

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)**

**Câu 1 (2,0 điểm).** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x + 4m - 5$  có đồ thị  $(C_m)$ , với  $m$  là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi  $m = 1$ .

b) Tìm  $m$  để trên  $(C_m)$  tồn tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 sao cho các tiếp tuyến tại mỗi điểm đó của  $(C_m)$  vuông góc với đường thẳng  $d: x + 2y + 3 = 0$ .

**Câu 2 (1,0 điểm).** Giải phương trình  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} + \cot x = 2$ .

**Câu 3 (1,0 điểm).** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (x+y)(x+4y^2+y) + 3y^4 = 0 \\ \sqrt{x+2y^2+1} - y^2 + y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

**Câu 4 (1,0 điểm).** Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \frac{3^x - 1}{(3^{-x} + 1)\sqrt{3^x + 1}}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\widehat{BCD} = 120^\circ$ , cạnh bên  $SD$  vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng  $(SAB)$  tạo với mặt phẳng  $(SBC)$  một góc  $60^\circ$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $SC$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD$ ,  $BK$ .

**Câu 6 (1,0 điểm).** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$ .

**II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần a hoặc phần b)**

**a. Theo chương trình Chuẩn**

**Câu 7.a (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có đỉnh  $A(3; 3)$ , tâm đường tròn ngoại tiếp  $I(2; 1)$ , phương trình đường phân giác trong góc  $\widehat{BAC}$  là  $x - y = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $B, C$  biết rằng  $BC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$  và góc  $\widehat{BAC}$  nhọn.

**Câu 8.a (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y - z + 1 = 0$  và các đường thẳng  $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{2}$ ;  $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ ;  $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$ . Tìm  $M \in d_1, N \in d_2$  sao cho đường thẳng  $MN$  song song với  $(P)$  đồng thời tạo với  $d$  một góc  $\alpha$  có  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 9.a (1,0 điểm).** Cho phương trình  $8z^2 - 4(a+1)z + 4a + 1 = 0$  (1), với  $a$  là tham số. Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để (1) có hai nghiệm  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $\frac{z_1}{z_2}$  là số ảo, trong đó  $z_2$  là số phức có phần ảo dương.

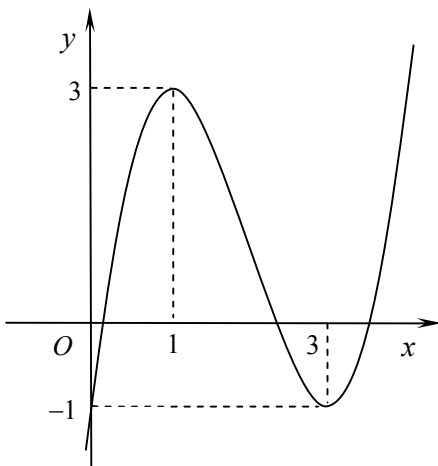
**b. Theo chương trình Nâng cao**

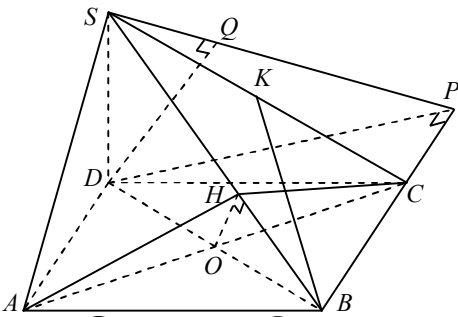
**Câu 7.b (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ  $B$  là  $x + 3y - 18 = 0$ , phương trình đường thẳng trung trực của đoạn thẳng  $BC$  là  $3x + 19y - 279 = 0$ , đỉnh  $C$  thuộc đường thẳng  $d: 2x - y + 5 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A$  biết rằng  $\widehat{BAC} = 135^\circ$ .

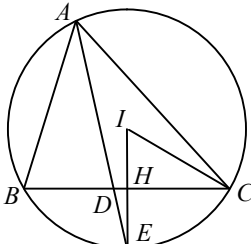
**Câu 8.b (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(4; -4; -5)$ ,  $B(2; 0; -1)$  và mặt phẳng  $(P): x + y + z + 3 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(P)$  sao cho mặt phẳng  $(MAB)$  vuông góc với  $(P)$  và  $MA^2 - 2MB^2 = 36$ .

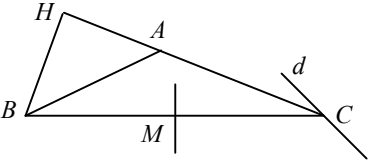
**Câu 9.b (1,0 điểm).** Cho đồ thị  $(C_a): y = \frac{x^2 + ax - 2}{x - 1}$  và đường thẳng  $d: y = 2x + 1$ . Tìm các số thực  $a$  để  $d$  cắt  $(C_a)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  thỏa mãn  $IA = IB$ , với  $I(-1; -2)$ .

----- Hết -----

| Câu                  | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Điểm |           |           |      |             |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|-----------|------|-------------|--------|-----------|------|----|-----------|-----|---|---|---|-----|-----------|--|-----|--|------|-------------|
| Câu 1.<br>(2,0 điểm) | <p><b>a) (1,0 điểm)</b></p> <p>Khi <math>m = 1</math> hàm số trở thành <math>y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1</math>.</p> <p>a) Tập xác định: <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>b) Sự biến thiên:</p> <p>* Giới hạn tại vô cực: Ta có <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty</math> và <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty</math>.</p> <p>* Chiều biến thiên: Ta có <math>y' = 3x^2 - 12x + 9</math>;</p> $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}; y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}; y' < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$ <p>Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng <math>(-\infty; 1)</math>, <math>(3; +\infty)</math>; nghịch biến trên khoảng <math>(1; 3)</math>.</p> <p>* Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại <math>x = 1</math>, <math>y_{CD} = 3</math>, hàm số đạt cực tiểu tại <math>x = 3</math>, <math>y_{CT} = -1</math>.</p> | 0,5  |           |           |      |             |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
|                      | <p>* Bảng biến thiên:</p> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y'</math></td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>-\infty</math></td><td></td><td>↗ 3</td><td></td><td>↘ -1</td><td>↗ <math>+\infty</math></td></tr></table> <p>c) Đồ thị:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $x$  | $-\infty$ | 1         |      | 3           |        | $+\infty$ | $y'$ |    | +         | 0   | - | 0 | + | $y$ | $-\infty$ |  | ↗ 3 |  | ↘ -1 | ↗ $+\infty$ |
| $x$                  | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1    |           | 3         |      | $+\infty$   |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
| $y'$                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | +    | 0         | -         | 0    | +           |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
| $y$                  | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |      | ↗ 3       |           | ↘ -1 | ↗ $+\infty$ |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
|                      | <p><b>b) (1,0 điểm)</b></p> <p>Đường thẳng <math>d</math> có hệ số góc <math>k = -\frac{1}{2}</math>. Do đó tiếp tuyến của <math>(C_m)</math> vuông góc với <math>d</math> có hệ số góc <math>k' = 2</math>.</p> <p>Ta có <math>y' = k' \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3(m + 2) = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 4 = -3m</math>. (1)</p> <p>Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |           |           |      |             |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
|                      | <p>Xét hàm số <math>f(x) = 3x^2 - 12x + 4</math> trên <math>(1; +\infty)</math>.</p> <p>Ta có bảng biến thiên:</p> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td>1</td><td>2</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td><math>+\infty</math></td><td>-5</td><td>-8</td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> <p>Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình <math>f(x) = -3m</math> có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi <math>-8 &lt; -3m &lt; -5 \Leftrightarrow \frac{5}{3} &lt; m &lt; \frac{8}{3}</math>. Vậy <math>\frac{5}{3} &lt; m &lt; \frac{8}{3}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                        | $x$  | $-\infty$ | 1         | 2    | $+\infty$   | $f(x)$ | $+\infty$ | -5   | -8 | $+\infty$ | 0,5 |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
| $x$                  | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1    | 2         | $+\infty$ |      |             |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
| $f(x)$               | $+\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | -5   | -8        | $+\infty$ |      |             |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |
| Câu 2.<br>(1,0 điểm) | <p>Điều kiện: <math>\cos x \neq \pm 1, \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Phương trình đã cho tương đương với</p> $\frac{\sin x - \sin x \cos x + 1 + \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5  |           |           |      |             |        |           |      |    |           |     |   |   |   |     |           |  |     |  |      |             |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                             | $\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 1 = 2\sin^2 x$ $\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \cos 2x = 0$ $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos x - \sin x) = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|                             | <p>*) <math>\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.</math></p> <p>*) <math>1 + \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}</math></p> <p>Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là <math>x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5 |
| <b>Câu 3.</b><br>(1,0 điểm) | <p>Điều kiện: <math>x + 2y^2 + 1 \geq 0.</math></p> <p>Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với</p> $(x + y)^2 + 4(x + y)y^2 + 3y^4 = 0 \Leftrightarrow (x + y + y^2)(x + y + 3y^2) = 0.$ <p>*) <math>x + y + y^2 = 0</math>, hay <math>x = -y - y^2</math>. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được</p> $\sqrt{y^2 - y + 1} - y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2 - y + 1} = -1 \text{ (ktm)} \\ \sqrt{y^2 - y + 1} = 2. \end{cases} \Leftrightarrow y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$ <p>Với <math>y = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}</math> thì <math>x = -4 + \sqrt{13}</math> và với <math>y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}</math> thì <math>x = -4 - \sqrt{13}.</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,5 |
|                             | <p>*) <math>x + y + 3y^2 = 0</math>, hay <math>x = -y - 3y^2</math>. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được</p> $\sqrt{-y^2 - y + 1} - y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-y^2 - y + 1} = y^2 - y - 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 1 \geq 0 \\ -y^2 - y + 1 = (y^2 - y - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 1 \geq 0 \\ y(y + 1)(y^2 - 3y + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1. \text{ Suy ra } x = -2.$ <p>Vậy nghiệm <math>(x; y)</math> của hệ là <math>\left(-4 + \sqrt{13}; \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right), \left(-4 - \sqrt{13}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right), (-2; -1).</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5 |
| <b>Câu 4.</b><br>(1,0 điểm) | <p>Ta có <math>\frac{3^x - 1}{(3^{-x} + 1)\sqrt{3^x + 1}} = 0 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0</math>. Rõ ràng <math>\frac{3^x - 1}{(3^{-x} + 1)\sqrt{3^x + 1}} \geq 0</math> với mọi <math>x \in [0; 1].</math></p> <p>Do đó diện tích của hình phẳng là</p> $S = \int_0^1 \frac{3^x - 1}{(3^{-x} + 1)\sqrt{3^x + 1}} dx = \int_0^1 \frac{3^x - 1}{(3^x + 1)\sqrt{3^x + 1}} \cdot 3^x dx.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5 |
|                             | <p>Đặt <math>t = \sqrt{3^x + 1}</math>, ta có khi <math>x = 0</math> thì <math>t = \sqrt{2}</math>, khi <math>x = 1</math> thì <math>t = 2</math> và <math>3^x = t^2 - 1.</math></p> <p>Suy ra <math>3^x \ln 3 dx = 2t dt</math>, hay <math>3^x dx = \frac{2t dt}{\ln 3}</math>. Khi đó ta có</p> $S = \frac{2}{\ln 3} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2 - 2}{t^3} t dt = \frac{2}{\ln 3} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) dt = \frac{2}{\ln 3} \left(t + \frac{2}{t}\right) \Big _{\sqrt{2}}^2 = \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{\ln 3}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
| <b>Câu 5.</b><br>(1,0 điểm) |  <p>Gọi <math>O = AC \cap BD</math>. Vì <math>\widehat{BCD} = 120^\circ</math> nên <math>\widehat{ABC} = 60^\circ</math></p> $\Rightarrow \Delta ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AC = a, OD = OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$ <p>Kẻ <math>OH \perp SB</math> tại <math>H</math>. Vì <math>AC \perp (SBD)</math> nên <math>AC \perp SB</math></p> $\Rightarrow SB \perp (AHC) \Rightarrow SB \perp AH \text{ và } SB \perp HC.$ $((SAB), (SBC)) = 60^\circ \Leftrightarrow (\widehat{AH}, \widehat{CH}) = 60^\circ$ $\Rightarrow \widehat{AHC} = 60^\circ \text{ hoặc } \widehat{AHC} = 120^\circ.$ <p>TH 1. <math>\widehat{AHC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AHO} = 30^\circ \Rightarrow OH = OA \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = OB</math>, vô lý vì <math>\Delta OHB</math> vuông tại <math>H</math>.</p> <p>TH 2. <math>\widehat{AHC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AHO} = 60^\circ \Rightarrow OH = OA \cdot \cot 60^\circ = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.</math></p> | 0,5 |

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                |           |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------|---|-----------|---------|---|---|---|--------|--|----------------|--|-----|
|                                     | <p>Vì 2 tam giác vuông <math>BOH</math> và <math>BSD</math> đồng dạng nên <math>\frac{OH}{SD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow SD = \frac{OH \cdot BD}{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}</math>.</p> <p><math>S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}</math>. Suy ra <math>V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SD.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}</math>.</p> <hr/> <p>Vì <math>BC \parallel AD</math> nên <math>(SBC) \parallel AD \Rightarrow d(AD, BK) = d(D, (SBC))</math>. (1)</p> <p>Kẻ <math>DP \perp BC</math> tại <math>P</math>, <math>DQ \perp SP</math> tại <math>Q</math>. Vì <math>BC \perp (SDP)</math> nên <math>BC \perp DQ \Rightarrow DQ \perp (SBC)</math>. (2)</p> <p>Từ tam giác vuông <math>DCP \Rightarrow DP = DC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}</math>. Từ tam giác vuông <math>SDP \Rightarrow DQ = \frac{a}{2}</math>. (3)</p> <p>Từ (1), (2) và (3) suy ra <math>d(AD, BK) = DQ = \frac{a}{2}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5            |           |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |
| <b>Câu 6.</b><br><b>(1,0 điểm)</b>  | <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có</p> $\frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} = \frac{xy}{(z^2+x^2)+(z^2+y^2)} + \frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)}$ $\leq \frac{xy}{2\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}} + \frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{z^2+x^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right)$ $= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{y}{2z} + \frac{y}{2x} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left( \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right).$ <p>Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có <math>x^3y^3 + y^3z^3 \geq \frac{1}{4}(xy+yz)^3</math> nên</p> $\frac{x^3y^3 + y^3z^3}{z^3x^3} \geq \frac{(xy+yz)^3}{4z^3x^3} = \frac{1}{4} \left( \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3.$ <p>Suy ra <math>P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left( \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{96} \left( \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3</math>.</p> <hr/> <p>Đặt <math>t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x}</math>, khi đó <math>t &gt; 0</math> và <math>P \leq -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}</math>.</p> <p>Xét hàm số <math>f(t) = -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}</math> với <math>t &gt; 0</math>.</p> <p>Ta có <math>f'(t) = -\frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{8}</math>; <math>f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2</math>, vì <math>t &gt; 0</math>.</p> <p>Suy ra bảng biến thiên:</p> <table><tr><td><math>t</math></td><td>0</td><td>2</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f'(t)</math></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td><math>f(t)</math></td><td></td><td><math>\frac{5}{12}</math></td><td></td></tr></table> <p>Dựa vào bảng biến thiên ta có <math>P \leq \frac{5}{12}</math>, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>t = 2</math> hay <math>x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}</math>. Vậy giá trị lớn nhất của <math>P</math> là <math>\frac{5}{12}</math>, đạt được khi <math>x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}</math>.</p> | $t$            | 0         | 2 | $+\infty$ | $f'(t)$ | + | 0 | - | $f(t)$ |  | $\frac{5}{12}$ |  | 0,5 |
| $t$                                 | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2              | $+\infty$ |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |
| $f'(t)$                             | +                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0              | -         |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |
| $f(t)$                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $\frac{5}{12}$ |           |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |
| <b>Câu 7.a</b><br><b>(1,0 điểm)</b> | <div></div> <p>Vì <math>AD</math> là phân giác trong góc <math>A</math> nên <math>AD</math> cắt đường tròn <math>(ABC)</math> tại <math>E</math> là điểm chính giữa cung <math>BC \Rightarrow IE \perp BC</math>.</p> <p>Vì <math>E</math> thuộc đường thẳng <math>x - y = 0</math> và <math>IE = IA = R \Rightarrow E(0; 0)</math>.</p> <p>Chọn <math>\vec{n}_{BC} = \vec{EI} = (2; 1) \Rightarrow</math> pt <math>BC</math> có dạng <math>2x + y + m = 0</math>.</p> <p>Từ giả thiết <math>\Rightarrow HC = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow IH = \sqrt{IC^2 - HC^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}</math></p> $\Rightarrow d(I, BC) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{ m+5 }{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC: 2x + y - 2 = 0 \\ BC: 2x + y - 8 = 0. \end{cases}$ <hr/> <p>Vì <math>\widehat{BAC}</math> nhọn nên <math>A</math> và <math>I</math> phải cùng phía đối với <math>BC</math>, kiểm tra thấy <math>BC: 2x + y - 2 = 0</math> thỏa mãn.</p> <p>Từ hệ <math>\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow B(0; 2), C\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)</math> hoặc <math>B\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right), C(0; 2)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5            |           |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |
| <b>Câu</b>                          | $M \in d_1 \Rightarrow M(m; 2m+2; m+1); N \in d_2 \Rightarrow N(n+1; n; 2n+3)$ . Suy ra                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5            |           |   |           |         |   |   |   |        |  |                |  |     |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.a<br>(1,0<br>điểm)        | $\overrightarrow{MN} = (-m+n+1; -2m+n-2; -m+2n+2).$<br>Vì $MN \parallel (P)$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ N \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n+2=0 \\ n \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=n-2 \\ n \neq 0 \end{cases}$<br>Suy ra $\overrightarrow{u_{MN}} = (3; -n+2; n+4)$ và $\overrightarrow{u_d} = (2; -1; 2).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|                             | Suy ra $\cos(MN, d) = \frac{ 3n+12 }{3\sqrt{2n^2+4n+29}} = \frac{ n+4 }{\sqrt{2n^2+4n+29}} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$<br>$\Leftrightarrow 3(n+4)^2 = 2n^2 + 4n + 29 \Leftrightarrow n^2 + 20n + 19 = 0 \Leftrightarrow n = -1$ hoặc $n = -19.$<br>*) $n = -1 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow M(-3; -4; -2), N(0; -1; 1).$<br>*) $n = -19 \Rightarrow m = -21 \Rightarrow M(-21; -40; -20), N(-18; -19; -35).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5 |
| Câu<br>9.a<br>(1,0<br>điểm) | Từ giả thiết suy ra $z_1, z_2$ không phải là số thực. Do đó $\Delta' < 0$ , hay $4(a+1)^2 - 8(4a+1) < 0$<br>$\Leftrightarrow 4(a^2 - 6a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a - 1 < 0. \quad (*)$<br>Suy ra $z_1 = \frac{a+1 - \sqrt{-(a^2 - 6a - 1)}i}{4}, z_2 = \frac{a+1 + \sqrt{-(a^2 - 6a - 1)}i}{4} = \overline{z_1}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5 |
|                             | Ta có $\frac{z_1}{z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow z_1^2$ là số ảo $\Leftrightarrow (a+1)^2 - (-(a^2 - 6a - 1)) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2. \end{cases}$<br>Đối chiếu với điều kiện (*) ta có giá trị của $a$ là $a = 0, a = 2.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5 |
| Câu<br>7.b<br>(1,0<br>điểm) | <br>$B \in BH : x = -3y + 18 \Rightarrow B(-3b+18; b),$<br>$C \in d : y = 2x + 5 \Rightarrow C(c; 2c+5).$<br>Từ giả thiết suy ra $B$ đối xứng $C$ qua đường trung trực<br>$\Delta : 3x + 19y - 279 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \text{trung điểm } BC \text{ là } M \in \Delta \end{cases}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 60b + 13c = 357 \\ 10b + 41c = 409 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(6; 4) \\ C(9; 23). \end{cases}$<br>$AC \perp BH \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{u_{BH}} = (-3; 1) \Rightarrow$ pt $AC : -3x + y + 4 = 0 \Rightarrow A(a; 3a-4)$<br>$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (6-a; 8-3a), \overrightarrow{AC} = (9-a; 27-3a).$ | 0,5 |
|                             | Ta có $\hat{A} = 135^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{(6-a)(9-a) + (8-3a)(27-3a)}{\sqrt{(6-a)^2 + (8-3a)^2} \cdot \sqrt{(9-a)^2 + (27-3a)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$<br>$\Leftrightarrow \frac{(9-a)(3-a)}{ 9-a  \sqrt{a^2 - 6a + 10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < a < 9 \\ 2(3-a)^2 = a^2 - 6a + 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4. \text{ Suy ra } A(4; 8).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,5 |
| Câu<br>8.b<br>(1,0<br>điểm) | Gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa $A, B$ và vuông góc với $(P)$ . Suy ra $M$ thuộc giao tuyến của $(Q)$ và $(P)$ .<br>$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 4; 4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}] = (0; 6; -6) = 6(0; 1; -1).$ Suy ra pt $(Q): y - z - 1 = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|                             | Gọi $d = (P) \cap (Q) \Rightarrow$ pt $d : \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow M(-2t-2; t; t-1) \in d.$<br>Ta có $MA^2 - 2MB^2 = 36 \Leftrightarrow -6t^2 + 8t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-2; 0; -1) \\ M(-\frac{14}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}). \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,5 |
| Câu<br>9.b<br>(1,0<br>điểm) | Hoành độ giao điểm của $d$ và $(C_a)$ là nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + ax - 2}{x-1} = 2x+1$ , hay<br>$x^2 - (a+1)x + 1 = 0, x \neq 1. \quad (1)$<br>Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (a+1)^2 - 4 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -3. \end{cases} \quad (2)$<br>Khi đó gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm phân biệt của (1), ta có $A(x_1; 2x_1+1), B(x_2; 2x_2+1).$<br>Do đó $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(x_1+1)^2 + (2x_1+3)^2} = \sqrt{(x_2+1)^2 + (2x_2+3)^2}$<br>$\Leftrightarrow 5x_1^2 + 14x_1 = 5x_2^2 + 14x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(5(x_1 + x_2) + 14) = 0$                                                                                                                                                                                                                                | 0,5 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | $\Leftrightarrow 5(x_1 + x_2) + 14 = 0, \text{ vì } x_1 \neq x_2. \quad (3)$ <p>Theo định lý Viet ta có <math>x_1 + x_2 = a + 1</math>. Thay vào (3) ta được <math>5(a + 1) + 14 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{19}{5}</math>, thỏa mãn điều kiện (2). Vậy <math>a = -\frac{19}{5}</math>.</p> |  |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|