

MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

Vũ Tuấn Hiền – THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam

Trong thế giới bất đẳng thức, ngoài những bất đẳng thức kinh điển và được áp dụng rất nhiều như bất đẳng thức AM – GM, bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thì cũng tồn tại một số bất đẳng thức mới được sáng tác nhưng lại có áp dụng rộng rãi trong việc chứng minh các bất đẳng thức khác, chẳng hạn như bất đẳng thức Iran 1996,... Bài viết này xin được trình bày về một bất đẳng thức nổi tiếng của Vasile Cirtoaje hay còn gọi tắt là bất đẳng thức Vasc. Nhờ bất đẳng thức này mà chúng ta có thêm một công cụ để chứng minh một lớp các bất đẳng thức với ba biến độc lập

1. Giới thiệu về bất đẳng thức Vasc và các dạng thường gặp

Bất đẳng thức Vasc thường được phát biểu như sau:

Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Khi đó:

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1$$

Chứng minh:

Do $abc = 1$ nên ta có thể đặt $a = \frac{yz}{x^2}, b = \frac{zx}{y^2}, c = \frac{xy}{z^2}$

Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} + \frac{y^4}{y^4 + y^2zx + z^2x^2} + \frac{z^4}{z^4 + z^2xy + x^2y^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\sum \frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{\sum (x^4 + x^2yz + y^2z^2)}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq \sum (x^4 + x^2yz + y^2z^2)$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$$

Thế nhưng đây lại là một bất đẳng thức quen thuộc và ta có điều phải chứng minh.

Từ đây ta suy ra dạng tổng quát của bất đẳng thức Vasc:

Cho a, b, c là 3 số thực dương, k là 1 số thực và $abc = 1$. Khi đó:

$$\frac{1}{a^{2k} + a^k + 1} + \frac{1}{b^{2k} + b^k + 1} + \frac{1}{c^{2k} + c^k + 1} \geq 1$$

Lấy 1 trừ đi từng phân thức thì ta thu được:

$$\frac{a^{2k} + a^k}{a^{2k} + a^k + 1} + \frac{b^{2k} + b^k}{b^{2k} + b^k + 1} + \frac{c^{2k} + c^k}{c^{2k} + c^k + 1} \leq 2$$

Ngoài ra ta cũng có thể viết bất đẳng thức dưới dạng:

$$\frac{1}{\frac{1}{a^{2k}} + \frac{1}{a^k} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b^{2k}} + \frac{1}{b^k} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{c^{2k}} + \frac{1}{c^k} + 1} \geq 1$$

Và từ đó ta thu được 1 dạng khác của bất đẳng thức:

$$\frac{a^k + 1}{a^{2k} + a^k + 1} + \frac{b^k + 1}{b^{2k} + b^k + 1} + \frac{c^k + 1}{c^{2k} + c^k + 1} \leq 2$$

Tùy vào từng bài toán mà ta có thể áp dụng chúng một cách linh hoạt

Sau đây ta sẽ đi đến ứng dụng của bất đẳng thức này

2. Ứng dụng của bất đẳng thức Vasc

Bất đẳng thức Vasc là một bất đẳng thức khá chặt, và nó giúp ta giải được một số bài toán có dạng $abc = 1$ và cần đánh giá biểu thức $f(a) + f(b) + f(c) \geq$

$(\leq)$ một hằng số nào đó. Khi đó ta chỉ cần đánh giá các biểu thức

$f(a), f(b), f(c)$ để lần lượt đưa về các phân thức của bất đẳng thức Vasc và sau đó cộng lại suy ra đpcm

VD1: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{4b^2 - 2b + 1} + \frac{1}{4c^2 - 2c + 1} \geq 1$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{4a^2 - 2a + 1} \geq \frac{1}{a^4 + a^2 + 1} \Leftrightarrow a(a^3 - 3a + 2) \geq 0$$

(hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM)

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, áp dụng bất đẳng thức Vasc ta có đpcm.

VD2: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^3 + 1} + \frac{b}{2b^3 + 1} + \frac{c}{2c^3 + 1} \leq 1$$

(Trần Quốc Luật, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{2a}{2a^3 + 1} \leq \frac{a^2 + 1}{a^4 + a^2 + 1} \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

(hiển nhiên đúng)

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta có đpcm.

VD3: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2 + a + 4}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 + b + 4}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2 + c + 4}} \leq 1$$

(Zhao Bin)

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2 + a + 4}} \leq \frac{a + 1}{2(a^2 + a + 1)} \Leftrightarrow (a + 1)^2(4a^2 + a + 4) \geq 4(a^2 + a + 1)^2$$
$$\Leftrightarrow a(a - 1)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta có đpcm

VD4: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

(Vũ Đình Quý)

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} \leq \frac{a^2 + 1}{a^4 + a^2 + 1} \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 - a + 1) \geq 0$$

(hiển nhiên đúng)

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta có đpcm.

