

Bất đẳng thức Garfunkel và một số mở rộng

Lê Hữu Điền Khuê

Email : huudienkhue.le@gmail.com

Tháng 5 năm 2008*

Tóm tắt nội dung

Bài viết trước tiên sẽ giới thiệu với bạn đọc về bất đẳng thức Garfunkel và một số cách chứng minh mà tác giả sưu tầm được. Theo sau là những cố gắng mở rộng bất đẳng thức này theo nhiều hướng khác nhau, điều này cũng làm nảy sinh một số vấn đề rất khó mà tác giả chưa có lời giải, được phát biểu dưới dạng các bài toán mở. Tất cả các kết quả và lời giải đều được ghi rõ nguồn, trừ những kết quả của tác giả.

1 Giới thiệu

Năm 1989, Jack Garfunkel đưa ra bài toán sau trên tạp chí Toán học Canada Crux Mathematicorum [2] :

Bài toán. (Bài toán 1490*, tạp chí Crux) *Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

với mọi số thực dương a, b, c .

Đây là một bài toán bất đẳng thức thuộc dạng tìm hằng số tốt nhất. Thông thường đối với dạng bài này, việc đầu tiên cần làm không phải là bắt tay trực tiếp vào công việc tìm kiếm cách chứng minh bất đẳng thức, mà là xác định giá trị của hằng số cần tìm, điều này đồng nghĩa với việc phải xác định được các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức¹. “Oái ăm” thay, đối với bài toán này, đẳng thức không

*Bài viết được chỉnh sửa và bổ sung tháng 12 năm 2008.

¹Ngày nay, có rất nhiều bài toán bất đẳng thức mà việc tìm hằng số tốt nhất được làm (và chỉ có thể được làm !) sau khi quy được bài toán về một biến, đó thường là các bài toán bất đẳng thức có dấu đẳng thức xảy ra tại các điểm vô tỉ chứa căn phức tạp, hằng số tốt nhất đó thường là giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của một hàm số nào đó. Bạn đọc có thể thấy rõ điều này trong những phần sau của bài viết.

xảy ra trong trường hợp “cổ điển” $a = b = c$ mà người ta vẫn thường nghĩ đến tại thời điểm đó. Phải chăng đây là điều đã khiến cho bài toán trở thành một trong những bài toán không có lời giải của tạp chí Crux trong một thời gian ?

Sự phát triển của Bất đẳng thức trong những năm gần đây đem lại cho chúng ta một kinh nghiệm rằng, đối với những bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị ba biến, đẳng thức thường (không phải luôn luôn) xảy ra khi hai trong ba biến bằng nhau hoặc có một biến đạt giá trị tại biên. Chúng ta hãy thử áp dụng nhận xét này vào bài toán trên.

Nếu $b = c$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq k\sqrt{a+2b}.$$

Theo bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(a+b+b)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{a+2b}$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Do đó $k \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Nếu $c = 0$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a+b}$$

hay

$$\sqrt{b(a+b)} \leq (k-1)(a+b) + b.$$

Cho $b = 0$ ta được $k \geq 1$, nên $k-1 \geq 0$. Từ đó theo bất đẳng thức **AM-GM**

$$(k-1)(a+b) + b \geq 2\sqrt{k-1}\sqrt{b(a+b)}$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(k-1)a = (2-k)b$, điều này chỉ có thể xảy ra khi $1 \leq k \leq 2$.

Từ đây chúng ta có

$$2\sqrt{k-1} \geq 1 \text{ hay } k \geq \frac{5}{4}.$$

Vậy nếu ta chọn $\frac{5}{4}$ là giá trị nhỏ nhất của k thì đẳng thức cũng có thể xảy ra (vì $1 < \frac{5}{4} < 2$) (với $c = 0, a = 3b$ hoặc các hoán vị).

So sánh $\frac{5}{4} > \sqrt{\frac{3}{2}}$ ta có thể dự đoán rằng $\frac{5}{4}$ chính là giá trị tốt nhất của k và bắt tay vào việc kiểm chứng (chứng minh cụ thể). Trên thực tế thì đây đúng là giá trị cần tìm. Nó cho chúng ta bất đẳng thức **Garfunkel** :

Với mọi số thực không âm a, b, c trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0, ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) tỉ lệ với $(3, 1, 0)$ hoặc $(0, 3, 1)$ hoặc $(1, 0, 3)$.

Đẹp, khó và đầy thử thách, có thể nói rằng, bất đẳng thức **Garfunkel** ngày nay được biết đến như một trong những bất đẳng thức đại số nổi tiếng. Quá trình tìm kiếm chứng minh cho nó cũng đã mang lại nhiều phương pháp mới trong Bất đẳng thức.

2 Một số cách chứng minh

Bất đẳng thức **Garfunkel** là một trong các bất đẳng thức đại số thu hút được nhiều sự quan tâm trong giới Bất đẳng thức, do đó cũng có không ít cách chứng minh được đưa ra cho nó, đặc biệt là trong vòng 5 năm trở lại đây (thời kì phát triển mạnh mẽ của Bất đẳng thức). Xin được giới thiệu với bạn đọc một số cách chứng minh mà tác giả tập hợp được. Trong đa số các cách chứng minh dưới đây, bạn đọc sẽ thấy được rằng, việc “biết trước” trường hợp xảy ra đẳng thức là rất quan trọng, thậm chí nó chính là mấu chốt của lời giải. Điều này có thể sẽ đem đến cho bạn đọc một suy nghĩ rằng, những lời giải đó là thiếu tự nhiên. Tuy nhiên, theo lối làm bất đẳng thức hiện đại, việc tìm ra trường hợp xảy ra đẳng thức (hầu hết là đối với các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi các biến lệch nhau và tỉ lệ nhau theo tỉ lệ của các số nguyên) là một bước cần thiết của lời giải, mà người ta thường không ghi ra, hay nói cách khác, nó là phần “ẩn” của lời giải.

Các cách chứng minh sẽ được xếp theo trình tự thời gian. Bạn đọc hãy tự kiểm tra trường hợp xảy ra đẳng thức.

Chứng minh 1. (*Gabriel Dospinescu*, [5], 2003)

Đặt

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2}}, y = \sqrt{\frac{a+c}{2}}, z = \sqrt{\frac{b+c}{2}},$$

thì

$$a = x^2 + y^2 - z^2, b = x^2 + z^2 - y^2, c = y^2 + z^2 - x^2$$

và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{x} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{y} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{z} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

hay

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Chúng ta thấy rằng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y \geq z \geq 0$.

Vì

$$\frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{5}{4} \left(x + \sqrt{y^2 + z^2} \right),$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5}{4} \left(x + \sqrt{y^2 + z^2} \right),$$

bất đẳng thức này tương đương với $f(x) \leq 0$ với mọi x thoả mãn $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y$ trong đó

$$f(x) = 4(y-z)x^3 - yzx^2 + \left(4z^3 - 4y^3 + 4y^2z + 4yz^2 - 5yz\sqrt{y^2 + z^2} \right)x + 4yz(y^2 - z^2).$$

Nếu $y = z$ thì

$$f(x) = -xy^2(x-y) - xy^3(5\sqrt{2} - 7) \leq 0,$$

bất đẳng thức đúng. Giả sử $y > z$. Ta có

$$\begin{aligned} f(0) &= 4yz(y^2 - z^2) \geq 0 \\ f(y) &= y^2z \left(3y + 4z - 5\sqrt{y^2 + z^2} \right) \leq 0 \\ f\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right) &= 2yz \left(4z\sqrt{y^2 + z^2} - y^2 - 5z^2 \right) \\ &= -2yz \left(\sqrt{y^2 + z^2} - 2z \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Do đó, vì $f(x)$ liên tục, ta có $f(x)$ có một nghiệm không dương, một nghiệm trong khoảng $(0, y]$, một nghiệm lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{y^2 + z^2}$; như vậy $f(x)$ không có nghiệm nào nằm giữa y và $\sqrt{y^2 + z^2}$ (vì $f(x)$ là một đa thức bậc 3 theo x nên nó chỉ có tối đa là 3 nghiệm), nghĩa là $f(x)$ không đổi dấu trong đoạn $[y, \sqrt{y^2 + z^2}]$, mặt khác ta đã chứng minh $f(y) \leq 0$ và $f(\sqrt{y^2 + z^2}) \leq 0$, vì vậy $f(x) \leq 0$ với mọi x thoả mãn $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Bình luận. Ý tưởng đổi biến (a, b, c) qua (x, y, z) là rất tự nhiên. Điểm mấu chốt trong lời giải chính là sử dụng bất đẳng thức $\frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{5}{4} \left(x + \sqrt{y^2 + z^2} \right)$ để đưa về một bất đẳng thức đa thức theo biến x . Đây quả là một việc làm “mạo hiểm” vì nó đã phá vỡ tính hoán vị của bất đẳng thức. Các biểu thức của $f(y)$ và $f(\sqrt{y^2 + z^2})$ đơn giản đến không ngờ ! Đây quả là một lời giải đẹp và đầy... táo bạo !

Chứng minh 2. (dựa trên ý tưởng của *Phạm Kim Hùng*, [1], 2006) Theo *Chứng minh 1* ta phải chứng minh

$$x + y + z + \frac{(x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

hay

$$\frac{(x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z)^2}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} (x + y + z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z)^2 \quad (2)$$

với mọi $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y \geq z \geq 0$.

Trước hết ta chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét : Nếu ta giảm x, y, z đi cùng một lượng t thì vế trái của bất đẳng thức (2) tăng lên trong khi vế phải thì giảm xuống.

Để chứng minh nhận xét, ta phải chứng minh

$$f(t) = \frac{(x + y + z - 3t)^2}{(x - t)(y - t)(z - t)}$$

là một hàm đồng biến và

$$g(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} (x + y + z - 3t) \sqrt{(x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2} - (x + y + z - 3t)^2$$

là một hàm nghịch biến trên $[0, z]$.

Thật vậy, nếu ta đặt $m = x - t, n = y - t, p = z - t$ ($m, n, p \geq 0$) và $A = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, B = m + n + p$ thì

$$m^2 n^2 p^2 f'(t) = (m + n + p)((m + n + p)(mn + np + pm) - 6mnp) \geq 0$$

và

$$g'(t) = - \left(\frac{15\sqrt{2}}{4} A + \frac{5\sqrt{2}}{4} \frac{B^2}{A} - 6B \right) \leq 0$$

(cả hai bất đẳng thức trên đều đúng theo bất đẳng thức **AM-GM**)

Nhận xét được chứng minh.

Bây giờ, theo nhận xét, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau khi giảm x, y, z đi cùng một lượng t nằm giữa 0 và z . Chúng ta sẽ chọn t sao cho $(x - t)^2 = (y - t)^2 + (z - t)^2$ (dễ dàng kiểm tra sự tồn tại của t), như vậy ta thấy rằng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $x^2 = y^2 + z^2$, nghĩa là $c = 0$. Lúc đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b},$$

điều này đúng vì

$$VP - VT = \frac{(\sqrt{a+b} - 2\sqrt{b})^2}{4\sqrt{a+b}} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bình luận. Chứng minh trên đã sử dụng phương pháp *Đồn biến toàn miền*, đây là một phương pháp mạnh để giải những bài toán bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị có trường hợp đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau hoặc một biến đạt giá trị tại biên. Bạn đọc có thể tìm thấy thông tin chi tiết của phương pháp này trong [1].

Có một bước rất thú vị (và rất quan trọng !) của lời giải trên, đó là việc nhân thêm hai vế của bất đẳng thức (1) với cùng một lượng $(x + y + z)$ (bước thực hiện trước khi đưa ra *Nhận xét*). Tại sao chúng ta lại phải làm như vậy ? Hãy xét bất đẳng thức (1) :

$$\frac{(x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z).$$

Nếu ta giảm x, y, z đi cùng một lượng t ($0 \leq t \leq z$) thì rõ ràng vế trái của (1) tăng lên. Xét hàm số

$$f(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{(x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2} - (x + y + z - 3t).$$

Bằng cách lấy đạo hàm, dễ dàng kiểm tra rằng hàm số này không tăng cũng không giảm, nghĩa là ta không thể xác định được chiều biến thiên của vế phải, do đó không thể đạt được kết quả như mong muốn.

Chứng minh 3. (Võ Quốc Bá Cẩn, [6], 2007) Theo bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &\leq \sum a(5a + b + 9c) \cdot \sum \frac{a}{(a + b)(5a + b + 9c)} \\ &= 5(a + b + c)^2 \cdot \sum \frac{a}{(a + b)(5a + b + 9c)}. \end{aligned}$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$(a + b + c) \cdot \sum \frac{a}{(a + b)(5a + b + 9c)} \leq \frac{5}{16}.$$

Bất đẳng thức này đúng vì

$$\begin{aligned} &(VP - VT) \left(16 \prod (a + b)(5a + b + 9c) \right) \\ &= \sum ab(a + b)(a + 9b)(a - 3b)^2 \\ &\quad + 243 \sum a^3 b^2 c + 835 \sum a^3 b c^2 + 232 \sum a^4 b c + 1230 a^2 b^2 c^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(bạn đọc tự kiểm tra)

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bình luận. Bước sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** rất thú vị. Chúng ta hãy thử giải thích cách tìm ra các thừa số 5, 1, 9.

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \leq (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x(a+b)} + \frac{b}{y(b+c)} + \frac{c}{z(c+a)}\right).$$

trong đó x, y, z là các số thực không âm.

Một cách tự nhiên, ta chọn

$$x = a + mb + nc, y = b + mc + na, z = c + ma + nb$$

với m, n là các số thực không âm. Khi đó ta có

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \leq \left(\sum \frac{a}{(a+b)(a+mb+nc)}\right) \left(\sum a(a+mb+nc)\right)$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a(a+b)(a+mb+nc)^2}{a} = \frac{b(b+c)(b+mc+na)^2}{b} = \frac{c(c+a)(c+ma+nb)^2}{c}.$$

Chúng ta biết rằng, ở bất đẳng thức ban đầu, đẳng thức xảy ra khi $a = 3, b = 1, c = 0$ (hay các hoán vị), thay các giá trị này vào dãy đẳng thức ở trên ta được

$$4(3+m)^2 = (1+3n)^2 \text{ hay } 2m - 3n = -5.$$

Hơn nữa, để có thể rút gọn được một thừa số $(a+b+c)$, ta chọn m, n sao cho

$$\sum a(a+mb+nc) = (a+b+c)^2,$$

nghĩa là

$$m + n = 2.$$

Từ đây giải ra ta được

$$m = \frac{1}{5} \text{ và } n = \frac{9}{5}.$$

Công việc còn lại sau khi áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** là chứng minh một bất đẳng thức phân thức, sau khi quy đồng nó trở thành một bất đẳng thức đa thức hoán vị bậc 6.

Để kết thúc phần này, tác giả xin đưa ra một chứng minh bằng bất đẳng thức **AM-GM** và xin nhường quyền bình luận cho bạn đọc.

Chứng minh 4. (*Lê Hữu Diên Khuê*, 2008) Giả sử $a + b + c = 1$ và đặt $A = (a + b)(b + c)(c + a)$, $B = \sum a^2(b + c)(c + a)$, ta có bất đẳng thức ban đầu tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \left(\sum a \sqrt{(b + c)(c + a)} \right)^2 &\leq \frac{25}{16} A \\ B + 2 \sum ab(a + c) \sqrt{(a + b)(b + c)} &\leq \frac{25}{16} A \\ 32 \sum ab(a + c) \sqrt{(a + b)(b + c)} &\leq 25A - 16B. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức **AM-GM** cho hai số ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &= 2^{10} A \left(\sum ab \sqrt{a + c} \right)^2 \\ &= 2^{10} A \left(\sum a^2 b^2 (c + a) + 2 \sum ab^2 c \sqrt{(a + c)(a + b)} \right) \\ &\leq 2^{10} A \left(\sum a^2 b^2 (c + a) + 2 \sum ab^2 c (2a + b + c) \right) \\ &= 2^{10} A (ab + bc + ca) (a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc) \\ &= 4(32A(ab + bc + ca))(8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc) \\ &\leq (32A(ab + bc + ca) + 8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc)^2. \end{aligned}$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$32A(ab + bc + ca) + 8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc \leq 25A - 16B,$$

bất đẳng thức này có thể được viết lại dưới dạng đồng bậc

$$32A(ab + bc + ca) + 8(a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc)(a + b + c)^2 \leq 25A(a + b + c)^2 - 16B(a + b + c).$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng đó

$$VP - VT = \sum ab(a + b)(a - 3b + 2c)^2 + 2abc \left(3 \sum a^2 + \sum ab \right) \geq 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Bước đầu tiên sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** có thể được thay thế bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** như sau :

$$\begin{aligned} VT^2 &= 2^{10} A \left(\sum ab \sqrt{a + c} \right)^2 \\ &\leq 2^{10} A \left(\sum ab \right) \left(\sum ab(a + c) \right) \\ &= 2^{10} A (ab + bc + ca) (a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc). \end{aligned}$$

3 Một số mở rộng

Trong phần này chúng ta sẽ cố gắng để mở rộng bất đẳng thức **Garfunkel** theo nhiều hướng khác nhau.

Rất tự nhiên, ta nghĩ đến việc thay đổi số biến, chẳng hạn:

Bài toán 1. *Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

đúng với mọi số thực không âm a, b, c, d .

Lời giải. Cho $(a, b, c, d) = (3, 1, 0, 0)$ ta được $k \geq \frac{5}{4}$. Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức khi $k = \frac{5}{4}$ và như thế $\frac{5}{4}$ sẽ là giá trị nhỏ nhất của k .

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min(a, b, c, d)$. Theo bất đẳng thức **Garfunkel** ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b+c}} &\leq \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}} - \frac{d}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{b+d+a}} \\ &\leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d} - \frac{d}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{b+d+a}} \\ &\leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d} \quad (\text{vì } d+a+b \geq c+d+a) \end{aligned}$$

Bài toán kết thúc.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự, bạn đọc hãy tự chứng minh kết quả sau :

Bài toán 2. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c, k thoả mãn $k \leq \max(a, b, c)$ ta có*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+k}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+k}} + \frac{c}{\sqrt{c+a+k}} + \frac{k}{\sqrt{a+b+c}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+k}.$$

Lưu ý là bất đẳng thức trên sẽ trở thành bất đẳng thức **Garfunkel** khi $k = 0$.

Lời giải của *Bài toán 1* gợi ý cho ta đi đến với bài toán tổng quát hơn:

Bài toán 3. *Cho số tự nhiên n lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho bất đẳng thức sau đây đúng với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:*

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3+\dots+a_n}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1+\dots+a_{n-2}}} \\ \leq k\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_n}. \end{aligned}$$

Lời giải. Cho $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 1, 0, \dots, 0)$ ta được $k \geq \frac{5}{4}$. Nếu ta chứng minh được bất đẳng thức khi $k = \frac{5}{4}$ thì $\frac{5}{4}$ là giá trị nhỏ nhất của k . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này bằng quy nạp.

Khi $n = 3$ bất đẳng thức trở thành bất đẳng thức **Garfunkel**. Giả sử bất đẳng thức đúng với n số, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$ số.

Đặt $VT = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = A_n$, thế thì theo giả thiết quy nạp ta có

$$A_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

với $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$.

Chúng ta phải chứng minh

$$A_{n+1} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}}.$$

Giả sử $a_{n-1} = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$. Đặt $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + a_{n+1}$ và $B_n = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Ta có

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} + \frac{b_2}{\sqrt{b_2 + b_3 + \dots + b_n}} + \dots + \\ &+ \frac{b_{n-1}}{\sqrt{b_{n-1} + b_n + b_1 + \dots + b_{n-3}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \\ &+ \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &- \frac{b_n}{\sqrt{b_n + b_1 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \\ &+ \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \right) \\ &+ \left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \right). \end{aligned}$$

Vì vậy, từ

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$$

và

$$a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}$$

ta có

$$A_{n+1} \leq B_n.$$

Mặt khác theo giả thiết quy nạp

$$B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}$$

Do đó

$$A_{n+1} \leq B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}},$$

nghĩa là bất đẳng thức cũng đúng với $n + 1$ số. Bài toán kết thúc.

Kết quả ban đầu thu được thật thú vị. Rất tự nhiên, một câu hỏi khác được đặt ra : với bất đẳng thức sau thì sao :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k\sqrt{a+b+c+d} ?$$

Đây là một vấn đề rất khó và theo hiểu biết của tác giả thì vẫn chưa có lời giải nào được đưa ra cho nó. Tuy nhiên, sử dụng máy tính, *Ji Chen* đã tìm ra kết quả gần đúng sau² :

Giá trị nhỏ nhất của k là $1.4352668092582209310763 \cdots$, là một nghiệm của đa thức $16k^{16} + 215k^{14} - 6520k^{12} - 119315k^{10} + 2624314k^8 - 13071319k^6 + 47083212k^4 - 63453437k^2 + 2805634$,

ứng với $d = 0$ và các giá trị của a, b, c như sau :

$a = 0.57342129895395259025749 \cdots$ là một nghiệm của đa thức $3016a^8 - 30106a^7 + 130587a^6 - 320588a^5 + 485356a^4 - 461664a^3 + 267664a^2 - 85824a + 11584$,

$b = 0.23242913083753598063825 \cdots$ là một nghiệm của đa thức $1508b^8 + 14679b^7 + 58928b^6 + 124964b^5 + 147560b^4 + 90672b^3 + 19264b^2 - 4752b - 1600$,

$c = 0.19414957020851142910425 \cdots$ là một nghiệm của đa thức $754c^8 - 5845c^7 + 19716c^6 - 37935c^5 + 45610c^4 - 35003c^3 + 16560c^2 - 4241c + 400$.

Bạn đọc hẳn đồng ý với tác giả rằng kết quả trên không mang nhiều ý nghĩa trong việc chứng minh bất đẳng thức. Liệu có thể tìm được giá trị chính xác của k không ? Xin được đặt lại câu hỏi này như là một bài toán mở :

Bài toán mở 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao bất đẳng thức*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

đúng với mọi số thực không âm a, b, c, d .

²Xem [7]

Tác giả kết thúc hướng đi này bằng một kết quả không mạnh nhưng đẹp :
Bài toán 4. (*Mircea Lascu, [7]*) Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực không âm a, b, c, d :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} < \frac{3}{2}\sqrt{a+b+c+d}.$$

Lời giải. (*Võ Quốc Bá Cẩn*) Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c+d = 1$ và $a+c \geq b+c$. Khi đó, nếu đặt $x = a+c$ thì $x \geq \frac{1}{2}$. Theo bất đẳng thức **Garfunkel** ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c} = \frac{5}{4}\sqrt{1-d}$$

và

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{c+d+a} = \frac{5}{4}\sqrt{1-b}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b}} &\leq \frac{5}{4}\sqrt{1-d} - \frac{c}{\sqrt{c+a}} + \frac{5}{4}\sqrt{1-b} - \frac{a}{\sqrt{a+c}} \\ &= \frac{5}{4}(\sqrt{1-b} + \sqrt{1-d}) - \sqrt{c+a} \\ &\leq \frac{5}{4}\sqrt{2(2-b-d)} - \sqrt{c+a} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra rằng $\frac{5}{4}\sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$ với mọi x thỏa mãn $1 \geq x \geq \frac{1}{2}$, từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức không xảy ra.

Chúng ta tiếp tục đi theo một hướng khác để mở rộng bài toán : *thay đổi hệ số*. Một kết quả khá quen thuộc là :

Bài toán 5. (*Phạm Kim Hùng, [1]*) Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c :

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

Đối với bất đẳng thức này thì $\sqrt{\frac{3}{2}}$ chưa phải là hằng số tốt nhất (và do đó đẳng thức không thể xảy ra). Xin đưa ra một kết quả mạnh hơn như sau :

Bài toán 6. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c :

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

trong đó $k = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1.17995968$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2 + 2\sqrt{3}, b = 1, c = 0$ và các hoán vị.

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{a + 2b}, y = \sqrt{c + 2a}, z = \sqrt{b + 2c}$, thế thì

$$a = \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9}, b = \frac{z^2 + 4x^2 - 2y^2}{9}, c = \frac{y^2 + 4z^2 - 2x^2}{9}.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\sum \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$$

hay

$$2 \sum \frac{y^2 - z^2}{x} + 2 \sum \frac{y^2}{x} - 2(x + y + z) \leq 3k \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 3(x + y + z)$$

hay

$$\begin{aligned} & 2(x - y)(y - z)(x - z) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ & \leq 3k \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 3(x + y + z) - 2 \sum \frac{(x - y)^2}{x} \end{aligned} \quad (3)$$

Ta thấy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $\sqrt{\frac{y^2 + 4z^2}{2}} \geq x \geq y \geq z \geq 0$. Từ điều kiện $2x^2 \leq y^2 + 4z^2$ dễ dàng kiểm tra rằng phương trình $2(x - t)^2 = (y - t)^2 + 4(z - t)^2$ có hai nghiệm t_1 và t_2 thoả mãn $0 \leq t_1 \leq \min(t_2, z)$ và với mọi $0 \leq t \leq t_1$ ta có $2(x - t)^2 \leq (y - t)^2 + 4(z - t)^2$.

Dễ thấy rằng nếu ta giảm x, y, z đi cùng một lượng t trong đoạn $[0, t_1]$ thì vế trái của (3) tăng lên. Ta sẽ chứng minh vế phải giảm xuống, nghĩa là hàm số

$$f(t) = 3k \sqrt{3((x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2)} - 3(x + y + z - 3t) - 2 \sum \frac{(x - y)^2}{x - t}$$

là một hàm nghịch biến trên đoạn $[0, t_1]$.

Thật vậy, đặt $m = x - t, n = y - t, p = z - t$ ta có

$$f'(t) = -9k \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} + 9 - 2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2}.$$

Ta phải chứng minh

$$2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq 9 - 9k \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}}.$$

Vì $k > 1$ nên chỉ cần chứng minh

$$2 \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2} \geq 9 - 9 \frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} VP &= 9 \left(1 - \frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}} \right) \\ &= 9 \times \frac{3(m^2+n^2+p^2) - (m+n+p)^2}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)} \times (\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)} + m+n+p)} \\ &\geq \frac{9}{2} \times \frac{\sum (m-n)^2}{(m+n+p)^2}. \end{aligned}$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$2 \sum \frac{(m-n)^2}{m^2} \geq \frac{9}{2} \frac{\sum (m-n)^2}{(m+n+p)^2}$$

hay

$$\sum (m-n)^2 \left(\frac{4}{m^2} - \frac{9}{(m+n+p)^2} \right) \geq 0,$$

bất đẳng thức này đúng vì

$$2(m+n+p) \geq 2m + \sqrt{4n^2 + 4p^2} \geq 2m + \sqrt{n^2 + 4p^2} \geq 3m \geq 3n \geq 3p.$$

Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau khi đã giảm x, y, z đi cùng một lượng t trong đoạn $[0, t_1]$. Ta sẽ chọn $t = t_1$, khi đó ta thấy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $2x^2 = y^2 + 4z^2$, nghĩa là $c = 0$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a+b}.$$

Giả sử $a+b=1$, ta cần chứng minh

$$g(b) = \frac{1-b}{\sqrt{1+b}} + \sqrt{b} \leq k$$

với mọi $b \in [0, 1]$. Tính đạo hàm

$$g'(b) = -\frac{(b+3)}{2(1+b)\sqrt{1+b}} + \frac{1}{2\sqrt{b}}.$$

Suy ra $g'(b)$ cùng dấu với $\sqrt{(1+b)^3} - (b+3)\sqrt{b}$, biểu thức này lại cùng dấu với $(1+b)^3 - b(b+3)^2$ hay $-3b^2 - 6b + 1$. Từ đó dễ dàng kiểm tra rằng

$$\max_{[0,1]} g(b) = g\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = k.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Bạn đọc hãy tự mình kiểm tra lại điều kiện xảy ra đẳng thức.

Tổng quát hơn, ta có bài toán sau :

Bài toán 7. Cho q là số thực thoả mãn $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ hoặc $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26} \approx 1.193375245$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

đúng với mọi số thực không âm a, b, c .

Lời giải. Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1 : $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$. Cho $a = b = c = 1$ ta được $k \geq \sqrt{\frac{3}{q+1}}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với $k = \sqrt{\frac{3}{q+1}}$ và như thế đây sẽ là giá trị nhỏ nhất của k .

Ta phải chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq \sqrt{\frac{3}{q+1}} \sqrt{a+b+c}.$$

Theo bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$VT^2 \leq (a+b+c) \left(\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa} \right).$$

Chỉ cần chứng minh

$$\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa} \leq \frac{3}{1+q},$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \geq \frac{3}{1+q}.$$

Lại theo bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**

$$VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum b(a+qb)}.$$

Như vậy chỉ cần chứng minh

$$(1+q)(a+b+c)^2 \geq 3 \sum b(a+qb)$$

hay

$$(1-2q)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy giá trị nhỏ nhất của k trong trường hợp này là $\sqrt{\frac{3}{q+1}}$.

Trường hợp 2 : $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$. Đặt

$$x = \sqrt{a+qb}, y = \sqrt{c+qa}, z = \sqrt{b+qc}.$$

Khi đó

$$a = \frac{x^2 + q^2y^2 - qz^2}{9}, b = \frac{z^2 + q^2x^2 - qy^2}{9}, c = \frac{y^2 + q^2z^2 - qx^2}{9}.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\sum \frac{x^2 + q^2y^2 - qz^2}{(q^3+1)x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{q+1}}$$

hay

$$\begin{aligned} & q \sum \frac{y^2 - z^2}{x} + (q^2 - q) \sum \frac{y^2}{x} - (q^2 - q)(x + y + z) \\ & \leq \frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (q^2 - q + 1)(x + y + z) \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} & q(x-y)(y-z)(x-z) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ & \leq \frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (q^2 - q + 1)(x + y + z) - (q^2 - q) \sum \frac{(x-y)^2}{x} \end{aligned} \quad (4)$$

Ta thấy rằng chỉ cần chứng minh (4) trong trường hợp $\sqrt{\frac{y^2+qz^2}{q}} \geq x \geq y \geq z \geq 0$. Từ điều kiện $qx^2 \leq y^2 + q^2z^2$, dễ dàng kiểm tra rằng tồn tại t_1 thỏa mãn $0 \leq t_1 \leq z$, $q(x-t_1)^2 = (y-t_1)^2 + q^2(z-t_1)^2$ và với mọi $0 \leq t \leq t_1$ ta có $q(x-t)^2 \leq (y-t)^2 + q^2(z-t)^2$.

Nếu ta giảm x, y, z đi cùng một lượng t trong đoạn $[0, t_1]$ thì rõ ràng vế trái của (4) tăng lên. Ta sẽ chứng minh vế trái giảm xuống, như vậy, bằng lập luận tương tự, ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $c = 0$. Muốn chứng minh điều này, ta phải chỉ ra rằng

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} \\ &\quad - (q^2 - q) \sum \frac{(x-y)^2}{x-t} - (q^2 - q + 1)(x + y + z - 3t) \end{aligned}$$

là một hàm nghịch biến trên $[0, t_1]$.

Đặt $m = x - t, n = y - t, p = z - t$ ($m, n, p \leq 0$), khi đó ta có

$$f'(t) = -\frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}} \times \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} + 3(q^2-q+1) - (q^2-q) \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2}.$$

Ta phải chứng minh

$$3(q^2 - q + 1) \left(1 - \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \right) \leq (q^2 - q) \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2}.$$

Từ bất đẳng thức ban đầu, cho $a = b = c = 1$ ta được $k \geq \sqrt{\frac{3}{1+q}}$, hay $\frac{k\sqrt{q+1}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, do đó

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \\ \leq & 1 - \frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}} \\ = & \frac{3 \sum m^2 - (\sum m)^2}{\sqrt{3 \sum m^2} \times (\sqrt{3 \sum m^2} + \sum m)} \\ \leq & \frac{\sum (m-n)^2}{2(m+n+p)^2}. \end{aligned}$$

Vậy, chỉ cần chứng minh

$$3(q^2 - q + 1) \frac{\sum (m-n)^2}{2(m+n+p)^2} \leq (q^2 - q) \sum \frac{(m-n)^2}{m^2}.$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại dưới dạng

$$S_p(m-n)^2 + S_m(n-p)^2 + S_n(m-p)^2 \geq 0$$

Trong đó

$$\begin{aligned} S_p &= n^2 p^2 [2(q^2 - q)(m+n+p)^2 - 3(q^2 - q + 1)m^2], \\ S_m &= p^2 m^2 [2(q^2 - q)(m+n+p)^2 - 3(q^2 - q + 1)n^2], \\ S_n &= m^2 n^2 [2(q^2 - q)(m+n+p)^2 - 3(q^2 - q + 1)p^2]. \end{aligned}$$

Vì $m \geq n \geq p \geq 0$ nên

$$2(q^2 - q)(m+n+p)^2 \geq 18(q^2 - q)p^2 \geq 3(q^2 - q + 1)p^2,$$

suy ra $S_n \geq 0$.

Do đó, từ

$$S_n(m-p)^2 \geq S_n(m-n)^2 + S_n(n-p)^2,$$

ta chỉ cần chứng minh

$$S_m + S_n \geq 0 \text{ và } S_n + S_p \geq 0.$$

Nhưng vì

$$S_m - S_p = 2(q^2 - q)p^2(m + n + p)^2(m^2 - n^2) \geq 0$$

nên ta chỉ cần $S_n + S_p \geq 0$ là đủ. Bất đẳng thức này đúng vì

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2}(S_p + S_n) &= (q^2 - q)(m + n + p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2p^2 \\ &\geq (q^2 - q)(m + 2p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2p^2 \\ &\geq (q^2 - q) \cdot 8mp \cdot 2mp - 3(q^2 - q + 1)m^2p^2 \\ &= (13q^2 - 13q - 3)m^2p^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng minh được $f(t)$ nghịch biến. Theo lập luận ở trên, chỉ cần xét bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp $c = 0$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a + qb}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a + b}.$$

Giả sử $a + b = 1$, thế thì giá trị nhỏ nhất của k chính là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0, 1]$ trong đó

$$g(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{1 + (q - 1)x}} + \sqrt{x}.$$

Tính đạo hàm

$$g'(x) = -\frac{(q - 1)x + q + 1}{2\sqrt{(1 + (q - 1)x)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Suy ra $g'(x)$ cùng dấu với

$$(1 + (q - 1)x)^3 - x((q - 1)x + q + 1)^2,$$

biểu thức này có thể được viết lại dưới dạng một đa thức biến x

$$P(x) = (q - 1)^2(q - 2)x^3 + (q - 1)(q - 5)x^2 - (q^2 - q + 4)x + 1.$$

Bạn đọc có thể tự chứng minh kết quả sau : nếu $\frac{13+5\sqrt{13}}{26} \leq q < 2$ thì $P(x)$ có hai nghiệm âm và một nghiệm thuộc $(0, 1)$, nếu $q > 2$ thì $P(x)$ có một nghiệm âm và hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq \min(1, x_2)$ và $f(x_1) > f(1)$, nếu $q = 2$ thì $P(x)$ có hai nghiệm âm và nghiệm còn lại thuộc $[0, 1]$. Trong cả ba trường hợp trên, ta đều có kết luận chung : Giá trị nhỏ nhất của k là

$$\frac{1 - x_0}{\sqrt{1 + (q - 1)x_0}} + \sqrt{x_0}$$

trong đó x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$$(q - 1)^2(q - 2)x^3 + (q - 1)(q - 5)x^2 - (q^2 - q + 4)x + 1 = 0.$$

Vậy bài toán đã được giải trong cả hai trường hợp.

Nhận xét.

1. Trong trường hợp thứ 2 của bài toán, điều kiện $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$ đã được sử dụng để chứng minh $S_p + S_n \geq 0$ (vì ta cần $13q^2 - 13q - 3 \geq 0$, trong khi để chứng minh $S_n \geq 0$ ta chỉ cần một điều kiện yếu hơn là $5q^2 - 5q - 1 \geq 0$). Thực ra ta có thể tìm được một giá trị tốt hơn của q như sau :
Ta sẽ tìm *điều kiện cần và đủ* của q để bất đẳng thức

$$S_p(m-n)^2 + S_m(n-p)^2 + S_n(m-p)^2 \geq 0 \quad (5)$$

đúng với mọi m, n, p thoả mãn $m \geq n \geq p \geq 0$, trong đó các biểu thức của S_m, S_n và S_p được xác định như trên. Để tìm *điều kiện cần*, ta cho $n = p = 1$, khi đó $m \geq 1$ và bất đẳng thức (5) trở thành

$$(2(q^2 - q)(m+2)^2(m^2 + 1) - 6(q^2 - q + 1)m^2)(m-1)^2 \geq 0$$

hay

$$2(q^2 - q)(m+2)^2(m^2 + 1) \geq 6(q^2 - q + 1)m^2.$$

Dễ thấy $q > 1$, do đó bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{3(q^2 - q + 1)}{q^2 - q} \leq \frac{(m+2)^2(m^2 + 1)}{m^2}.$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $m \geq 1$ khi và chỉ khi

$$\frac{3(q^2 - q + 1)}{q^2 - q} \leq \min_{[1, +\infty)} h(m) \quad (6)$$

trong đó

$$h(m) = \frac{(m+2)^2(m^2 + 1)}{m^2} = (m+2)^2 + \frac{(m+2)^2}{m^2}.$$

Trước khi tính giá trị cụ thể của q , ta sẽ chứng minh (6) cũng là *điều kiện đủ* để bất đẳng thức (5) đúng. Tương tự như trên, ta chứng minh được $S_n \geq 0$ và $S_m \geq S_p$, vậy chỉ cần chỉ ra $S_n + S_p \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2}(S_p + S_n) &= (q^2 - q)(m+n+p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2p^2 \\ &\geq (q^2 - q)(m+2p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2p^2 \end{aligned}$$

suy ra chỉ cần chứng minh

$$(q^2 - q)(m+2p)^2(m^2 + p^2) \geq 3(q^2 - q + 1)m^2p^2$$

với $m \geq p \geq 0$. Nếu $p = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử $p > 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{3(q^2 - q + 1)}{q^2 - q} \leq \frac{(m + 2p)^2(m^2 + p^2)}{m^2p^2}.$$

Đặt $t = \frac{m}{p} \geq 1$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3(q^2 - q + 1)}{q^2 - q} \leq \frac{(t + 2)^2(t^2 + 1)}{t^2} = h(t).$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo sự xác định q ở trên. Như vậy (6) là điều kiện cần và đủ của q để có (5).

Bây giờ ta sẽ tìm ra khoảng giá trị cụ thể của q thoả mãn (6). Tính đạo hàm

$$h'(m) = 2(m + 2) - \frac{4(m + 2)}{m^3} = \frac{2(m + 2)(m^3 - 2)}{m^3},$$

suy ra $\min_{[1, +\infty)} h(m) = h(\sqrt[3]{2})$, từ đó

$$\frac{3(q^2 - q + 1)}{q^2 - q} \leq h(\sqrt[3]{2})$$

hay

$$q^2 - q \geq \frac{3}{h(\sqrt[3]{2}) - 3} \stackrel{\text{đặt}}{=} s,$$

nghĩa là

$$q \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4s}}{2}.$$

Ta tính

$$\begin{aligned} h(\sqrt[3]{2}) &= \frac{(\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{2} + 4)(\sqrt[3]{4} + 1)}{\sqrt[3]{4}} = \frac{12 + 6\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} \\ &= 5 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}, \\ 1 + 4s &= 1 + \frac{12}{h(\sqrt[3]{2}) - 3} = 1 + \frac{12}{2 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}} \\ &= \frac{14 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}{2 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$q \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4s}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}{2 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}} \right) \approx 1.177843572.$$

Với khoảng giá trị này của q , kết quả của bài toán vẫn không có gì thay đổi.

2. Ngoài *Bài toán 6*, chúng ta còn có hai kết quả đặc biệt khác cũng khá đẹp của *Bài toán 7* là

$$\frac{a}{\sqrt{a+4b}} + \frac{b}{\sqrt{b+4c}} + \frac{c}{\sqrt{c+4a}} \leq \left(\frac{17 - \sqrt{33}}{6\sqrt{-1 + \sqrt{33}}} + \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{33}}{12}} \right) \sqrt{a+b+c}$$

và

$$\frac{a}{\sqrt{2a+3b}} + \frac{b}{\sqrt{2b+3c}} + \frac{c}{\sqrt{2c+3a}} \leq \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{-1+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}} \right) \sqrt{a+b+c}.$$

Trường hợp còn lại vẫn còn là bài toán mở :

Bài toán mở 2. Cho q là số thực thoả mãn $\frac{1}{2} < q < \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{14+6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}{2+6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}} \right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

đúng với mọi số thực không âm a, b, c .

Lưu ý là bất đẳng thức **Garfunkel** ứng với trường hợp $q = 1$, do đó *Bài toán mở 2* mới thực sự là bài toán tổng quát của nó chứ không phải là *Bài toán 7*. Đối với bài toán này chúng ta khó có thể dự đoán được trường hợp cụ thể xảy ra đẳng thức khi q nhận một giá trị bất kì nằm giữa $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{14+6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}{2+6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}} \right)$, do đó tác giả nghĩ rằng, trong bốn cách chứng minh bất đẳng thức **Garfunkel** ở trên, nếu có một cách có thể giải được *Bài toán mở 2*, thì đó phải là cách thứ 2 (do các cách còn lại đều dựa trên sự biết trước trường hợp xảy ra đẳng thức). Nếu không, chúng ta cần phải tìm một hướng giải quyết khác. Rõ ràng bất đẳng thức này vẫn còn nhiều điều thú vị đang chờ bạn đọc khám phá !

Để kết thúc bài viết, xin được đưa ra một hướng mở rộng nữa cho bất đẳng thức của chúng ta, đây là một bài toán được nêu lên ở [Diễn đàn Toán học](#) hơn ba năm về trước, nhưng chưa có một lời giải chính xác nào được đưa ra (theo hiểu biết của tác giả). Mong bạn đọc cùng quan tâm suy nghĩ.

Bài toán mở 3. Cho số thực dương k nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của M sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c :

$$\frac{a}{(a+b)^k} + \frac{b}{(b+c)^k} + \frac{c}{(c+a)^k} \leq M(a+b+c)^{1-k}.$$

Kết quả dự đoán :

$$M = \max \left(\frac{3^k}{2^k}, 1 + k(1-k)^{\frac{1-k}{k}} \right).$$

Tài liệu

- [1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, Hà Nội 2006. Bản tiếng Anh *Secrets in Inequalities*, nhà xuất bản GIL, Romania 2007.
- [2] [Tập chí Crux Mathematicorum](http://journals.cms.math.ca/CRUX/) <http://journals.cms.math.ca/CRUX/>
- [3] *Ba bài toán mở*, một chủ đề của [Diễn đàn Toán học](http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=39622), <http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=39622>
- [4] [Diễn đàn Bất đẳng thức](http://batdangthuc.net) <http://batdangthuc.net>
- [5] *Lovely inequality [Walther Janous's problem from 1989]*, [MathLinks](http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=1459) Topic, <http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=1459>
- [6] *Prove Jack Garfunkel by Cauchy Schwarz inequality*, [MathLinks](http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=152848) Topic, <http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=152848>
- [7] *A beautiful inequality*, [MathLinks](http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?search_id=1821932391&t=98684) Topic, http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?search_id=1821932391&t=98684