y-2=0, đường trung tuyến BM: 8x-y-3=0. Tính toạ độ các đỉnh A,B

HD Giải:
Hs dễ dàng viết được phương trình (BC):2x-y+3=0. Tọa độ B là nghiệm của hệ
$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 8x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=5 \Rightarrow B(1;5)$

Giả sử A(x;y) $\Rightarrow x+2y-2=0$ (1) vì M là trung điểm AC nên
$M(\frac{-4+x}{2};\frac{-5+y}{2}); M \in BM \Rightarrow 8\left(\frac{-4+x}{2}\right)-\left(\frac{-5+y}{2}\right)-3=0$ (2). Giải hệ gồm 2 phương trình (1) và (2) ta có $x=4; y=-1 \Rightarrow A(4;-1)$

Ví dụ 2) Cho tam giác ABC có phương trình của trung tuyến xuất phát từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt là: $2x-5y-1=0; x+3y-4=0$. Đường thẳng BC đi qua điểm $K(4;-9)$. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết rằng đỉnh C nằm trên đường thẳng $d: x-y-6=0$

Giải: Gọi $B(4-3b;b), C(c;c-6)$ ta có $\overrightarrow{KB}(-3b;b+9); \overrightarrow{KC}(c-4;c+3)$

K,B,C thẳng hàng nên $\overrightarrow{KB}=k\overrightarrow{KC}$. Từ đó ta tính được $b=\frac{7k-9}{4}, c=\frac{27-5k}{4k}$

Gọi M là trung điểm của BC ta tính được $M\left(\frac{-21k^2+38k+27}{8k};\frac{7k^2-38k+27}{8k}\right)$

Vì M thuộc đường trung tuyến AM nên ta có tọa độ M thỏa mãn

phương trình $AM: -77k^2+258k-81=0$. Giải rat a được $k=3$ hoặc $k=\frac{27}{77}$

viết phương trình AC tìm A theo 2 trường hợp. Phần còn lại đơn giản các bạn tự giải.

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt có pt: $6x-5y-7=0; x-4y+2=0$. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng trọng tâm tâm của tam giác thuộc trục hoành và đường cao xuất phát từ đỉnh B đi qua điểm $E(1;-4)$

Giải:

Ta có $A(2;1)$. Gọi $G(a;0)$, vì G thuộc trung tuyến nên suy ra $G(-2;0)$

Gọi M là trung điểm BC ta có: $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}\Rightarrow M\left(-4;-\frac{1}{2}\right)$

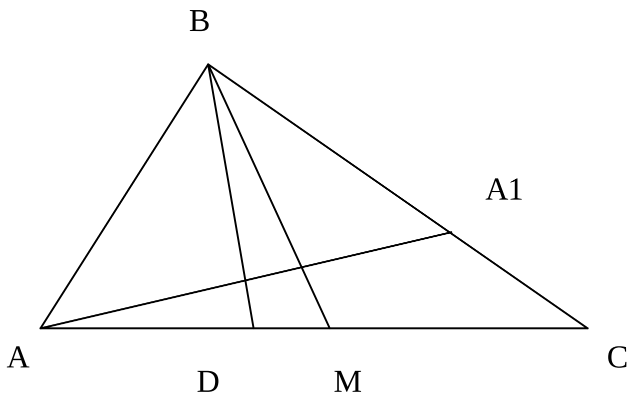
Viết được $BC: 5x+6y+23=0 \Rightarrow B(-1+6t;-3-5t); C(-7-6t;5t+2)$

Vì BE vuông góc với AC ta có điều kiện là $61t^2+42t-19=0 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=\frac{19}{61}$

Đến đây chia hai trường hợp để giải.

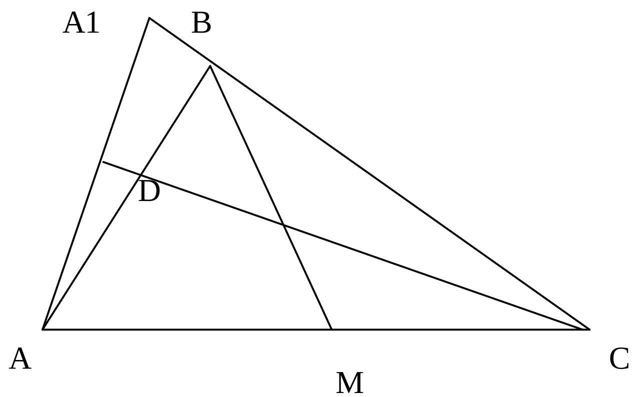
4) Biết đỉnh A trung tuyến BM, phân giác trong BD. Viết phương trình các cạnh?

PP: Tìm B là giao điểm của BM, BD. Viết phương trình AB. Tìm toạ độ A_1 đối xứng với A qua phân giác trong BD suy ra A_1 thuộc BC. Viết phương trình đường thẳng BC (đi qua B, A_1). Tìm toạ độ $C(x_C;y_C)$ vì C thuộc BC ta có phương trình (1) . M là trung điểm AC suy ra $M(\frac{x_C+x_A}{2};\frac{y_C+y_A}{2})$ Vì M thuộc trung tuyến BM ta có phương trình (2). Giải hệ (1) (2) ta có toạ độ C.



5) Biết đỉnh A trung tuyến BM phân giác trong CD. Viết phương trình các cạnh?

PP:Tìm toạ độ $C(x_C; y_C)$ Vì C thuộc CD nên ta có phương trình (1). M là trung điểm AC nên $M(\frac{x_C + x_A}{2}; \frac{y_C + y_A}{2})$. Vì M thuộc BM thay vào ta có phương trình (2). Giải hệ (1) (2) ta có toạ độ C. Tìm A_1 đối xứng với A qua phân giác trong CD. Viết phương trình BC (đi qua C và A_1). Lấy giao điểm BC và BM ta có toạ độ điểm B.

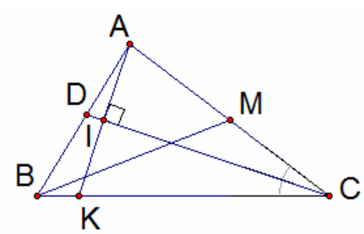


Ví dụ 1) Trong Oxy cho ΔABC có đỉnh A(1;2) đường trung tuyến BM: $2x + y + 1 = 0$ và phân giác trong CD: $x + y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải: Điểm $C \in CD: x + y - 1 = 0 \Rightarrow C(t; 1-t)$.

Suy ra trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2}; \frac{3-t}{2}\right)$.

$M \in BM: 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{t+1}{2}\right) + \frac{3-t}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -7 \Rightarrow C(-7; 8)$



Từ A(1;2), kẻ $AK \perp CD: x + y - 1 = 0$ tại I (điểm $K \in BC$).

Suy ra $AK: (x-1) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

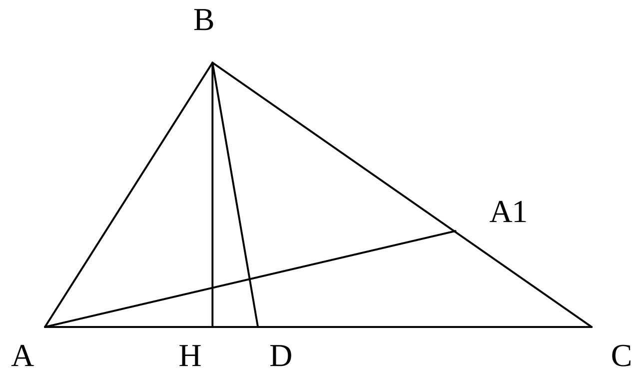
Tọa độ điểm I thỏa hệ: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1)$.

Tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm của AK $\Rightarrow$ tọa độ của $K(-1; 0)$.

Đường thẳng BC đi qua C, K nên có phương trình: $\frac{x+1}{-7+1} = \frac{y}{8} \Leftrightarrow 4x + 3y + 4 = 0$

6) Biết đỉnh A đường cao BH, phân giác trong BD. Viết phương trình các cạnh tam giác ?

PP: Viết phương trình AC. Tìm B là giao điểm của BH và BD viết phương trình AB.Tìm A_1 đối xứng với A qua phân giác trong BD. Viết phương trình BC(đi qua A_1 và B). Tìm C là giao điểm AC và BC



Ví dụ 1) Tam giác ABC có C(-3; 1), đường cao $h_A : x+7y+32=0$, phân giác $I_A : x+3y+12=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Giải: $h_A : x+7y+32=0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1;7)$

Vì $BC \perp h_A$ nên BC có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{n_1}(1;7)$. Đường thẳng BC đi qua C(-3;1) và có véc tơ chỉ phương $\vec{n}_1(1;7)$ có phương trình là $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{7}$

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+7y+32=0 \\ x+3yy+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow A=(3;-5)$

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua l_A thì $C_1 \in AB$

$l_A : x+3y+12=0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2(1;3)$. Vì $CC_1 \perp l_A$ nên CC_1 có véc tơ chỉ phương là $\vec{n}_2(1;3)$

Phương trình đường thẳng CC_1 đi qua điểm C(-3;1) và có véc tơ chỉ phương là $\vec{n}_2(1;3)$ là

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{3}$$

Toạ độ giao điểm I của CC_1 và l_A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{3} \\ x+3y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{21}{5} \\ y=-\dfrac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow I=\left(-\frac{21}{5};-\frac{13}{5}\right)$$

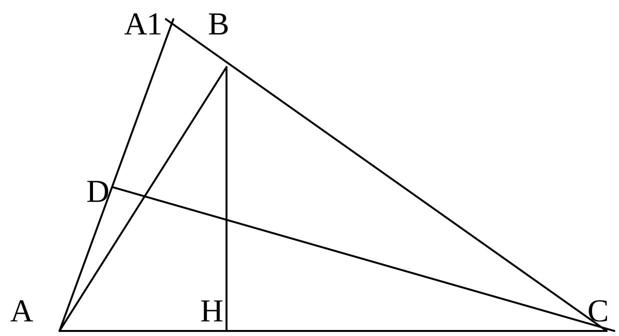
I là trung điểm của CC_1 nên $\begin{cases} x_{C_1}=2x_1-x_C=-\dfrac{27}{5} \\ y_{C_1}=2y_1-y_C=-\dfrac{31}{5} \end{cases} \Rightarrow C_1=\left(-\dfrac{27}{5};-\dfrac{31}{5}\right);\overrightarrow{C_1A}=\left(\dfrac{42}{5};\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{6}{5}(7;1)$

AB đi qua A(3;-5) và có véc tơ chỉ phương (7;1) nên phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y+5}{1}$

AC đi qua A(3;-5) và có véc tơ chỉ phương $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\left(-1;1\right)$ nên phương trình đường thẳng AC là: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{1}$.

7) Biết đỉnh A đường cao BH phân giác trong CD. Viết phương trình các cạnh tam giác?

PP: Viết phương trình AC. Tìm C là giao điểm của AC và CD.Tìm A_1 đối xứng với A qua phân giác trong CD. Viết phương trình BC (đi qua C và A_1). Tìm B là giao điểm của BH và BC.



Ví dụ 1) Cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A, đường cao kẻ từ B lần lượt là: $x-y+2=0; 4x+3y-1=0$. Biết hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng qua AB là H(-1;-1). Tìm tọa độ đỉnh C

Giải:

Kí hiệu đường cao là BK: 4x+3y-1=0, phân giác trong AD:x-y+2=0

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua AD thì H' thuộc AC . Tính được H'(-3;1)

Phương trình AC: 3x-4y+13=0. Tọa độ A là giao điểm của AD và AC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow A(5;7)$$

Đường cao CH qua H và vuông góc với HA nên CH: 3x+4y+7=0

Tọa độ C là giao điểm của AC và CH: $\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ 3x+4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow C\left(\frac{-10}{3};\frac{3}{4}\right)$

Ví dụ 2) Trong hệ trục toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $C(-2;3)$. Đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh A và đường phân giác trong góc B có phương trình lần lượt là: $3x-2y-25=0, x-y=0$ .Hãy viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác

Gọi đường cao kẻ từ A là AH: $3x-2y-25=0$

Đường phân giác trong góc B là BE: $x-y=0$

BC có phương trình : $2x+3y-5=0$

Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+3y-5=0\\ x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases} \Rightarrow B(1;1)$

Gọi F là điểm đối xứng của C qua BE. Do BE là phân giác nên F thuộc AB.
Xác định toạ độ F được F(3; -2).
Đường thẳng chứa cạnh AB là đường thẳng đi qua B, F.
Phương trình AB là: 3x + 2y -5 = 0.

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+2y-5=0\\ 3x-2y-25=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=-5\end{cases} \Rightarrow A(5;-5)$

Vậy phương trình AC là: 8x + 7y - 5 = 0

8) Biết đỉnh A hoặc trọng tâm G của tam giác ABC thuộc một đường thẳng (d) cho trước, Biết toạ độ 2 đỉnh B,C và diện tích tam giác ABC. Tìm toạ độ đỉnh A?

PP: Biểu diễn toạ độ A theo phương trình tham số của (d).(Nếu biết trọng tâm G thuộc đường thẳng d. thì biểu diễn G trước sau đó suy ra toạ độ A theo G). Dùng công thức tính diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.d_{(A/BC)}$ ta tính được toạ độ A.

(Chú ý: Đôi khi thay vì cho diện tích tam giác ABC giả thiết bài toán là cho diện tích tam giác GBC hoặc GAB, GAC. Khi đó các em học sinh cần chú ý các tam giác này đều có diện tích bằng 1/3 lần diện tích tam giác ABC)

Ví dụ 1) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có A(2;-1) ; B(1;-2) trọng tâm G của tam giác thuộc đường thẳng x+y-2=0. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng 13;5

HD giải:

Vì G thuộc đường thẳng $x+y-2=0$ nên $G(t;2-t)$ ta có phương trình AB: $x-y-3=0$;

$$\overrightarrow{AB}=(-1;1) \Rightarrow S_{\Delta ABG} = \frac{1}{2}d_{G/AB}.AB = \frac{|2t-3|}{2} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{13,5}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=6\\ t=-3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}G(6;-4)\\ G(-3;-1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}C(15;-9)\\ C(-12;18)\end{array}\right.$$

Ví dụ 2) Tam giác ABC có A(1;1), B(-2;5) trọng tâm G thuộc đường thẳng $\Delta_1 : 2x+3y-1=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $\Delta_2 : x+y-1=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải: $\Delta_1 : 2x+3y-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{1-2t}{3}\end{cases}$

Gọi $G\left(u;\dfrac{1-2u}{3}\right) \in \Delta_1, C(v;1-v) \in \Delta_2$

Vì A(1;1), B(-2;5) nên toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{-1+v}{3} \\ y_G = \dfrac{7-v}{3} \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u = \dfrac{-1+v}{3} \\ \dfrac{1-2u}{3} = \dfrac{7-v}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 16 \end{cases} \Rightarrow C(16;-15)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;4), AB = 5$

Đường thẳng AB đi qua điểm A(1;1) có véc tơ chỉ phương (-3;4) nên ta có phương trình:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{4} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0$$

Suy ra $d = d(C, AB) = \dfrac{|4.16-3.15-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{12}{5}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.d = \frac{1}{2}.5.\frac{12}{5} = 6$$

9) Biết toạ độ đỉnh A hoặc một cạnh của tam giác cân ABC đi qua M cho trước, Biết phương trình 2 cạnh không chứa điểm M. Tìm toạ độ các đỉnh?

PP: Gọi Δ là đường thẳng bất kỳ đi qua $M(x_M; y_M)$

$\Delta: a(x-x_M)+b(y-y_M)=0 \Leftrightarrow$ ax+by-(a$x_M + by_M) = 0$ với $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của Δ và ($a^2+b^2 \neq 0$).

Nếu Δ là một cạnh của tam giác cân ABC (giả sử cân tại A) thì cos(Δ,AB)=cos(Δ,AC) (nếu biết trước phương trình 2 cạnh là AC, AB và BC đi qua M). từ đó giải a theo b ta viết được phương trình của Δ

Ví dụ 1) Cho tam giác cân ABC có cạnh đáy BC:x-3y-1=0, cạnh bên AB:x-y-5=0. Đường thẳng AC đi qua M(-4;1). Tìm toạ độ đỉnh C?

HD giải:

Gọi $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của đường thẳng AC, Vì AC đi qua M(-4;1)

$\Rightarrow PT(AC): a(x+4)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow$ ax+by+(4a-b)=0 $(a^2+b^2 \neq 0)$

Vì tam giác ABC cân tại A nên

$$\cos\widehat{ABC} = \cos\widehat{ACB} \Leftrightarrow \cos(AB,BC)=\cos(AC,BC) \Leftrightarrow \frac{|1.1+(-3)(-1)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a+(-3)b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$4\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}|a-3b| \Leftrightarrow 7a^2+6ba-b^2=0$ coi a là ẩn ta có $\left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=\dfrac{b}{7} \end{array}\right.$

TH1: a=-b chọn a=1 suy ra b=-1 đường thẳng AC là x-y+5=0 loại vì AC song song với AB

TH2: $a=\frac{b}{7}$ chọn a=1;b=7 đường thẳng AC là x+7y-3=0. Khi đó C là giao điểm của AC và BC

nên toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x+7y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8/5 \\ y=1/5 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

Ví dụ 2) Trong mặt phẳng Oxy, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng d: x + 7y – 31 = 0, điểm N(7;7) thuộc đường thẳng AC, điểm M(2;-3) thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB.

HD giải :

Nếu Δ là một cạnh của tam giác cân ABC (giả sử cân tại A) thì $\cos(\Delta,AB)=\cos(\Delta,AC)$ (nếu biết trước phương trình 2 cạnh là AC, AB và BC đi qua M). từ đó giải a theo b ta viết được phương trình của Δ

Đường thẳng AB đi qua M(2;-3) nên có phương trình: a(x – 2) + b(y + 3) = 0, ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên: $\Leftrightarrow 12a^2 - 7ab - 12b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a=4b \\ 4a=-3b \end{array}\right.$.

Với: 3a = 4b,Chọn a = 4, b = 3 ta được d_1: 4x + 3y + 1 = 0.

Với: 4a = - 3b, chọn a =3, b = - 4 ta được d_2: 3x – 4y – 18 = 0.

+)Nếu lấy AB là d_1: 4x + 3y + 1 = 0 thì AC// d_2 nên AC là:3(x -7) –4(y –7) = 0 $\Leftrightarrow$ 3x –4y+7 = 0.

Hệ phương trình tọa độ A: $\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ A(-1;1)

Hệ phương trình tọa độ B: $\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ x+7y-31=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ B(-4;5).

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(-3;4), \overrightarrow{MB}=(-6;8) \Rightarrow \overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA} \Rightarrow$ M nằm ngoài đoạn AB (Thỏa mãn)

Hệ phương trình tọa độ C: $\begin{cases} 3x-4y+7=0 \\ x+7y-31=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ C(3;4).

+) Nếu lấy AB là d_2 sẽ không thỏa mãn.

Vậy A(-1;1), B(-4;5) và C(3;4).

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng toạ độ xOy, cho tam giác ABC cân tại A có:

AB: y+1=0

BC: x+y-2=0

Tính diện tích tam giác ABC biết AC đi qua điểm M(-1;2)

Giải: AB:y+1=0, M(-1;2), BC:x+y-2=0. Toạ độ điểm B là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(3;-1)$$

Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với BC thì d có véc tơ pháp tuyến(1;1) nên có phương trình: $1(x+1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$

Toạ độ giao điểm N của d và AB là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow N=(2;-1)$$

Tam giác ABC cân tại A nên A thuộc trung trực cùa MN. Gọi K là trung điểm của MN thì $K=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Đường trung trực của MN đi qua $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và có véc tơ pháp tuyến: $\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}=(1;-1)$ nên có phương trình: $1\left(x-\frac{1}{2}\right)-1\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x-y=0$

Toạ độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y+1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A=(-1;-1)$

Từ đó AC=4, AB=4 và dễ thấy $AB\perp AC$.

Suy ra: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=8$

10) Bài tập tổng hợp về đường thẳng

Để giải quyết các bài toán này học sinh cần linh hoạt trong vận dụng các tính chất. Trung tuyến, phân giác,đường cao.

Các tính chất của trọng tâm trực tâm, tâm vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp.

Ví dụ 1) Tam giác ABC có đường phân giác $l_A: x+y-3=0,$ đường trung tuyến $m_B: x-y+1=0,$ đường cao $h_C: 2x+y+1=0.$ Tính toạ độ các đỉnh của tam giác

Giải: $l_A: x+y-3=0, m_B: x-y+1=0$

$h_C: 2x+y+1=0$ có véc tơ chỉ phương $\vec{a}(-1;2)$.

Nhận xét: $l_A\perp m_B$

Giả sử $A=(t;3-t), B(u;u+1), C(v;-1-2v)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}(u-t;u+t-2)$

$AB\perp h_C \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}=0 \Rightarrow -(u-t)+2(u+t-2)=0 \Leftrightarrow u+3t-4=0$ (1)

Gọi M là trung điểm của AC, $M=\left(\frac{t+v}{2};\frac{2-t-2v}{2}\right)$

$M\in m_B \Rightarrow \frac{t+v}{2}-\frac{2-t-2v}{2}+1=0 \Leftrightarrow t+\frac{3}{2}v=0$ (2)

Vì $l_A\perp m_B$ nên B đối xứng với M qua l_A. Do đó trung điểm N của BM thuộc l_A

$N\in\left(\frac{2u+t+v}{4};\frac{2u-t-2v+4}{4}\right)\in l_A \Rightarrow \frac{2u+t+v}{4}+\frac{2u-t-2v+4}{4}-3=0 \Leftrightarrow 4u-v-8=0$ (3)

Giải hệ (1),(2),(3) ta được: $\begin{cases} u=\frac{32}{17} \\ t=\frac{12}{17} \\ v=-\frac{8}{17} \end{cases} \Rightarrow A=\left(\frac{12}{17};\frac{39}{17}\right), B=\left(\frac{32}{17};\frac{49}{17}\right); C=\left(-\frac{8}{17};-\frac{1}{17}\right)$

Ví dụ 2) Trong mp Oxy, tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $K(4;5)$, biết rằng $A(2;3)$. Viết pt các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải:

Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác có pt $(x-6)^2+(y-6)^2=25$.

Đường phân giác AK: $x-y+1=0$ cắt (I) tại $D(9;10)$

Dễ dàng chứng minh $D\hat{C}K=D\hat{K}C=\dfrac{\hat{A}+\hat{C}}{2}$ nên tam giác DKB cũng là tam giác cân.

Suy ra B, C là giao điểm của (I) và đường tròn tâm D bán kính DK có pt là $(x-9)^2+(y-10)^2=50$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2-12x-12y+47=0\\x^2+y^2-18x-20y+131=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-12x-12y+47=0\\6x+8y-84=0\end{cases}$

Giải hệ được $B(2;9),C(10;3)$ hoặc hoán vị suy ra BC: $3x+4y-42=0;AB:x=2;AC:y=3$

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Hai điểm A,B thuộc Ox. Phương trình cạnh BC là: $4x+3y-16=0$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 1.

Giải:

Giả sử $A(a;0);\left.\begin{array}{l}B\in Ox\\B\in BC:4x+3y-16=0\end{array}\right\}\Rightarrow B(4;0)$

Tam giác ABC vuông tại A, $C\in BC\Rightarrow C\left(a;\dfrac{16-4a}{3}\right)$

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}|a-4|\left|\dfrac{16-4a}{3}\right|$

Mà $S_{ABC}=p.r$ (với $p=\dfrac{AB+BC+AC}{2};r=1$)

$$=\frac{1}{2}\left(|a-4|+\left|\frac{16-4a}{3}\right|+\frac{5}{3}|a-4|\right)\Rightarrow\frac{2}{3}(a-4)^2=\frac{1}{2}|a-4|\left(1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow|a-4|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=7\end{array}\right.$$

Xét $a=1\Rightarrow A(1;0),C(1;4),B(4;0)\Rightarrow G\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$

Xét $a=7\Rightarrow A(7;0),C(7;-4),B(4;0)\Rightarrow G\left(6;-\dfrac{4}{3}\right)$

Ví dụ 4) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm là H(-1;4), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(-3;0) và trung điểm của cạnh BC là M(0;-3). Viết phương trình đường thẳng AB, biết B có hoành độ dương.

Giải: Giả sử N là trung điểm của AC, vì $\Delta ABH\sim\Delta MNI;HA//MI$ nên $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MI}$

Kết hợp với $2\overrightarrow{MI}=(-6;6),H(-1;4)$ ta có $A(-7;10)$. Từ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

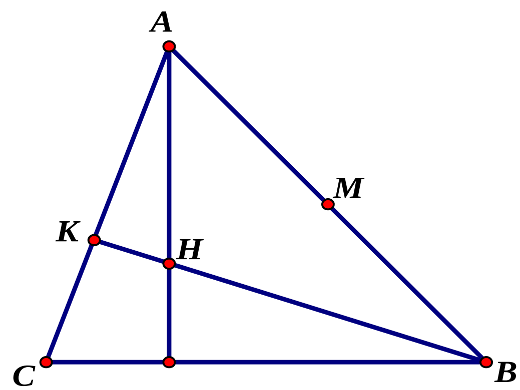
ABC và M là trung điểm BC, suy ra IA=AB và $IM \perp MB$

Do đó tọa độ $B(x;y)$ với $x>0$, thỏa mãn hệ: $\begin{cases}(x+3)^2+y^2=116\\ -3x+3(y+3)=0\end{cases} \Rightarrow B(7;4)$

Phương trình AB: $\dfrac{x+7}{7+7}=\dfrac{y-10}{4-10}$ hay $3x+7y-49=0$.

Ví dụ 5) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy* hãy viết phương trình các cạnh của tam giác *ABC* biết trực tâm $H(1;0)$ chân đường cao hạ từ đỉnh *B* là $K(0;\,2)$ trung điểm cạnh *AB* là $M(3;1)$.

+ Đường thẳng *AC* vuông góc với *HK* nên nhận $\overrightarrow{HK}=(-1;\,2)$ làm vtpt và *AC* đi qua *K* nên $(AC): x-2y+4=0.$ Ta cũng dễ có: $(BK): 2x+y-2=0$.



+ Do $A\in AC,\, B\in BK$ nên giả sử $A(2a-4;\,a),\, B(b;\,2-2b).$ Mặt khác $M(3;1)$ là trung điểm của *AB* nên ta có hệ:

$\begin{cases}2a-4+b=6\\ a+2-2b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=10\\ a-2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}.$

Suy ra: $A(4;\,4),\, B(2;\,-2).$

+ Suy ra: $\overrightarrow{AB}=(-2;\,-6)$, suy ra: $(AB): 3x-y-8=0$.

+ Đường thẳng *BC* qua *B* và vuông góc với *AH* nên nhận $\overrightarrow{HA}=(3;\,4)$, suy ra: $(BC): 3x+4y+2=0.$

KL: $(AC): x-2y+4=0,\ (AB): 3x-y-8=0,\ (BC): 3x+4y+2=0.$

Phần hai: Bài toán xác định yếu tố trong các hình đặc biệt:

Để xác định các yếu tố tọa độ đỉnh, diện tích, phương trình các cạnh …trong hình vuông hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành….Các em học sinh cần nắm chắc các tính chất đặc trưng của hình đó để vận dụng một cách linh hoạt

Ví dụ như:

- **Hình thoi ABCD tâm I thì tính chất đặc trưng là: Các cạnh bằng nhau; hai đường chéo vuông góc với nhau;**
- **Hình vuông ABCD tâm I thì các cạnh bên bằng nhau và vuông góc với nhau, đường chéo tạo với cạnh bên góc 45^0…**

Ví dụ 1) Trong hệ trục xOy cho hình bình hành ABCD có B(1;5), đường cao $(AH): x+2y-2=0$ Phân giác $A\hat{C}B$ là $x-y-1=0$. Tìm tọa độ A,C,D.

Giải: BC đi qua điểm B(1;5) và vuông góc với $\overrightarrow{u_{AH}}(-2;1) \Rightarrow$ BC có PT: $-2(x-1)+(y-5)=0$

$\Rightarrow$ tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}-2x+y-3=0\\ x-y-1=0\end{cases} \Rightarrow C(-4;-5)$

Gọi A' là điểm đối xứng của B qua phân giác $x-y-1=0(d), BA'\cap d=K$. (KB) đi qua B và vuông góc với $\vec{u}_d(1;1)\Rightarrow(KB)$ có PT: $1(x-1)+1(y-5)=0\Rightarrow$ tọa độ K là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x+y-6=0\\x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow K\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow A'(6;0)$. Do $A=CA'\cap AH$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x-2y-6=0\\x+2y-2=0\end{cases}\Rightarrow A(4;-1)$

Ví dụ 2) Cho hình chữ nhật ABCD có D(-1;3), đường thẳng chứa phân giác trong góc A là $x-y+6=0$. Tìm tọa độ B biết $\lvert x_A\rvert=\lvert y_A\rvert$ và dt(ABCD)=18

Giải:

Gọi E là điểm đối xứng của D qua $(d): x-y+6=0$, gọi $I=DE\cap d$

DI có PT: $x+y-2=0\Rightarrow$ Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y+6=0\\x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow I(-2;4)\Rightarrow E(-3;5)$

A thuộc đường tròn tâm I, bán kính $ID=\sqrt{2}$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x-y+6=0\\(x+2)^2+(y-4)^2=2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(-1;5)(l)\\A(-3;3)\end{array}\right.$

Ta có $(AE): x+3=0\Rightarrow B(-3;b)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(0;b-3)$

Mặt khác $AD=2\Rightarrow 18=2.AB\Rightarrow AB=9\Rightarrow\lvert b-3\rvert=9\Rightarrow B(-3;-6)\vee B(-3;-12)$

Xét $f(x,y)=x-y+6$. Do tính chất phân giác trong nên $f(B).f(D)<0\Rightarrow B(-3;-12)$

Ví dụ 3) Trong mp tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có cạnh AB, CD lần lượt nằm trên 2 đường thẳng $d_1: x-2y+5=0; d_2: x-2y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng AD và BC biết M(-3;3) thuộc đường thẳng AD và N(-1;4) thuộc đường thẳng BC

Giải:

Giả sử ta đã xác định được các đường thẳng AD và BC thỏa mãn bài toán

Đường thẳng AB đi qua điểm E(-5;0). Đường thẳng BC đi qua điểm N(-1;4) có pt dạng:

$a(x+1)+b(y-4)=0,(a^2+b^2\neq 0)$. Ta có: $AB.d(AB,CD)=S_{(ABCD)}=BC.d(AD,BC)$

$d(AB,CD)=d(AD,BC)\Leftrightarrow d(E,d_2)=d(M,BC)\Leftrightarrow-\frac{\lvert -4\rvert}{\sqrt{1+4}}=\frac{\lvert -2a-b\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow 11b^2-20ab-4a^2=0\Leftrightarrow b=2a$ hoặc $11b=-2a$

Với b=2a, chọn $a=1\Rightarrow b=2$. Suy ra $BC: x+2y-7=0$

Vì AD//BD $\Rightarrow AD: 1(x+3)+2(y-3)=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$

Với 11b=-2a, chọn $a=11\Rightarrow b=-2$. Suy ra $BC:11x-2y+19=0$

Vì AD//BD $\Rightarrow AD:11(x+3)-2(y-3)=0\Leftrightarrow 11x-2y+39=0$

Ví dụ 4) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho ba điểm $I(1;1),J(-2;2),K(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm hình vuông, J thuộc cạnh AB và K thuộc cạnh CD

Nhận xét: $I(1;1)$ là tâm hình vuông ABCD cạnh a $\Rightarrow d(I;AB)=d(I;CD)=\frac{a}{2}$

TH1: $AB//CD//Oy$. Dễ thấy $d(I;AB)=2\neq d(I;CD)=1$(loại)

TH2: AB có hệ số góc k suy ra $AB: y=k(x+2)+2, CD//AB$ và đi qua K nên

CD: $y=k(x-2)-2$

Ta có $a=AC=d(J;CD)=\frac{4|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$

$d(I;AB)=\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{a}{2}=\frac{2|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow 4(k+1)^2=(3k+1)^2\Leftrightarrow 5k^2-2k-3=0\Leftrightarrow k=1;k=-\frac{3}{5}$

Dễ thấy AB, CD phải có hệ số góc $k>0\Rightarrow k=1$. Vậy $AB: y=x+4; CD: y=x-4$

Đường thẳng d qua I và vuông góc với AB có pt:$(d): y=-(x-1)+1=-x+2$

Trung điểm M của AB là nghiệm hệ $\begin{cases} y=x+4 \\ y=-x+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

Trung điểm N của CD là nghiệm hệ $\begin{cases} y=x-4 \\ y=-x+2 \end{cases}\Leftrightarrow\{x=3y=-1$

Ta có $A(x;x+4)\in AB; a=4\sqrt{2}$

$AM^2=(x+1)^2+(x+1)^2=2(x+1)^2=\frac{a^2}{4}=8$

$|x+1|=2\Rightarrow x=1;x=-3\Rightarrow$ đỉnh $A,B:(1;5),(-3;1)$

Ta có $C(x,x-4)\in CD$

$AM^2=(x-3)^2+(x-3)^2=2(x-3)^2=\frac{a^2}{4}=8$

$|x-3|=2\Rightarrow x=5;x=1\Rightarrow$ đỉnh $C,D:(5;1),(1;-3)$

Vậy toạ độ 4 đỉnh: $(1;5),(-3;1)(5;1)(1;-3)$

Ví dụ 5) Đường tròn (C) nội tiếp hình vuông ABCD có pt:$(x-2)^2+(y-3)^2=10$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết cạnh AB đi qua $M(-3;-2)$ và $x_A>0$

Giải:

Phương trình đường thẳng đi qua $M(-3;-2)$ có dạng $ax+by+3a+2b=0$

Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$ nên:

$\sqrt{10}=\dfrac{|2a+3b+3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 10\left(a^2+b^2\right)=25\left(a+b\right)^2 \Leftrightarrow \left(a+3b\right)\left(3a+b\right)=0 \Leftrightarrow a=-3b$ hay $b=-3a$. Do đó pt $AB: x-3y-3=0$ hoặc $AB: 3x-y+7=0$

TH1: $AB: x-3y-3=0$. Gọi $\left(3t+3;t\right) \Rightarrow t>-1$ và do $IA^2=2.R^2=20$ nên

$\left(1+3t\right)^2+\left(t-3\right)^2=20 \Leftrightarrow 10t^2+10=20 \Leftrightarrow t=1$ hay $t=-1$

Suy ra $A\left(6;1\right) \Rightarrow C\left(-2;5\right)$ và $B\left(0;-1\right) \Rightarrow D\left(4;7\right)$

TH2: $AB: 3x-y+7=0$. Gọi $A\left(t;3t+7\right) \Rightarrow t>0$ và do $IA^2=2.R^2=20$ nên

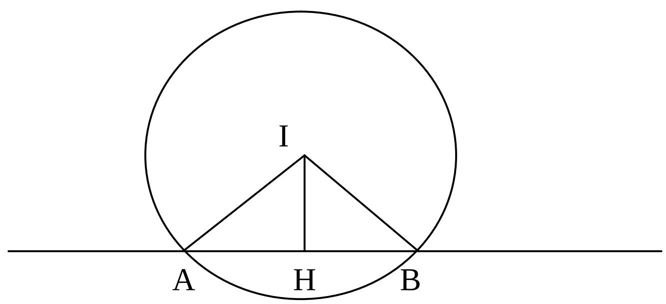
$\left(t-2\right)^2+\left(3t+4\right)^2=20 \Leftrightarrow 10t^2+20t+20=20 \Leftrightarrow t=0$ hay $t=-2$ (không thỏa mãn)

Phần ba: Một số dạng bài tập liên quan đến đường tròn

1) Viết phương trình đường thẳng qua M cắt đường tròn (C) tại A, B sao cho dây cung AB có độ dài bằng *l* cho trước

PP: Gọi $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của đường thẳng Δ đi qua M.

Phương trình đường thẳng $\Delta: a(x-x_M)+b(y-y_M)=0 \Leftrightarrow$ ax+by-(ax$_M+by_M)=0$ .Vì đường thẳng Δ cắt (C) theo dây cung *AB*=*l* nên $d_{(I/\Delta)}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{l^2}{4}}$ từ đó giải phương trình tính a theo b suy ra phương trình đường thẳng Δ



Ví dụ 1) Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(2;1) cắt đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ theo dây cung MN có độ dài bằng 4

HD giải:

Đường tròn (C) có tâm I(-1;2) bán kính R=3

Gọi $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của đường thẳng Δ đi qua A.

PT Δ: a(x-2)+b(y-1)=0 $\Leftrightarrow$ ax+by-2a-b=0 (*)

Vì dây cung MN có độ dài bằng 4 nên $d_{(I/\Delta)}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{MN}{2}\right)^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Hay $\dfrac{|-a+2b-2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |b-3a|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2-6ab-4b^2=0$

$$2a^2-3ab-b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{(3+\sqrt{11})b}{4} \\ a=\dfrac{(3-\sqrt{11})b}{4} \end{array}\right.$$

TH1: $a=\dfrac{(3+\sqrt{11})b}{4}$ chọn b=4; a=$(3+\sqrt{11})$ thay vào (*) ta có phương trình đường thẳng Δ:

$(3+\sqrt{11})x+4y-2\sqrt{11}-10=0$

TH2: $a=\dfrac{(3-\sqrt{11})b}{4}$ chọn b=4;a=$(3-\sqrt{11})$ thay vào (*) ta có phương trình đường thẳng Δ:

$(3-\sqrt{11})x+4y+2\sqrt{11}-10=0$

Ví dụ 2) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) : $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng Δ qua M(1;-3) cắt (C) tại A, B . Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Gọi H là trung điểm AB. Đặt $AH=x$ $(0<x<2\sqrt{5})$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{2}IH.AB=8 \Leftrightarrow x\sqrt{20-x^2}=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \text{ (ktm vì } AB<IA) \end{array}\right.$$

nên $AH=4 \Rightarrow IH=2.$ Pt đường thẳng qua M: $a(x-1)+b(y+3)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$

$\Leftrightarrow ax+by+3b-a=0.$

Ta có $d(I,\ AB)=IH=2 \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow a(3a-4b)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a=\dfrac{4}{3}b$.

* Với $a=0$ ta có pt $\Delta: y+3=0.$

* Với $a=\dfrac{4}{3}b.$ Chọn $b=3$ ta có $a=4$. Suy ra pt $\Delta: 4x+3y+5=0.$

Vậy có hai đường thẳng Δ thỏa mãn là $y+3=0$ và $4x+3y+5=0.$

Ví dụ 3) Cho đường tròn (C) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và N(2;1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua N cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho

a) Dây cung AB lớn nhất
b) Dây AB ngắn nhất

Giải:

Dễ thấy điểm N nằm trong đường tròn

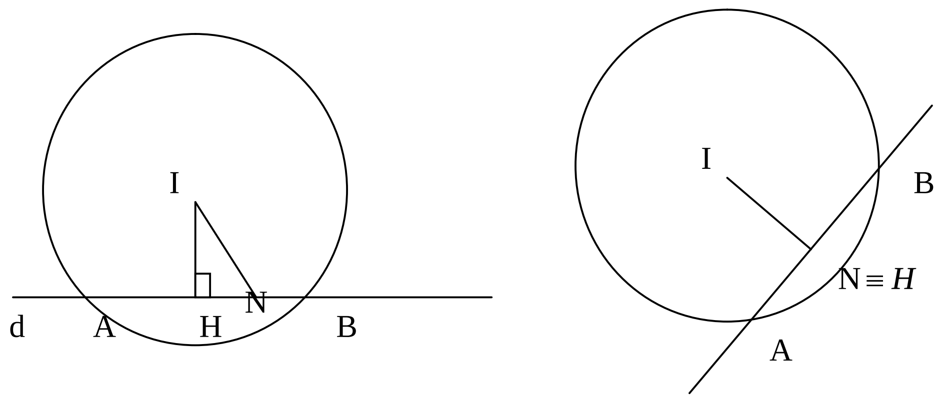
Dây cung AB lớn nhất khi AB là đường kính của đường tròn suy đường thẳng d đi qua N và tâm I của đường tròn (HS tự làm)

Vẽ IH vuông góc với đường thẳng d tại H ta có AB=2AH

$AB=2\sqrt{R^2-IH^2} \Rightarrow AB\min \Leftrightarrow IH\max \Leftrightarrow \text{H} \equiv \text{N}$

Vậy AB ngắn nhất khi đường thẳng d vuông góc với IN hay d nhận IN làm véc tơ pháp tuyến

Ta có $\overrightarrow{IN}(-1;1) \Rightarrow PT(d): -1(x-2)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -x+y+1=0$



2) Tìm điều kiện để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) theo dây cung AB sao cho diện tích tam giác IAB bằng một số cho trước.

PP: Điều kiện để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) là $d_{(I/\Delta)} < R$

Khi đó $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin A\hat{I}B = \frac{1}{2}R^2.\sin A\hat{I}B \Rightarrow d_{(I/\Delta)} = R.\cos\left(\frac{A\hat{I}B}{2}\right)$. Từ đó dùng công thức khoảng cách để tìm điều kiện.

Ví dụ 1) Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ và đường tròn $(T): x^2+y^2-2x+2y-7=0$. Chứng minh rằng Δ cắt (T) tại hai điểm phân biệt A, B và tìm tọa độ điểm C trên (T) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\left(3+\sqrt{2}\right)\sqrt{7}$.

$PT(T):(x-1)^2+(y+1)^2=9$ có tâm $I(1;-1)$ và bán kính R=3

Ta có $d(I;\Delta) = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt (T) tại hai điểm phân biệt A,B

Giả sử $C(x;y)\in(T)$ nên $(x-1)^2+(y+1)^2=9(1)$

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}d(C;\Delta).AB = \frac{1}{2}d(C;\Delta).\sqrt{R^2-d^2(I;\Delta)} = \sqrt{7}.d(C;\Delta)$

Ta lại có:

$$d(C;\Delta) = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\left|(x-1)(y+1)-2\right|} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1.(x-1)+1.(y+1)+2\right|\right)$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}-2\right) = 3+\sqrt{2}(do(1))$$

Do đó $S_{ABC} = \left(3+\sqrt{2}\right)\sqrt{7} \Leftrightarrow d(C;\Delta) = 3+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=9 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} \\ (x-1)(y+1)-2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -1 - -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

3) Tìm điều kiện để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại A, B sao cho diện tích tam giác AIB lớn nhất

PP: Điều kiện để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) là $d_{(I/\Delta)} < R$

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} IA.IB.\sin A\hat{I}B = \dfrac{1}{2} R^2.\sin A\hat{I}B \Rightarrow S\max \Leftrightarrow \sin A\hat{I}B = 1 \Leftrightarrow \Delta AIB$ vuông cân tại I

$\Rightarrow AB = R\sqrt{2} \Rightarrow d_{(I/\Delta)} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2}$. Từ đó dùng công thức khoảng cách để tìm điều kiện.

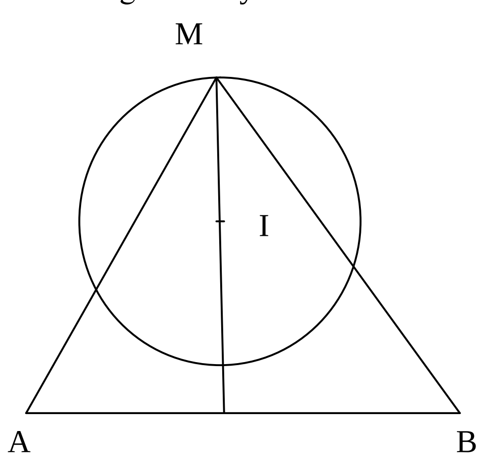
4) Cho đường tròn (C) và 2 điểm A, B cho trước. Tìm M thuộc đường tròn sao cho diện tích, hoặc chu vi tam giác MAB lớn nhất, nhỏ nhất.

PP: Cách 1: Xét M thuộc đường tròn $\Rightarrow M(a + R\sin\alpha; b + R\cos\alpha)$ (Với I(a;b))

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.d_{(M/AB)} \Rightarrow S\max \Leftrightarrow d_{(M/AB)}\max$, Từ đó viết phương trình đường thẳng qua AB. Tính khoảng cách, dùng Bất đẳng thức Bunhiacôpxki để tìm điều kiện. Tương tự ta giải cho trường hợp Smin

Cách 2: Xét điểm M bất kỳ thuộc đường tròn $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.d_{(M/AB)} \Rightarrow S\max \Leftrightarrow d_{(M/AB)}\max$,

$S\min \Leftrightarrow d\min$. Từ đó suy ra các điểm M cần tìm chính là giao điểm của đường thẳng Δ đi qua tâm I vuông góc với AB và đường tròn (C). Từ đó viết phương trình đường thẳng tìm các giao điểm, tính khoảng cách suy ra điểm M cần tìm



Ví dụ 1) Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$. Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng $(\Delta): x + y - 3 = 0$ với đường tròn (C). Hãy tìm các điểm

A trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABC có chu vi lớn nhất.

Bằng cách giải hệ tạo bởi PT (C) và (Δ) ta tìm được các giao điểm B(3;0), C(1;2)
Vì B, C cố định nên chu vi của tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi L=AB+AC lớn nhất.
Viết lại $(C):(x-1)^2+y^2=4$ do $A(x;y)\in(C)$ nên $\exists\alpha\in[0;2\pi]:\begin{cases}x=1+2\sin\alpha\\ y=2\cos\alpha\end{cases}$

Từ đó:

$$L=\sqrt{(2\sin\alpha-2)^2+4\cos^2\alpha}+\sqrt{4\sin^2\alpha+(2\cos\alpha-2)^2}=2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-2\sin\alpha}+\sqrt{1-2\cos\alpha}\right)$$

$$L\le 2\sqrt{2}\sqrt{(1+1)(1-\sin\alpha+1-\cos\alpha)}=4\sqrt{2-\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\le 4\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

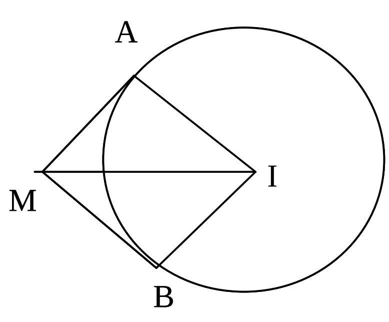
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1-\sin\alpha}=\sqrt{1-\cos\alpha}\\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\cos\alpha\\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\frac{5\pi}{4}$

5) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đi qua M cho trước.

PP: Gọi $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của đường thẳng tiếp tuyến Δ: Vì tiếp tuyến đi qua M nên phương trình của Δ: $\Delta: a(x-x_M)+b(y-y_M)=0\Leftrightarrow$ ax+by-($ax_M+by_M)=0$. Vì Δ là tiếp tuyến nên $d_{(I/\Delta)}=R$. Từ đó giải a theo b và viết phương trình đường thẳng.

6) Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ cho trước sao cho qua M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác IAB max.

PP: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}R^2.\sin\widehat{AIB}\Rightarrow S\max\Leftrightarrow\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow MAIB$ là hình vuông $\Leftrightarrow MI=R\sqrt{2}$. Từ đó tính toạ độ điểm M theo phương trình tham số của Δ. Giải điều kiện $MI=R\sqrt{2}\Rightarrow M$



Ví dụ 1) Trong mp Oxy cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$. Tìm trên đường thẳng Δ điểm M sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tiếp xúc với (C) tại A, B mà tam giác IAB có diện tích lớn nhất

HD giải:

Từ phương trình của (C) ta suy ra $I(2;3); R=1$

$dt(IAB)=\frac{1}{2}IA.IB.\sin A\hat{I}B=\frac{1}{2}R^2\sin A\hat{I}B\le\frac{1}{2}R^2 \Rightarrow dt\max \Leftrightarrow \sin A\hat{I}B=1$

$\Leftrightarrow MAIB$ Là hình vuông cạnh IA=R=1$\Rightarrow MI=R\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Vì M thuộc đường thẳng Δ nên

M(x;4-x)$\Rightarrow MI^2=(x-2)^2+(1-x)^2=2\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ Vậy có 2 điểm M thoả mãn bài toán

$M\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right); M\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$

Ví dụ 3) Trong mp Oxy Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(2;-2), B(4;0), C(3;\sqrt{2}-1)$ và đường thẳng $\Delta: 4x+y-4=0$. Tìm trên đường thẳng Δ điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) qua M tiếp xúc với (C) tại N và diện tích tam giác NAB lớn nhất

HD giải:

Dễ dàng kiểm tra tam giác ABC vuông tại C hay AB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là hình chiếu của N lên AB thì

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.NH\le\frac{1}{2}AB.R$ dấu bằng xảy ra khi N là trung điểm dây AB hay tiếp tuyến tại N song song với AB.

Có $\vec{AB}(2;2)\Rightarrow AB=2\sqrt{2}\Rightarrow R=\sqrt{2}$ gọi Δ_1 là tiếp tuyến qua N suy ra phương trình của Δ_1 là $: x-y+c=0$

Vì Δ_1 là tiếp tuyến nên $d_{I/\Delta_1}=R\Leftrightarrow\frac{|3+1+c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow c=-2\vee c=-6\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_1: x-y-2=0\\ \Delta_1: x-y-6=0\end{array}\right.$

M là giao điểm của tiếp tuyến Δ_1 với đường thẳng $\Delta: 4x+y-4=0$

từ đó tìm được 2 điểm M thoả mãn là M(2;-4) hoặc M(6/5;-4/5)

7) Qua điểm M cho trước nằm ngoài đường tròn viết phương trình tiếp tuyến MA,MB đến đường tròn. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A,B. Tính diện tích tam giác MAB

PP: Goi T(x;y) là tiếp điểm. Vì T thuộc đường tròn (C) nên ta có $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ (1). T là tiếp điểm nên MT vuông góc với IT $\Rightarrow\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT}=0$ từ đó tính toạ độ các véc tơ $\overrightarrow{MT},\overrightarrow{IT}$ dùng công thức tích vô hướng để thiết lập phương trình bậc 2 theo x, y dạng $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ (2). Lấy (1) –(2) ta có phương trình đường thẳng cần tìm. (Chú ý đường thẳng qua A,B gọi là trục đẳng phương của đường tròn (C)). Tìm giao điểm A, B từ đó tính diện tích tam giác MAB.

Ví dụ 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (T) có phương trình: $x^2+y^2-8x+12=0$ và I(8;5). Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (T) đồng thời đường thẳng AB đi qua I. (A, B là hai tiếp điểm)

Xét $A(x;y)$ là tiếp điểm

$\Rightarrow A\in$ đường tròn: $x^2+y^2-8x+12=0(1)$ tâm $J(4;0); R=2$

$\vec{JA}(x-4;y)$

$M \in)Oy \Rightarrow M(0;m)$

$\vec{MA}(x;y-m)$. MA là tiếp tuyến $\Rightarrow MA \perp JA$

$\Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{JA}=0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-my=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-my=0$ (2)

$\Rightarrow$ tọa độ A thỏa mãn hệ:

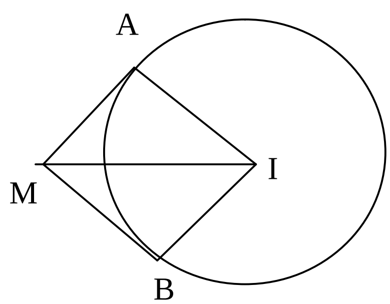
$\begin{cases} x^2+y^2-8x+12=0 \\ x^2+y^2-4x-my=0 \end{cases} \Rightarrow 4x-my-12=0$

$\Rightarrow$ A,B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x-my-12=0$

A, B qua $I(8;5) \Leftrightarrow 32-5m-12=0 \Rightarrow m=4$

Vậy M(0;4) TMĐK

Ví dụ 2) Trong Oxy cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ đường thẳng $d: x-y+2=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) và diện tích tứ giác MAIB bằng $6\sqrt{2}$.(Trong đó I là tâm đường tròn. A, B là các tiếp điểm)



Giải:

Đường tròn (C) có $I(1;-2); R=3$.

$dt(MAIB)=2dt(MAI)=6\sqrt{2}$

$\Rightarrow dt(MAI)=3\sqrt{2} \Rightarrow MA=\dfrac{2dt(MAI)}{R}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow MI=\sqrt{MA^2+R^2}=\sqrt{17}$

Gọi $M(a;a+2) \Rightarrow \vec{IM}=(a-1;a+4) \Rightarrow MI^2=2a^2+6a+17=17 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-3 \end{array}\right.$

Vậy $M(0;2), M(-3;-1)$ (TMĐK)

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho đường tròn $(C):(x+3)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=25$ và đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$. Từ điểm A thuộc đường thẳng Δ kẻ 2 tiếp tuyến với đường tròn (C), gọi M,N là các tiếp điểm. Xác định tọa độ đỉnh A biết độ dài cạnh MN bằng 6.

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I\left(-3;\frac{5}{4}\right)$, bán kính R=5.

Giả sử AI cắt MN tại H. ta có: $MH \perp IH, MH = 3$

Suy ra IH=4. Do đó $AI = \frac{MI^2}{IH} = \frac{25}{4}$. $A \in \Delta \Rightarrow A(a;2a+1)$

Từ $AI = \frac{25}{4} \Rightarrow (a+3)^2 + \left(2a - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{625}{16} \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -3 \end{array}\right.$

Vậy A(2;5) hoặc A(-3;-5).

8) Qua điểm M cho trước viết phương trình đường thẳng Δ cắt đường tròn tại A, B sao cho $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB}$.

PP: Từ điều kiện $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB}$ tính độ dài dây cung AB. Sau đó quy bài toán về dạng1.

- Hoăc xét các trường hợp đặc biệt của đường thẳng qua M là $x=x_0$ và $y=y_0$ với $M(x_0;y_0)$
- Sau đó xét đường thẳng $y=k(x-x_0)+y_0$. Giao điểm của đường thẳng và đường tròn là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình đường thẳng và đường tròn. Rút y theo x thế vào phương trình đường tròn ta có phương trình bậc 2 theo x. Dùng định lý viet để tính tổng và tích các nghiệm (Chính là hoành độ của A và B) Kết hợp điều kiện $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB}$ để tính k

Ví dụ 1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(-1;14) và đường tròn (S) tâm I(1;-5), bán kính R=13. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt (S) tại M,N mà khoảng cách từ M đến AI bằng một nửa khoảng cách từ N đến AI.

Giải: Nhận xét: A nằm ngoài đường tròn. Khoảng cách từ M đến AI bằng một nửa khoảng cách từ N đến AI $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}AN$

Phương trình đường thẳng qua A: $\begin{cases} x = -1 + mt \\ y = 14 + nt \end{cases} \Rightarrow M(-1+mt_1;14+n_1), N(-1+nt_2;14+nt_2)$

$\overrightarrow{AM} = (mt_1;nt_1), \overrightarrow{AN} = (mt_2;nt_2)$. Mà $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}t_2$

Phương trình giao điểm của Δ và đường tròn:

$(-2+mt)^2 + (19+nt)^2 = 169 \Leftrightarrow (m^2+n^2)t^2 + (-4m+38n)t + 196 = 0$

Áp dụng Viet: Từ đó tính được: $m = -n$ hoặc $m = \frac{281}{433}n$.

Với $m = -n$ chọn m=1,n=-1. Ta có PT đường thẳng: $x + y - 13 = 0$.

Tương tự trường hợp còn lại.

Ví dụ 2) Cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ và M(2;2). Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt đường tròn (C) tại A và B sao cho MA=3MB

Giải:

Dễ dàng tính được $P_{(M/(C))} = -6$ suy ra điểm M nằm trong đường tròn

$P_{(M/(C))} = \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = IM^2 - R^2 \Rightarrow -MA.MB = -6 \Rightarrow 3MB.MB = 6 \Rightarrow MB = \sqrt{2} \Rightarrow MA = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = MA + MB = 4\sqrt{2}$. Bài toán trở thành viết phương trình đường thẳng qua M cắt đường tròn (C) theo dây cung $AB = 4\sqrt{2}$ (HS tự làm)

9) Bài tập tổng hợp về đường tròn:

Để giải quyết tốt các dạng bài tập tổng hợp về đường tròn học sinh cần nắm chắc các nội dung:

- Quan hệ đường thẳng và đường tròn
- Quan hệ hai đường tròn
- Tiếp tuyến của đường tròn
- Hệ số góc của đường thẳng..

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1) Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp I(4;0), đường cao $h_A : x + y - 2 = 0,$ trung tuyến $m_A : x + 2y - 3 = 0.$ Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải: $h_A : x + y - 2 = 0, m_A : x + 2y - 3 = 0$.

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$. Vậy A(1;1)

Gọi M là trung điểm của BC thì $IM \perp BC \Rightarrow IM \,//\, h_A$

Đường thẳng IM đi qua I(4;0), có véc tơ pháp tuyến (1;1) nên có phương trình:

$$1(x-4) + 1(y-0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

$M \in m_A \cap IM$ nên toạ độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M(5;-1)$

Vì BC là đường thẳng đi qua M(5;-1) và vuông góc với h_A nên BC có pt: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{1}$

Gọi $B(t+5; t-1)$. Ta có IA=IB hay $(t+1)^2 + (t-1)^2 = (1-4)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 2t^2 + 2 = 10 \Leftrightarrow t = \pm 2$

Do đó B=(7;1) hoặc B=(3;-3)

Không mất tính tổng quát, ta giả sử B=(7;1), C=(3;-3). Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (6;0), \overrightarrow{AC} = (2;-4)$

Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng AC: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

Ví dụ 2) Cho 2 đường tròn: $(\varepsilon): x^2 + y^2 = 16, (\varepsilon'): x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$ cắt nhau tại 2 điểm A và A’, trong đó A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A lần lượt cắt (ε) và (ε') tại các điểm thứ hai B, C sao cho A là trung điểm của BC.

Giải: $(\varepsilon): x^2 + y^2 = 16$ có tâm O(0;0), bán kính R=4

$$(\varepsilon'): x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 20$$

(ε') có tâm O’(5;0), bán kính R’= $2\sqrt{5}$.

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+y^2-10x+5=0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+10x=16 \\ x^2+y^2=16 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{21}{10} \\ y=\dfrac{\sqrt{1159}}{10} \end{cases}$

Vậy $A=\left(\dfrac{21}{10};\dfrac{\sqrt{1159}}{10}\right)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O, O' trên Δ, I là trung điểm của OO'. Khi đó:
$I=\left(\dfrac{5}{2};0\right), HA=\dfrac{1}{2}AB, AK=\dfrac{1}{2}AC$.

Vì A là trung điểm của BC nên A là trung điểm của HK. Do đó Ai là đường trung bình của hình thang vuông OKHO'. Suy ra: $\overrightarrow{AI}=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{\sqrt{1159}}{10}\right)$ vuông góc với Δ

Đường thẳng Δ đi qua $A\left(\dfrac{21}{10};\dfrac{\sqrt{1159}}{10}\right)$ có véc tơ pháp tuyến $\left(4;-\sqrt{1159}\right)$ nên Δ có véc tơ chỉ phương $\left(\sqrt{1159};4\right)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-\dfrac{21}{10}}{\sqrt{1159}}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{1159}}{10}}{4}$

Ví dụ 3) Cho hai đường tròn $(\varepsilon_1): x^2+y^2-2x-y-14=0; (\varepsilon_2): x^2+y^2-4x+2y-20=0.$ Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (ε_1) tại A và B, cắt (ε_2) tại C và D sao cho $AB=2\sqrt{7}, CD=8$

Giải: $(\varepsilon_1): x^2+y^2-2x-2y-14=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=16$

(ε_1) có tâm $O_1(1;1)$, bán kính $R_1=4$.

$(\varepsilon_2): x^2+y^2-4x+2y-20=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=25; (\varepsilon_2)$ có tâm $O_2(2;-1)$, bán kính $R_2=5$

Từ giả thiết ta có

$$d(O_1,\Delta)=\sqrt{R_1^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{16-7}=3$$

$$d(O_1,\Delta)=\sqrt{R_2^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3$$

Xét trường hợp O_1, O_2 nằm khác phía với Δ. Khi đó, Δ đi qua trung điểm $I\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ của O_1, O_2 và $d(O_1,\Delta)=3.$ Dễ thấy trường hợp này không xảy ra

Vậy đường thẳng Δ song song với O_1O_2 cách O_1O_2 1 khoảng bằng 3.

Vì $\overrightarrow{O_1O_2}=(1;-2)$ nên Δ có véc tơ pháp tuyến (2;1)

Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: 2x+y+c=0$

$d\left(O_1,\Delta\right)=3 \Leftrightarrow \dfrac{|3-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=3\sqrt{5-3} \\ c=-3\sqrt{5-3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $2x+y+3\sqrt{5}-3=0$ hoặc $2x+y-3\sqrt{5}-3=0$

Ví dụ 4) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho đường tròn hai đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua *M*(1; 0). Viết phương trình đường thẳng qua *M* cắt hai đường tròn (C), (C') lần lượt tại *A, B* sao cho *MA= 2MB.*

+ Gọi tâm và bán kính của (*C*), (*C'*) lần lượt là *I*(1; 1) , *I'*(-2; 0) và $R=1, R'=3$, đường thẳng (*d*) qua *M* có phương trình $a(x-1)+b(y-0)=0 \Leftrightarrow ax+by-a=0, (a^2+b^2\neq 0)(*)$.

+ Gọi *H, H'* lần lượt là trung điểm của *AM, BM.*

Khi đó ta có:

$MA=2MB \Leftrightarrow \sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{I'A^2-I'H'^2} \Leftrightarrow 1-\left(d(I;d)\right)^2=4[9-\left(d(I';d)\right)^2]$,

$IA>IH$.

$\Leftrightarrow 4\left(d(I';d)\right)^2-\left(d(I;d)\right)^2=35 \Leftrightarrow 4.\dfrac{9a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow \dfrac{36a^2-b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow a^2=36b^2$

Dễ thấy $b\neq 0$ nên chọn $b=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-6 \end{array}\right.$.

Kiểm tra điều kiện $IA>IH$ rồi thay vào (*) ta có hai đường thẳng thoả mãn.

Phần ba: Các dạng bài tập liên quan đến Elip, Hipebol, Parabol

Để giải quyết tốt các dạng bài tập trong phần này học sinh cần nắm chắc các vấn đề sau:

I) Đối với phần Elíp $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$**.**

- Trục lớn 2a; Trục nhỏ 2b; Tiêu cự f=2c với $c=\sqrt{a^2-b^2}$; Tâm sai (E) kí hiệu là $e=\dfrac{c}{a}$
- Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$; Tiêu điểm phải $F_2(c;0)$
- Nếu điểm M thuộc Elip thì M(asinα ;bcosα)
- Bán kính qua tiêu điểm trái kí hiệu là $MF_1=a+\dfrac{c}{a}x_M$;Bán kính qua tiêu điểm phải kí hiệu

$MF_2=a-\dfrac{c}{a}x_M$

II) Đối với Hipebol $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

- Trục thực 2a; Trục ảo 2b; Tiêu cự f=2c; $c=\sqrt{a^2+b^2}$;Tâm sai (E) kí hiệu là $e=\dfrac{c}{a}$
- Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$; Tiêu điểm phải $F_2(c;0)$

- Nếu điểm M thuộc Hipelbol thì M$\left(\dfrac{a}{\cos\alpha};b\tan\alpha\right)$

- Bán kính qua tiêu điểm trái kí hiệu là $MF_1=|a+\dfrac{c}{a}x_M|$;Bán kính qua tiêu điểm phải kí hiệu $MF_2=|a-\dfrac{c}{a}x_M|$

III) Đối với Parabol: $y^2=2px$

- Tiêu điểm F$\left(\dfrac{p}{2};0\right)$

- Đường chuẩn $x=-\dfrac{p}{2}$

- Bán kính qua tiêu $MF=x_M+\dfrac{p}{2}$

- Nếu điểm M thuộc Parabol thì $M(\dfrac{y^2}{2p};y)$

Ta xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 1) Trong mặt phẳng toạ độ cho elip (E) có phương trình $4x^2+9y^2=36$ và điểm M(1;1). Lập phương trình đường thẳng qua M và cắt elip (E) tại 2 điểm M_1M_2 sao cho $MM_1=MM_2$.

Giải: Ta có: (E): $4x^2+9y^2=36\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Từ đó suy ra (E) có tâm đối xứng O, trục lớn Ox có độ dài 2a=6, trục nhỏ Oy có độ dài 2b=4.
Để ý rằng, OM= $\sqrt{2}<b=2<a=3$ nên suy ra điểm M(1;1) nằm bên trong (E). Do đó đường thẳng d đi qua M luôn luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2.
Dễ thấy, vì M(1;1)$\notin$ Ox nên đường thẳng (d): x=1 đi qua M và song song với trục Oy cắt (E) tại 2 điểm M_1, M_2 thì $MM_1\neq MM_2$.
Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (d) qua M. Phương trình của (d) có dạng: (d): y=kx+1-k.
Hoành độ X_{M_1},X_{M_2} hai giao điểm M_1, M_2 của (d) và (E) là nghiệm của phương trình:

$$4x^2+9\left(kx+1-k\right)^2-36=0\Leftrightarrow\left(9k^2+4\right)x^2-18k\left(k-1\right)x+9k^2-18k-27=0$$

Vì vậy $MM_1=MM_2$ nên suy ra M là trung điểm của đoạn M_1M_2. Do đó:

$$X_{M_1}+X_{M_2}=2X_M\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=\frac{18k\left(k-1\right)}{9k^2+4}=2\Leftrightarrow k=-\frac{4}{9}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là: (d): $y=-\dfrac{4}{9}\left(x-1\right)+1\Leftrightarrow 4x+9y-13=0$

Ví dụ2) Trong mặt phẳng toạ độ, cho (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

a) Tìm mối liên hệ giữa k và m để đường thẳng (d): y=kx+m, $k\in R$ tiếp xúc với (E)
b) Khi (d) tiếp xúc với (E), gọi giao điểm của (d) với các đường thẳng x=5 và x=-5 là M và N. Tính diện tích tam giác FMN theo k, trong đó F là tiêu điểm của (E) có hoành độ dương.
c) Xác định k để tam giác FMN có diện tích nhỏ nhất.

Giải:

a) Elip (E) đã cho có tâm đối xứng O, trục lớn 2a=10, trục nhỏ 2b=8, tiêu điểm có hoành độ dương là F(3;0)

Phương trình đường thẳng (d) được viết lại: (d) : kx-y+m=0

(d) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: $25k^2+16=m^2$

b) Gọi (d_1): x=-5, (d_2): x=5. Dễ thấy: $(d)\cap(d_1)=M(-5;m-5k);(d)\cap(d_2)=N(5;m+5k)$

Ta có $\vec{FM}=(-8;m-5k);\vec{FN}=(2;m+5k)$ nên $\vec{FM}.\vec{FN}=0\Rightarrow\Delta FMN$ vuông tại F. Do đó:

$$S_{\Delta FMN}=\frac{1}{2}\left|\vec{FM}\right|.\left|\vec{FN}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left[64+(m-5k)^2\right]\left[4+(m-5k)^2\right]}$$

c) Dễ thấy rằng: $S_{\Delta FMN}\geq\frac{1}{2}\left[2.8+(m+5k)(m-5k)\right]=\frac{1}{2}\left(16+m^2-25k^2\right)=16$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k=\pm\frac{3}{5}$

Vậy tam giác FMN có diện tích nhỏ nhất bằng 16(đvdt) khi $k=\pm\frac{3}{5}$

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng (d) cắt (E) tại 2 điểm B và C. Tìm toạ độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải: Xét hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ x-\sqrt{2}y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\sqrt{3}-1\\ y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{3}-1\\ y=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy đường thẳng (d) cắt (E) tại 2 điểm $B\left(\sqrt{3}-1;\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right);C\left(-\sqrt{3}-1;\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$

Lấy điểm $A(x_A,y_A)\in$(E) ta có: $\frac{x^2{}_A}{8}+\frac{y^2{}_B}{4}=1$ (1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, ta có: $dt\left(\Delta ABC\right)=\frac{1}{2}BC.AH$, trong đó

$BC=3\sqrt{2}, AH=d\left(A;\left(d\right)\right)=\frac{\left|x_A-y_A\sqrt{2}+2\right|}{\sqrt{3}}$

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất.
Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki, ta có:

AH=$\frac{\left|x_A-y_A\sqrt{2}+2\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|\frac{x_A\sqrt{8}}{\sqrt{8}}+\left(-2\sqrt{2}.\frac{y_A}{2}\right)+2\right|}{\sqrt{3}}\le\frac{\left|\sqrt{8+8\left(\frac{x^2{}_A}{8}+\frac{y^2{}_A}{4}\right)}\right|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

Do đó: $AH_{max}=2\sqrt{3}\Rightarrow dt\left(\Delta ABC\right)_{max}=3\sqrt{6}$ đạt được khi: $\begin{cases}\frac{x^2{}_A}{8}+\frac{y^2{}_A}{4}=1\\ \frac{\frac{x_A}{\sqrt{8}}}{\frac{y_A}{2}}=\frac{\sqrt{8}}{-2\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow A\left(2;-\sqrt{2}\right)$

Ví dụ 4) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm M(0;2) và Hypebol (H): $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho: $3\vec{MA}-5\vec{MB}=0$.

Giải:

Dễ thấy rằng, đường thẳng (d) đi qua M, cắt (H) tại 2 điểm phân biệt không thể là trục Oy. Do đó phương trình của (d) có dạng: (d):y=kx+2

Hoành độ giao điểm của (d) và (H) là nghiệm của phương trình: $\left(4k^2-1\right)x^2+16kx+20=0$ (1)

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}4k^2-1\ne 0\\ 64k^2-20\left(4k^2-1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ne\pm\frac{1}{2}\\ 16k^2-20<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ne\pm\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}\quad (2)$$

Với điều kiện (2) phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_A,x_B theo thứ tự là hoành độ của A và B. Theo định lý Viét ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=\frac{-16k}{4k^2-1}\\ x_A.x_B=\frac{20}{4k^2-1}\end{cases}$ (3)

Mặt khác 2 điểm A, B cùng nằm trên đường thẳng (d) nên ta có toạ độ của A và B là:
$A\left(x_A;kx_A+2\right);B\left(x_B;kx_B+2\right)$

Do đó ta có: $\vec{MA}=\left(x_A;kx_A\right);\vec{MB}=\left(x_B;kx_B\right)$

Theo yêu cầu đề bài ta có: $3\vec{MA}-5\vec{MB}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x_A-5x_B=0\\3kx_A-5kx_B=0\end{cases}\Leftrightarrow x_A=\dfrac{5}{3}x_B$ (4)

Từ (3) và (4) ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{5}{3}x_B+x_B=\dfrac{-16k}{4k^2-1}\\\dfrac{5}{3}x_B.x_B=\dfrac{20}{4k^2-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=\dfrac{-6k}{4k^2-1}\\x^2{}_B=\dfrac{12}{4k^2-1}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{12}{4k^2-1}=\dfrac{36k^2}{\left(4k^2-1\right)^2}\Leftrightarrow k=\pm1$$

Với $k=\pm1$ thoả mãn điều kiện (2). Vậy phương trình có 2 đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán là: $y=\pm x+2$.

Ví dụ 5) Trong mặt phẳng (Oxy) cho điểm A (3 ; 0) và elip (E) có phương trình: $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A. $(E):\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

$A(3;0)\in(E)$; $B,C\in(E)$: $AB=AC$. Chứng minh được: $B(x_0;y_0)\Rightarrow C(x_0;-y_0)$; $(x_0<3)$ H là trung điểm của $BC\Rightarrow H\left(x_0;0\right)$

$\Rightarrow BC=2|y_0|=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x_0{}^2}$; $AH=|3-x_0|=3-x_0$

ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \text{AH}=\dfrac{1}{2}BC$

$\Leftrightarrow 3-x_0=\dfrac{1}{3}\sqrt{9-x_0{}^2}$

$\Leftrightarrow 9(3-x_0)^2=(3-x_0)(3+x_0)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3 \quad\quad\quad \text{(loại)}\\x_0=\dfrac{12}{5}\Rightarrow|y_0|=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

$$\text{Vậy, }\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right),C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right)\\B\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right),C\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)\end{array}\right.$$

Ví dụ 6) Trong mp Oxy cho elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d:3x+4y-12=0$.CMR đường thẳng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm C thuộc (E) sao cho diện tích tam giác ABC bằng 6 (đvdt)

Giải: Tọa độ giao điểm của d và (E) là nghiệm của

hệ: $\begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{4}(4-x) \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(4-x)^2}{16}=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+(4-x)^2=16 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy d và (E) cắt nhau tại 2 điểm A(4;0), B(0;3). Ta có AB=5.

Gọi $C(x;y)$ thuộc (E) và H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.CH=\dfrac{5}{2}CH$, với $CH=d(C,d)=\dfrac{|3x+4y-12|}{5}$ trong đó $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Do tam giác ABC có diện tích bằng 6 nên ta có hệ: $\begin{cases} |3x+4y-12|=12 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y-12=\pm 12 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} 3x+4y-12=12 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{16}+\left(2-\dfrac{x}{4}\right)^2=1 \Rightarrow (x-4)^2+8=0 \Rightarrow$ hệ này vô nghiệm

Xét hệ $\begin{cases} 3x+4y-12=-12 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x^2}{16}=1 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow y=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy có 2 nghiệm $C_1=\left(2\sqrt{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right); C_2=\left(-2\sqrt{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 7) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P): $y^2=4x$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B. CMR tích các khoảng cách từ A và B đến trục của parabol là một đại lượng không đổi

.

Giải: Parabol(P) đã cho có tiêu điểm F(1;0), đỉnh O(0;0), đường chuẩn $\Delta: x=-1$ và trục đối xứng là Ox

Gọi (d) là đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm F của (P).

+ Khi (d) qua tiêu điểm F và song song với Oy thì phương trình của (d) là: x=1. Dễ thấy rằng, lúc đó (d) cắt (P) tại 2 điểm A(1;-2) và B(1;2). Ta có:

$d(A;(Ox)).d(B(Ox))=AF.BF=|-2|.|-2|=4$

+ Khi (d) qua tiêu điểm F và song song với Oy thì phương trình của (d) là: y=k(x-1). Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$k^2(x-1)^2=4x \Leftrightarrow k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0 \quad (1)$

Đường thẳng (d) đi qua F cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt ($x_1$và x_2), tức là: $\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ 1+k^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow k\neq 0 \quad (2)$

Khi đó toạ độ 2 giao điểm của (d) và (P) là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ với $y_1=k(x_1-1)$ và $y_2=k(x_2-1)$

Ta có: $d_{(A/Ox)}.d_{(B/Ox)}=|y_1y_2|=\left|k^2(x_1-1)(x_2-1)\right|=\left|k^2\left[x_1x_2+1-(x_1+x_2)\right]\right|$

Theo định lý viét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(k^2+2)}{k^2} \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow |y_1y_2|=\left|k^2\left[1+1-\dfrac{2(k^2+2)}{k^2}\right]\right|=4\Rightarrow dpcm$

Ví dụ 8) Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y^2=64x$ và đường thẳng Δ: 4x 3y+46=0. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng Δ tiếp xúc với parabol và có bán kính nhỏ nhất.

Giải:

Gọi M(x;y) là tiếp điểm của đường tròn cần tìm với Parabol. Vì M thuộc Parabol nên $M(\frac{y^2}{64};y)$

Đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng Δ tiếp xúc với (P) và có bán kính nhỏ nhất nên bán kính đó đúng bằng khoảng cách ngắn nhất từ M đến Δ:

Ta có $d_{(M/\Delta)}=\dfrac{\left|4\dfrac{y^2}{64}-3y+46\right|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{\left|(y-24)^2+160\right|}{80}\geq 2\Rightarrow d_{(M/\Delta)}\min=2$ khi $y=24\Rightarrow M(4;24)$

Tâm I của đường tròn chính là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ

Phương trình tham số của IM là $\begin{cases} x=9+4t \\ y=24-3t \end{cases}\Rightarrow I(9+4t;24-3t)$

Vì $I\in\Delta\Rightarrow 4(9+4t)-3(24-3t)+46=0\Rightarrow t=-\frac{2}{5}\Rightarrow I(\frac{37}{5};\frac{126}{5})$

Phương trình đường tròn cần tìm là $\left(x-\dfrac{37}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{126}{5}\right)^2=4$

Phần bài tập

1) Cho A(1;1). Tìm toạ độ điểm B trên đường thẳng y =3 và điểm C trên trục hoành sao cho tam giác ABC đều.

2) Viết phương trình các cạnh tam giác đều ABC biết A(2;6) cạnh BC nằm trên đường thẳng $\Delta:\sqrt{3}x-3y+6=0$

3) Cho tam giác ABC có diện tích $S=\frac{3}{2}$,toạ độ các đỉnh A(2;-3), B(3;-2) và trọng tâm tam giác nằm trên đường thẳng 3x-y-8=0. Tìm toạ độ đỉnh C.

4) Cho tam giác ABC có A(2;-1) và 2 đường cao có phương trình 2x-y+1=0 và 3x+y+2=0. Viết phương trình đường trung tuyến qua A.

5) Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình x-y+1=0 và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y=0$. Tìm M thuộc đường thẳng Δ mà qua đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn (C) mà $\widehat{AMB}=60^0$ (Trong đó A, B là các tiếp điểm)

6) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác cân ABC đỉnh A có trọng tâm $G(\frac{4}{3};\frac{1}{3})$ và phương trình đường thẳng BC là x-2y-4=0, phương trình đường thẳng BG là $7x-4y-8=0$. Tìm toạ độ các đỉnh tam giác .

7) Cho A(0;1), B(6;3),G(a;0) là toạ độ đỉnh A,B và trọng tâm G của tam giác ABC. Tìm đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $5\sqrt{10}$

8) Tìm toạ độ tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết trọng tâm G(2;-1) và trực tâm H(1;4)

9) Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng 2 đồng thời tiếp xúc với đường tròn $x^2+y^2=1$ và đường thẳng 3x-4y-10=0

10) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2+y^2=25$ biết tiếp tuyến đó hợp với đường thẳng x+2y-1=0 một góc có cosin bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$

11) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M(2;1) cắt đường tròn (C) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ tại A ,B mà MA=MB

12) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0;0) cắt đường tròn $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ tại A, b sao cho $OB=2BA$

13) Viết phương trình đường thẳng qua M(1;2) cắt đường tròn $x^2+y^2=8$ tại hai điểm A, B mà dây cung AB= $2\sqrt{3}$

14) Trong mặt phẳng toạ độ cho Elip (E) có phương trình $4x^2+9y^2=36$ và điểm M(1;1). Lập phương trình đường thẳng qua M cắt (E) tại A và B sao cho MA=MB

15) Cho Elíp (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Gọi F1, F2 là hai tiêu điểm của (E). Đường thẳng (d) di động luôn đi qua F2 cắt (E) tại P và Q. Giả sử (Ox, F_2P) =α với ($0^0 \le \alpha \le 360^0$). Tính độ dài $F_2P; F_2Q$ theo α. Chứng minh rằng $\frac{1}{F_2P}+\frac{1}{F_2Q}$ không đổi, Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của đoạn PQ.

16) Cho Elíp (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Xét đường thẳng (d): y=kx+m .Tìm mối liên hệ k và m để (d) tiếp xúc với (E).Khi (d) tiếp xúc với (E), Gọi giao điểm của (d) và các đường thẳng x=5 và x=-5 là M và N.Gọi F là tiêu điểm phải của (E). Tính diện tích tam giác FMN theo k. Tìm k để diện tích tam giác FMN nhỏ nhất.

17) Cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A và B là hai điểm thuộc (E) sao cho OA vuông góc với OB. Tìm vị trí của A,B trên E để diện tích tam giác OAB lớn nhất, nhỏ nhất.Tính các giá trị đó.

18) Cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng (d) $x-\sqrt{2}y+2=0$. Đường thẳng (d) cắt (E) tại A và B. Tìm C thuộc (E) để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

19) Trong mặt phẳng Oxy lập phương trình của Hipebol (H) biết một đỉnh trên trục thực là A(-1;1) và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

20) Trong mặt phẳng Oxy cho M(0;2) và hipebol (H) có phương trình $x^2-4y^2=4$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (H) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $3\vec{MA}-5\vec{MB}=\vec{0}$

21) Trong mặt phẳng Oxy cho Hipebol (H): $8x^2-y^2=8$ và đường thẳng(d): 2x – y +m=0. Chứng minh rằng (d) cắt (H) tại hai điểm phân biệt A,B thuộc hai nhánh khác nhau của (H). Giả sử $x_A<x_B$. Tìm m để $2F_1A=F_2B$

22) Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) có phương trình $y^2=x$ có tiêu điểm F. Gọi (d) là đường thẳng có hệ số góc k qua F cắt (P) tại A, B (Giả sử (d) không song song với Oy). Tính AB theo k. Tìm vị trí A,B để độ dài AB nhỏ nhất

23) Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) có đỉnh là gốc toạ độ và đi qua A($2;2\sqrt{2}$). Đường thẳng (d) qua I(5/2;1) cắt (P) tại M, N sao cho IM=IN. Tính độ dài MN.

24) Trong mặt phẳng Oxy Cho (P) có phương trình $y^2=8x$ và điểm I(2;4) nằm trên (P). Một góc vuông quay quanh I cắt (P) tại M,N khác I. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định

25) Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y^2=64x$ và đường thẳng (d) có phương trình 4x-3y+36=0. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên (d) tiếp xúc với (P) có bán kính nhỏ nhất.

26) Trong mặt phẳng Oxy cho (P) có phương trình $y^2=x$. Đường thẳng (d) có phương trình x-y-2=0 cắt (P) tại A và B. Tìm M trên cung AB của (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA,MB là nhỏ nhất.

27) Tìm m để đường thẳng (d): $\sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$ cắt đường tròn (C) tâm I co phương trình : $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ tại A và B. Tìm m để diện tích tam giác IAB lớn nhất. Tìm GTLN đó

28) Trong mặt phẳng Oxy cho 2 đường tròn (C1) và (C2) có phương trình lần lượt là

$$(C1): x^2+y^2=1$$
$$(C2): x^2+y^2-2mx+4my+5m^2=1$$

Tìm m để (C1) cắt (C2) tại 2 điểm phân biệt A,B.

Chứng minh rằng đường thẳng AB có phương không đổi

29) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ và đường thẳng (d) có phương trình x+y-2=0. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Tìm M thuộc đường tròn (C) để diện tích tam giác MAB lớn nhất?Nhỏ nhất

30) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ và đường thẳng (d) có phương trình x-y-2=0. Tìm M(x_0;y_0) thuộc (C) sao cho P=x_0+y_0 là lớn nhất?Nhỏ nhất?

31) Cho Elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. điểm M,N chuyển động trên Ox và Oy sao cho MN luôn tiếp xúc với (E). Tìm toạ độ của M,N để đoạn MN nhỏ nhất. Tính GTNN đó

32) Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết A(2;-4) và phương trình các đường phân giác của góc B, C lần lượt là x+y-2=0 và x-3y-6=0

33) Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết A(1;2) và phương trình 2 đường trung tuyến là 2x-y+1=0 và x+3y-3=0

34) Tam giác ABC có C(4;4) đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình 2x-3y+12=0 và 2x+3y=0. Viết phương trình các cạnh tam giác.

35) Viết phương trình các cạnh tam giác ABC biết B(2;-1) đường cao kẻ từ A và phân giác góc C có phương trình lần lượt là 3x-4y+27=0 và x+2y-5=0

36) Cho tam giác ABC vuông tại A các đỉnh A,B nằm trên trục hoành và phương trình cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$. Tìm toạ độ trọng tâm tam giác biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 2.

37) Lập phương trình các cạnh của hình vuông ABCD biết một đỉnh có toạ độ (-4;5) và một đường chéo có phương trình 7x-y+8=0

38) Viết phương trình các cạnh tam giác MNP biết N(2;-1) đường cao hạ từ M và phân giác trong đỉnh P là 3x-4y+27=0 và x+2y-5=0

39) Tam giác cân ABC có cạnh đáy BC: x-3y-1=0 cạnh bên AB:x-y-5=0. Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua M(-4;1). Tìm toạ độ đỉnh C.

40) Viết phương trình ba cạnh tam giác ABC biết C(4;3) đường phân giác trong và trung tuyến kẻ từ một đỉnh lần lượt là x+2y-5=0 và 4x+13y-10=0

41) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có M(2;0) là trung điểm của cạnh AB đường trung tuyến và đường cao kẻ từ A lần lượt có phương trình 7x-2y-3=0 và 6x-y-4=0. Viết phương trình cạnh AC.

42) Cho hình chữ nhật ABCD có giao điểm 2 đường chéo là I(6;2). Điểm M(1;5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của CD thuộc đường thẳng (d) x+y-5=0. Viết phương trình cạnh AB.

43) Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và A(3;5). Hãy viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A đến (C). Gọi M, N là các tiếp điểm tương ứng. Tính độ dài MN

44) Trong hệ trục toạ độ Oxy cho Parabol có phương trình $y^2 = 64x$ và đường thẳng Δ có phương trình 4x-3y+46=0. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng Δ và tiếp xúc với Parabol sao cho bán kính đường tròn nhỏ nhất

45) Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 36$ và M(-1;0). Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn (C) theo dây cung AB mà độ dài AB nhỏ nhất

46) Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ Tìm điểm M trên đường thẳng d: x+y+4=0 sao cho từ M vẽ được tới (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau

47) Trong mặt phẳng toạ độ xOy, cho tam giác ABC cân tại A có:

AB: y+1=0

BC: x+y-2=0

Tính diện tích tam giác ABC biết AC đi qua điểm M(-1;2)

48) Điểm M di chuyển trên (E) líp có pt $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm N di chuyển trên đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 24 = 0$. Tìm GTNN của MN

49) Tam giác ABC có C(-3; 1), đường cao $h_A: x + 7y + 32 = 0$, phân giác $I_A: x + 3y + 12 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

50) Tam giác ABC có A(1;1), B(-2;5) trọng tâm G thuộc đường thẳng $\Delta_1: 2x + 3y - 1 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $\Delta_2: x + y - 1 = 0.$ Tính diện tích tam giác ABC.

51) Tam giác ABC có A(1;3), trung tuyến $m_B: x + 3y - 1 = 0,$ đường cao $h_C: 2x + 3y + 5 = 0.$ Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

52) Tam giác ABC có 2 đường cao $h_B: x + 3y - 1 = 0; h_C: x + y + 1 = 0$ và trung tuyến $m_A: 2x - y + 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

53) Tam giác ABC có 2 đường cao $h_A: 4x - y - 1 = 0, h_B = x - y + 3 = 0,$ trọng tâm G(1;2) . Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC

54) Tam giác ABC có đường trung tuyến $m_A: x - y + 1 = 0,$ đường cao $h_A: x + 2y - 1 = 0$ đoạn AB có trung điểm M(1;1). Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

55) Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp I(4;0), đường cao $h_A: x + y - 2 = 0,$ trung tuyến $m_A: x + 2y - 3 = 0.$ Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

56) Tam giác ABC có đường phân giác $l_A: x + y - 3 = 0,$ đường trung tuyến $m_B: x - y + 1 = 0,$ đường cao $h_C: 2x + y + 1 = 0.$ Tính toạ độ các đỉnh của tam giác.

57) Cho 2 đường tròn: $(\varepsilon): x^2 + y^2 = 16, (\varepsilon'): x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$ cắt nhau tại 2 điểm A và A', trong đó A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A lần lượt cắt (ε) và (ε') tại các điểm thứ hai B, C sao cho A là trung điểm của BC.

58) Cho hai đường tròn $(\varepsilon_1): x^2+y^2-2x-y-14=0; (\varepsilon_2): x^2+y^2-4x+2y-20=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (ε_1) tại A và B, cắt (ε_2) tại C và D sao cho $AB=2\sqrt{7}, CD=8$

Viết phương trình đường tròn (ε) có tâm I(1;2) cắt trục hoành tại A và B, cắt đường thẳng y=3 tại C và D sao cho AB+CD=6.

59) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có phương trình cạnh BC là x+y-3=0 . Biết M(2;-1) thuộc cạnh AC điểm N(3;-2) thuộc cạnh AB và nằm ngoài đoạn AB. Tìm toạ độ các đỉnh tam giác .

60) Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d:x-5y-2=0 và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Tìm giao điểm A, B của đường tròn (T) và đường thẳng d. Tìm C thuộc đường tròn sao cho tam giác ABC vuông ở B.

61) Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d:x-5y-2=0 và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng x+y-4=0 qua đó kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn mà góc tạo bởi 2 tiếp tuyến là 60^0

62) Trong mặt phẳng Oxy cho A(-1;5) và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-4=0$. Tìm điểm B, C thuộc đường tròn để tam giác ABC đều

63) Trong mặt phẳng Oxy choI(-1;3). Viết phương trình đường tròn tâm I cắt đường thẳng $d: 3x-4y+10=0$ tại A, B sao cho AIB=120^0

64) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ và B(2;-3) C(4;1). Tìm toạ độ điểm A thuộc đường tròn sao cho tam giác ABC cân tại A và có diện tích nhỏ nhất

65) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C1): x^2+y^2-2x-2y-2=0; (C2): x^2+y^2-8x-2y+16=0$

66) Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường tròn $(C1): x^2+y^2-4x+2y-4=0; (C2): x^2+y^2-10x-6y+30=0$ có tâm lần lượt là I,J. Chứng minh (C1) tiếp xúc ngoài với (C2) tại điểm H. Gọi d là tiếp tuyến chung ngoài không đi qua H của 2 đường tròn. Tìm toạ độ giao điểm K của đường thẳng (d) và đường thẳng IJ.Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với (C1) (C2) và đi qua K,H

67) Trong mặt phẳng cho 2 đường tròn $(C1): x^2+y^2=1; (C2): x^2+y^2-2mx+4my+5m^2=1$. Tìm m để (C1) cắt (C2) tại 2 điểm A, B. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng AB có phương không đổi

68) Cho $(C1): x^2+y^2=16; (C2): x^2+y^2-10x+5=0$ cắt nhau tại M, N trong đó M có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt 2 đường tròn tại các giao điểm thứ 2 là A, B sao cho M là trung điêmr của A,B.

69) ho 2 đường tròn $(C1): x^2+y^2=16; (C2): x^2+y^2-10x+5=0$ Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C1) tại M,N tiếp xúc với (C2) sao cho $MN=4\sqrt{2}$.

70) Tam giác ABC có đường cao từ A:x+y-2=0 trung tuyến từ A:2x+y-3=0.Tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác là I(4;0). Tìm toạ độ đỉnh C.

71) Viết phương trình đường thẳng Δ qua M(-4;-1) cắt đường tròn $x^2+y^2-4x-4y-1=0$ tại A, B sao cho MA=2MB.

72) Trong mặt phẳng Oxy cho $(C1): x^2+y^2-2x-4y-4=0; (C2): x^2+y^2+2x-2y-14=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d):2x+3y+5=0 sao cho qua M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB đến (C1) và (C2) mà MA=MB

73) Viết phương trình đường tròn qua A(1;1), B(0;2) tiếp xúc với đường tròn $x^2+y^2-10x-10y+34=0$

74) Trong mặt phẳng cho 2 đường tròn $(C1): x^2+y^2-6x-4y+12=0; (C2): x^2+y^2-8x-2y+12=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của 2 đường tròn và có bán kính bằng $\sqrt{13}$

CÁC BÀI TẬP THƯỜNG GẶP TRONG KỲ THI TSĐH

BIÊN SOẠN GV NGUYỄN TRUNG KIÊN

Câu 1) Trong mp Oxy cho hình chữ nhật ABCD có giao điểm 2 đường chéo là $M\left(\frac{1}{2};0\right)$, cạnh AB có pt: $x-2y+2=0; AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đỉnh A có hoành độ dương.

ĐS: $A(2;2), B(-2;0), C(-1;-2), D(3;0)$

Câu 2) Trên mp Oxy cho $d: 2x+y-1=0; d'=3x+y+7=0$ cắt nhau tại I và điểm $M(1;2)$. Viết pt đường thẳng Δ qua M cắt d,d' lần lượt tại A và B sao cho $AI=\sqrt{2}AB$

ĐS: $d: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}$

Câu 3) Trong mp tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD. Biết rằng $AB=2BC$. A,B thuộc đường thẳng đi qua điểm $M\left(-\frac{4}{3};1\right)$. B,C thuộc đường thẳng đi qua $N(0;3)$. A,D thuộc đường thẳng đi qua điểm $P\left(4;-\frac{1}{3}\right)$. C,D thuộc đường thẳng đi qua điểm $Q(6;2)$. Viết pt các cạnh hình chữ nhật.

ĐS:

$AB: x-3y+\frac{13}{3}; BC: x+3y-3=0; DC: x-3y=0; AD: 3x+y-\frac{35}{3}=0$

$AB: x+17y-13; BC: 17x-3y+9=0; DC: 3x+17y-52=0; AD: 17x-3y-69=0$

Câu 4) Trong mp Oxy cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, trực tâm $H(-31;41)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(16;-18)$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C.

ĐS: $B(5;5), C(-3;-1)$ hoặc ngược lại.

Câu 5) Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}=\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d: 2x+15y-10=0$. Biết d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B $(x_A>0)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc (E) sao cho tam giác ABC cân tại A.

ĐS: $C\left(-4;-\frac{6}{5}\right)$.

Câu 6) Trong mp tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có cạnh $AB: x-3y+5=0$, đường chéo $BD: x-y-1=0$ và đường chéo AC đi qua điểm $M(-9;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

ĐS: $B(4;3), C(5;0), D(-1;-2)$

Câu 7) Cho 3 điểm $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm M trên đường thẳng BC để góc $A\hat{M}B = 45^0$

ĐS: $M(5;4)$

Câu 8) Trong hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là: $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C,D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

ĐS: $A=(-2;0), B=(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$

Câu 9) Trong mp với hệ tọa độ Oxy cho 2 đường tròn Oxy $(C_1): x^2+y^2=1$; $(C_2): (x-2)^2+(y+1)^2=4$ và đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm điểm A trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được hai tiếp tuyến AB,AC lần lượt đến hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ đồng thời d là đường phân giác của $B\hat{A}C$

ĐS: $(-8;9)$

Câu 10) Trong mp Oxy cho $A(1;1)$. Hãy tìm điểm B trên đường thẳng $y=3$ và C trên trục hoành sao cho tam giác ABC đều.

ĐS: $B\left(\frac{\sqrt{3}\left(4\pm\sqrt{3}\right)}{3};3\right), C\left(\frac{\sqrt{3}\left(5\pm\sqrt{3}\right)}{3};0\right)$

Câu 11) Trong mp Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có $B(-5;0), C(7;0)$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r=2\sqrt{13}-6$. Tìm tọa độ tâm I của vòng tròn nội tiếp tam giác, biết điểm I có tung độ dương.

ĐS: $I\left(1+2\sqrt{5};2\sqrt{13}-6\right), I\left(1-2\sqrt{5};2\sqrt{13}-6\right)$

Câu 12) Cho mp tọa độ Oxy cho hình thang vuông ABCD tại A và D có đáy lớn là CD, cạnh $AD: 3x-y=0$, cạnh $BD: x-2y=0$. Biết góc tạo bởi giữa BC và AB bằng 45^0, diện tích hình thang ABCD=24. Viết pt cạnh BC biết B có tung độ dương.

ĐS: $2x+y-4\sqrt{10}=0$

Câu 13) Trong mp Oxy cho tam giác ABC cân tại A có pt các cạnh BC, AB lần lượt là $x+2y-2=0$ và $3x-y+10=0$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, biết điểm $M(2;2)$ thuộc cạnh AC.

ĐS: $I\left(-\frac{33+31\sqrt{2}}{49};\frac{81-62\sqrt{2}}{49}\right)$

Câu 14) Trong mp tọa độ cho điểm $M(2;-1)$ và hai đường thẳng $(d): x+y-1=0$; $(d'): x+7y+1=0$. Viết pt đường tròn qua M tiếp xúc với (d) và (d') tại A,B. Tính độ dài đoạn AB.

ĐS: $AB = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Câu 15) Trong mp tọa độ Oxy cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=13$ và đường thẳng $\Delta: x-5y-2=0$. Biết Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang vuông ABCD, biết rằng C thuộc (C), D cách đường thẳng Δ một khoảng bằng $2\sqrt{26}$ và AD song song $BC, D\hat{A}B = 90^0$.

ĐS: $A(2;0), B(-3;-1), C(-4;4), D(0;10)$ hoặc $A(-3;-1), B(2;0), C(1;5), D(-5;9)$.

Câu 16) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đường phân giác từ A, trung tuyến từ B, đường cao từ C có phương trình lần lượt là: $x+y-3=0, x-y+1=0, 2x+y+1=0$. Tìm toạ độ các đỉnh tam giác

ĐS: $A\left(\frac{12}{17};\frac{39}{17}\right), B\left(\frac{32}{17};\frac{49}{17}\right), C\left(-\frac{8}{17};\frac{16}{17}\right)$

Câu 17) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(2;1) và AC = 2BD. Điểm M $(0;\frac{1}{3})$ thuộc đường thẳng AB, điểm N(0;7) thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

ĐS: B(1; -1)

Câu 18) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đường cao AH: $x-3\sqrt{3}=0$, phương trình hai đường phân giác trong góc B và góc C lần lượt là $x-\sqrt{3}y-6\sqrt{3}=0$ và $x+\sqrt{3}y-6=0$, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 3. Viết phương trình các cạnh tam giác biết đỉnh A có tung độ dương.

ĐS: AB, AC: $y=\sqrt{3}x; y=-\sqrt{3}x+18$

Câu 19) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (T) có phương trình: $x^2+y^2-8x+12=0$ và I(8;5). Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (T) đồng thời đường thẳng AB đi qua I. (A, B là hai tiếp điểm)

ĐS: M(0;4)

Câu 20) Cho hai đường tròn $(T1): x^2+y^2=13, (T2): (x-6)^2+y^2=25$ cắt nhau tại A(2;3). Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (T1) và (T2) theo hai dây cung phân biệt bằng nhau.

ĐS:x-3y+7=0

Câu 21) Trong mp tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có cạnh AB, CD lần lượt nằm trên 2 đường thẳng $d_1: x-2y+5=0; d_2: x-2y+1=0.$ Viết phương trình đường thẳng AD và BC biết M(-3;3) thuộc đường thẳng AD và N(-1;4) thuộc đường thẳng BC

Câu 22) Cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt là : 6x-5y-7=0 và
x-4y+2=0. Tính diện tích tam giác ABC biết trọng tâm tam giác thuộc trục hoành và đường cao từ đỉnh B đi qua E(1;-4)

Câu 23) Cho tam giác ABC có phương trình trung tuyến và đường cao xuất phát từ A, B lần lượt là 2x-5y-1=0 và x+3y-4=0. Đường thẳng BC đi qua điểm K(4;-9).Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đỉnh C nằm trên đương thẳng x-y-6=0.

Câu 24) Cho đường tròn (C): $(x+6)^2+(y-6)^2=50$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho M là trung điểm của AB.
ĐS: $x-y+2=0; x-y+22=0; x-5y+10=0; 7x+13y+182=0$

Câu 25) Cho hai đường tròn $(T1): x^2+y^2=13, (T2): \left(x-6\right)^2+y^2=25$ cắt nhau tại A(2;3). Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (T1) và (T2) theo hai dây cung phân biệt bằng nhau.
ĐS:x-3y+7=0

Câu 26) Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm M(1;1) viết phương trình đường thẳng (d) qua M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB
ĐS:9x+25y-34=0

Câu 27) Cho hai elip có phương trình: $(E1): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1; (E2): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. Chứng minh hai elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. Viết phương trình đường tròn đi qua 4 giao điểm trên.
Câu 28) Cho đường thẳng (d):x+2y-3=0 và điểm A(-1;-3). Tìm hai điểm B, C trên đường thẳng (d) sao cho tam giác ABC là tam giác ABC cân ở A và độ dài $BC=2\sqrt{5}$
ĐS: B(-1;2), C(3;0)

Câu 29) Cho Elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.Tìm điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1=4MF_2$;
ĐS: M(5;0)

Câu 30) Tìm M thuộc (E): $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ sao cho M nhìn hai tiêu điểm một góc vuông
ĐS: $M(\sqrt{3};1); (-\sqrt{3};1); (\sqrt{3};-1); (-\sqrt{3};-1)$

Câu 31) Tìm điểm M thuộc Elip $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ sao cho $F_1MF_2=120^0$. Biết F1;F2 là các tiêu điểm của Elip**;**
ĐS: M(0;5) hoặc M(0;-5)

Câu 32) Cho Hipelbol (H) có phương trình $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ và đường thẳng (d):x-y-m=0. Tìm m để (d) cắt (H) tại 2 điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) sao cho $F_2N=2F_1M$ với $x_M<x_N$
ĐS: $m=\frac{21\pm\sqrt{896}}{3}$

Câu 33) Cho Hipelbol (H) có phương trình $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ và đường thẳng (d):x-y+m=0. Tìm m để (d) cắt (H) tại 2 điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) sao cho $F_2N=F_1M+3$ với $x_M<x_N$

ĐS: $m=\frac{1}{4}$

Câu 34) Cho Elip (E) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ và điểm $M(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ nằm trong (E).Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (E) tại A, B sao cho MA=2MB. ĐS:x+2y-2=0 hoặc x+14y-10=0

Câu 35) Cho hai đương tròn $\begin{matrix}(T1): x^2+y^2-4x+2y-4=0\\(T2): x^2+y^2-10x-6y+30=0\end{matrix}$ có tâm là I:J Gọi H là tiếp điểm của (T1) và (T2). Gọi d là tiếp tuyến chung ngoài không qua H của (T1) và (T2). Tìm giao điểm K của (d) và IJ. Viết phương trình đường tròn qua K tiếp xúc với (T1) và (T2) tại H

ĐS: K(11;11); $\left(x-\frac{37}{5}\right)^2+\left(y-\frac{31}{5}\right)^2=36$

Câu 36) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(-1;14) và đường tròn (S) tâm I(1;-5), bán kính R=13. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt (S) tại M,N mà khoảng cách từ M đến AI bằng một nửa khoảng cách từ N đến AI.
ĐS: $x+y-13=0$; ……

Câu 37) Trong mặt phẳng Oxy, gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(2;-2), B(4;0), C(3;\sqrt{2}-1)$ và đường thẳng $d: 4x+y-4=0$. Tìm M trên d sao cho tiếp tuyến của (C) qua M tiếp xúc với (C) tại N sao cho diện tích tam giác NAB lớn nhất

ĐS: $M(2;-4)$; $M\left(\frac{6}{5};-\frac{4}{5}\right)$

Câu 38) Cho đường tròn (T): $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ và đường thẳng (d):x-y-1=0. Từ M thuộc d kẻ các tiếp tuyến MA,MB đến (T) trong đó A,B là các tiếp điểm. Chứng minh đường thẳng qua A,B luôn đi qua điểm cố định

ĐS: $N(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$

Câu 39) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-6y+12=0$ có tâm I và đường thẳng $d: x+y-4=0$. Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho tiếp tuyến của M tiếp xúc với (C) tại A, B và tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

ĐS: $M\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$

Câu 40) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) : $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng Δ qua M(1;-3) cắt (C) tại A, B . Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất.
ĐS: $y+3=0$ và $4x+3y+5=0$.

Câu 41) Trong Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có C(-4;1) phân giác trong góc A có phương trình: x+y-5=0. Viết phương trình BC biết diện tích tam giác là 24 và đỉnh A có hoành độ dương
ĐS: B(4;7) : BC:3x-4y-16=0

Câu 42) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có phương trình cạnh BC:x+7y-31=0, Điểm N(7;7) thuộc AC, điểm M(2;-3) thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.
ĐS: A(-1;1); B(-4;5), C(3;4)