Trên đây là một số bài toán đơn giản để giới thiệu sơ qua về bất đẳng thức Vasc. Bây giờ, có một vấn đề được đặt ra mà chắc hẳn các bạn sẽ thắc mắc. Làm thế nào để đưa ra được các đánh giá như trên? Hay nói cách khác, làm thế nào để có thể chọn số k cho phù hợp?

Xin được giới thiệu một kĩ thuật nho nhỏ để giải quyết vấn đề này

Quay trở lại ví dụ đầu tiên

Giờ ta giả sử có một số k thỏa mãn:

$$\frac{1}{4a^2 - 2a + 1} \geq \frac{1}{a^{2k} + a^k + 1}$$

Bất đẳng thức này sẽ tương đương với:

$$a^{2k} + a^k + 1 \geq 4a^2 - 2a + 1$$

Xét hàm $f(a) = (a^{2k} + a^k + 1) - (4a^2 - 2a + 1)$

Để ý đẳng thức xảy ra khi $a = 1$ nên tính $f'(a)$ và cho $f'(1) = 0$ ta tìm ra $k = 2$

Ví dụ 5: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3$$

(UK TST 2005)

Lời giải:

Giả sử có số k mà:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} \geq \frac{3}{a^{2k} + a^k + 1}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$3a^2 + 5a \geq a^{2k+1} + 3a^{2k} + a^{k+1} + 3a^k$$

Xét $f(a) = (3a^2 + 5a) - (a^{2k+1} + 3a^{2k} + a^{k+1} + 3a^k)$

$$f'(1) = 9 - 12k$$

Do đó để $f'(1) = 0$ thì ta chọn $k = \frac{3}{4}$

Đặt $x = a^{\frac{1}{4}}$, $y = b^{\frac{1}{4}}$, $z = c^{\frac{1}{4}}$ thì $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{x^4 + 3}{(x^4 + 1)^2} \geq \frac{3}{x^6 + x^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 x^3 (x^5 + 2x^4 - x^2 + 1) \geq 0$$

(hiển nhiên đúng vì $x^4 - x^2 + 1 \geq 0$)

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta có đpcm.

Cuối cùng, xin được đưa ra một lời giải cho bài VMO 2014 bằng bất đẳng thức Vasc

Ví dụ 6: Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3 y^4 z^3}{(x^4 + y^4)(xy + z^2)^3} + \frac{y^3 z^4 x^3}{(y^4 + z^4)(yz + x^2)^3} + \frac{z^3 x^4 y^3}{(z^4 + x^4)(zx + y^2)^3} \leq \frac{3}{16}$$

(VMO 2014)

Lời giải:

Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ thì $abc = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{(a^4 + 1)(b + c)^3} + \frac{1}{(b^4 + 1)(c + a)^3} + \frac{1}{(c^4 + 1)(a + b)^3} \leq \frac{3}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM:

$$(b + c)^3 \geq 8bc\sqrt{bc} \geq \frac{16}{a^2 + a}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{a^2 + a}{a^4 + 1} + \frac{b^2 + b}{b^4 + 1} + \frac{c^2 + c}{c^4 + 1} \leq 3$$

Ta có:

$$\frac{a^2 + a}{a^4 + 1} \leq \frac{3(a + 1)}{2(a^2 + a + 1)} \Leftrightarrow (a - 1)^2 (a + 1) (3a^2 + 4a + 3) \geq 0$$

(hiển nhiên đúng)

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta có đpcm.

Hi vọng bài viết này đã phần nào giới thiệu được đôi nét về bất đẳng thức Vasc cùng ứng dụng rộng rãi và các kĩ thuật sử dụng của bất đẳng thức này

3. Bài tập

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 7ab + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 7bc + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + 7ca + a^2}} \geq 1$$

Bài 2: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(b+1)^3} + \frac{1}{(c+1)^3} \geq \frac{3}{8}$$

(VN TST 2005)

Bài 3: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 3} + \frac{b}{b^2 + 3} + \frac{c}{c^2 + 3} \leq \frac{3}{4}$$

Bài 4: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a^3 + 1}\right)^5 + \left(\frac{b}{b^3 + 1}\right)^5 + \left(\frac{c}{c^3 + 1}\right)^5 \leq \frac{3}{2^5}$$

Tài liệu tham khảo:

1. Diễn đàn Mathlink: www.artofproblemsolving.com
2. Diễn đàn Toán học: diendantoanhoc.net/forum
3. Bất đẳng thức và những lời giải hay – Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh