Bài viết về bất đẳng thức Schur và Vornicu Schur

Võ Quốc Bá Cẩn
Đại học y dược Cần Thơ

Ngày 10 tháng 2 năm 2007

Bất đẳng thức Schur là một trong những bất đẳng thức "mạnh" hiện nay, tuy nhiên đối với các bạn mới bắt đầu làm quen với bất đẳng thức thì bất đẳng thức này "khá lạ lẫm" và khó sử dụng. Bài viết sau xin được giới thiệu với các bạn một số "tính năng" của Schur và "người bà con" của nó, Vornicu Schur, cũng như "sức mạnh" của chúng đối với bất đẳng thức đối xứng ba biến.

1 Các kết quả

Định lý 1 (bất đẳng thức Schur) *Với mọi số không âm a, b, c, k, ta có*

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-c)(b-a) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

Có nhiều cách chứng minh cho Schur, xin được giới thiệu với các bạn cách chứng minh đơn giản nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$, ta có

$$VT = c^k(a-c)(b-c) + (a-b)[a^k(a-c) - b^k(b-c)] \geq 0$$

Bất đẳng thức Schur được chứng minh.

Đặc biệt, với $k = 1$ và $k = 2$, ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \qquad (1)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) \qquad (2)$$

Nếu ta đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$ thì các bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{4} \qquad (3)$$

$$r \geq \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p} \tag{4}$$

Đây là 2 dạng thường dùng nhất của Schur, đặc biệt là (3). Tuy nhiên, trong thực tế, đối với nhiều bài toán, nếu ta sử dụng ngay chúng thì không có hiệu quả, lí do rất "đơn giản" là vì $a, b, c \geq 0$ nên $r \geq 0$ nhưng $4q - p^2$ thì lại có thể nhận các giá trị âm lẫn giá trị không âm nên các bất đẳng thức (3) và (4) chưa đủ "độ chặt" để "xử lý" chúng. Do đó, ta thường sử dụng

$$r \geq \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{4}\right\} \tag{5}$$

$$r \geq \max\left\{0, \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}\right\} \tag{6}$$

Sau đây, chúng ta sẽ chuyển sang "người bà con" của bất đẳng thức Schur, ta có định lý sau

Định lý 2 (Vornicu Schur) *Với mọi $a \geq b \geq c \geq 0$ và $x, y, z \geq 0$, bất đẳng thức*

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

đúng khi

1. $x \geq y$ *(hoặc $z \geq y$).*
2. $ax \geq by$.
3. $bz \geq cy$ *(nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác).*
4. $\sqrt{x} + \sqrt{z} \geq \sqrt{y}$.

Thật vậy (1) Ta có

$$VT = z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)] \geq 0$$

(2) Chú ý rằng $a \geq b \geq c \geq 0$ nên $a - c \geq \frac{a}{b} \cdot (b-c)$, do đó

$$\begin{aligned} VT &= z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)] \\ &\geq z(a-c)(b-c) + \frac{(a-b)(b-c)(ax-by)}{b} \geq 0 \end{aligned}$$

(3) Do $a \ge b \ge c \ge 0$ và a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a - c \ge \frac{b}{c} \cdot (a - b)$, vì thế

$$\begin{aligned} VT &= x(a-b)(a-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)] \\ &\ge x(a-b)(a-c) + \frac{(b-c)(a-b)(bz-cy)}{c} \ge 0 \end{aligned}$$

(4) Ta có bất đẳng thức tương đương với

$$x \cdot \frac{a-c}{b-c} + z \cdot \frac{a-c}{a-b} \ge y$$

Hay

$$x + z + \left(x \cdot \frac{a-b}{b-c} + z \cdot \frac{b-c}{a-b} \right) \ge y$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$x + z + \left(x \cdot \frac{a-b}{b-c} + z \cdot \frac{b-c}{a-b} \right) \ge x + z + 2\sqrt{xz} = \left(\sqrt{x} + \sqrt{z}\right)^2 \ge y$$

Định lý được chứng minh xong. Ta có thể thấy (4) đúng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa $a \ge b \ge c$, tuy nhiên tiêu chuẩn này thường đòi hỏi phải tính toán phức tạp nên rất ít khi ta sử dụng nó.

Vừa rồi tôi đã giới thiệu với các bạn xong về Schur và Vornicu Schur, tuy nhiên, định lý là như thế, các bạn ắt hẳn sẽ đặt câu hỏi là làm thế nào để đưa một bất đẳng thức về các dạng này. Bằng kinh nghiệm của mình, tôi xin được giới thiệu với các bạn 1 kỹ thuật chuyển một bất đẳng thức sang dạng Schur (có thể chưa là tối ưu). Trước hết, các bạn hãy chuyển bất đẳng thức về 1 trong 2 dạng sau

$$\sum_{\text{cyc}} z(a-b)^2 \ge 0 \tag{7}$$

hoặc

$$\sum_{\text{cyc}} M_a(2a-b-c)^2 \ge 0 \tag{8}$$

Cả 2 dạng này đều có thể dễ dàng đưa về được. Từ (7), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} z(a-b)^2 &= \sum_{\text{cyc}} z(a-b)(a-c+c-b) \\ &= \sum_{\text{cyc}} z(a-b)(a-c) + \sum_{\text{cyc}} z(b-c)(b-a) \\ &= \sum_{\text{cyc}} (y+z)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Chẳng hạn, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 - \sum_{\text{cyc}} ab = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2 = \sum_{\text{cyc}}(a-b)(a-c)$$

$$\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) - 6abc = \sum_{\text{cyc}} c(a-b)^2 = \sum_{\text{cyc}}(b+c)(a-b)(a-c)$$

....

Từ (8), ta có

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} M_a(2a-b-c)^2 &= 2\sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)(a-c) + \sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)^2 + \sum_{\text{cyc}} M_b(c-a)^2 \\ &= 2\sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)(a-c) + \sum_{\text{cyc}}(M_a+M_b)(a-b)^2\end{aligned}$$

Sử dụng khai triển trên, ta có

$$\sum_{\text{cyc}}(M_a+M_b)(a-b)^2 = \sum_{\text{cyc}}(2M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c)$$

Như vậy

$$\sum_{\text{cyc}} M_a(2a-b-c)^2 = \sum_{\text{cyc}}(4M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c)$$

Hy vọng các bạn sẽ tìm được nhiều thuật toán hơn nữa.

Một điều mà chúng ta cần lưu ý là nếu ta kết hợp kỹ thuật này với các kỹ thuật khác như SOS, dồn biến, ... sẽ tạo nên "sức mạnh không tưởng". Các bạn sẽ thấy được điều đó qua các bài toán ở phần sau.

2 Một số bài toán

1 [Trần Nam Dũng] *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$, ta có*

$$2(a^2+b^2+c^2) + abc + 8 \geq 5(a+b+c)$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\begin{aligned}&12(a^2+b^2+c^2) + 6abc + 48 - 30(a+b+c) \\ &\quad= 12(a^2+b^2+c^2) + 3(2abc+1) + 45 - 5\cdot 2\cdot 3\cdot(a+b+c) \\ &\quad\geq 12(a^2+b^2+c^2) + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 45 - 5[(a+b+c)^2+9] \\ &\quad= 7(a^2+b^2+c^2) + \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} - 10(ab+bc+ca) \\ &\quad\geq 7(a^2+b^2+c^2) + \frac{27abc}{a+b+c} - 10(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$$

Do đó

$$7(a^2+b^2+c^2)+\frac{27abc}{a+b+c}-10(ab+bc+ca)$$
$$\geq 7(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)-3(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)$$
$$= 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2 [Darij Grinberg] *Với mọi* $a,b,c>0$ *thì*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM và bất đẳng thức Schur, ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)$$
$$\geq a^2+b^2+c^2+3a^{2/3}b^{2/3}c^{2/3}-2(ab+bc+ca)$$
$$\geq a^{2/3}b^{2/3}(a^{2/3}+b^{2/3})+b^{2/3}c^{2/3}(b^{2/3}+c^{2/3})+c^{2/3}a^{2/3}(c^{2/3}+a^{2/3})$$
$$-2(ab+bc+ca)$$
$$= a^{2/3}b^{2/3}(a^{1/3}-b^{1/3})^2+b^{2/3}c^{2/3}(b^{1/3}-c^{1/3})^2+c^{2/3}a^{2/3}(c^{1/3}-a^{1/3})^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

3 [APMO 2004] *Với mọi* $a,b,c>0$,

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM,

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)-9(ab+bc+ca)$$
$$= 4(a^2+b^2+c^2)+2[(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1)]$$
$$+(a^2b^2c^2+1)+1-9(ab+bc+ca)$$
$$\geq 4(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)+2abc+1-9(ab+bc+ca)$$
$$\geq a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)$$

Sử dụng kết quả bài toán trên, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

4 [Phạm Hữu Đức] *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh*

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\ge\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM,

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{a^2+bc}=\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+b+c\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc(b^2+c^2)}{a^2+bc}}$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{abc(b^2+c^2)}}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}\ge\frac{9}{a+b+c}$$

Vì theo bất đẳng thức Schur,

$$\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}a^2+\sum_{\text{cyc}}ab\right)-3\sum_{\text{cyc}}a(b^2+c^2)=\sum_{\text{cyc}}a^3+3abc-\sum_{\text{cyc}}ab(a+b)\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

5 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\ge a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}=\sum_{\text{cyc}}\frac{a^4}{a\sqrt{b^2-bc+c^2}}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}}a\sqrt{b^2-bc+c^2}}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}a\sqrt{b^2-bc+c^2}\le a^2+b^2+c^2$$

Lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\left(\sum_{\text{cyc}}a\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2\le\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}a(b^2-bc+c^2)\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} a(b^2-bc+c^2)\right)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} a^4 + abc\sum_{\text{cyc}} a \geq \sum_{\text{cyc}} ab(a^2+b^2)$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,1)$, hoặc $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

6 *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c thì*

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}} + \frac{b^2-ca}{\sqrt{b^2+2c^2+3a^2}} + \frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+2a^2+3b^2}} \geq 0$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{8(a^2-bc)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} &= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{8(a^2-bc)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} + b + c\right) - 2\sum_{\text{cyc}} a \\
&= \sum_{\text{cyc}} \frac{8(a^2-bc)+(b+c)\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} - 2\sum_{\text{cyc}} a \\
&\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{8(a^2-bc)+(b+c)(a+2b+3c)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} - 2\sum_{\text{cyc}} a \\
&= \sum_{\text{cyc}} \frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} + 2\sum_{\text{cyc}} \frac{(b-c)^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} - 2\sum_{\text{cyc}} a
\end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}} \geq 2\sqrt{6}\sum_{\text{cyc}} a$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta được

$$\begin{aligned}
VT^2 &\geq \frac{\left(\sum_{\text{cyc}}(8a^2+ab+bc+ca+c^2)\right)^3}{\sum_{\text{cyc}}(8a^2+ab+bc+ca+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)} \\
&= \frac{27\left(3\sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} ab\right)^3}{11\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)^2 + 21\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 + 6\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} ab\right)}
\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9\left(3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3}{11\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+21\sum_{cyc}a^2b^2+6\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)}\geq 8\left(\sum_{cyc}a\right)^2$$

Do đây là một bất đẳng thức đồng bậc với a,b,c nên không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có $\frac{1}{3}\geq q\geq 9r\geq 0$. Ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta được $r\geq \frac{4q-1}{9}$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$9(3-5q)^3\geq 8(11(1-2q)^2+21(q^2-2r)+6q(1-2q))$$

Hay

$$-1125q^3+1601q^2-911q+336r+155\geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\begin{aligned}&-1125q^3+1601q^2-911q+336r+155\\&\qquad\geq -1125q^3+1601q^2-911q+336\cdot\frac{4q-1}{9}+155\\&\qquad=\frac{1}{3}(1-3q)(1125q^2-1226q+353)\geq 0\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

7 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho a,b,c là các số không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$, chứng minh*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-2(a^2+b^2+c^2)\geq\sqrt{3}-2$$

Chứng minh. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right)+\left(\sum_{cyc}a-\sqrt{3\sum_{cyc}ab}\right)\geq 2\left(\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab\right)$$

Hay

$$\sum_{cyc}S_c(a-b)^2\geq 0$$

trong đó

$$S_a = \frac{1}{c} + t - 1, \qquad S_b = \frac{1}{a} + t - 1, \qquad S_c = \frac{1}{b} + t - 1$$

với $t = \frac{1}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_a + S_b + S_c &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 + \frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{1}{abc} - 3 + \frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)} \\ &\geq \frac{3\sqrt{3}}{(ab+bc+ca)^{\frac{3}{2}}} - 3 + \frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)} \\ &= 3\sqrt{3} - 3 + \frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a &= \sum_{\text{cyc}} \left(t + \frac{1}{b} - 1\right)\left(t + \frac{1}{c} - 1\right) \\ &= 3t^2 + 2\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} - 3\right)t + \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{ab} - 2\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} + 3 \\ &> \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{ab} - 2\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} + 3 = \frac{a+b+c+3abc-2}{abc} \geq 0 \end{aligned}$$

Thật vậy, nếu $a+b+c \geq 2$ thì điều này là hiển nhiên, nếu $a+b+c \leq 2$, đặt $p = a+b+c$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có $abc \geq \frac{p(4-p^2)}{9} \geq 0$, do đó

$$a+b+c+3abc-2 \geq p + \frac{4p-p^3}{3} - 2 = \frac{(2-p)(p-1)(p+3)}{3} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét. Bài này là 1 ví dụ cơ bản cho sự kết hợp giữa Schur và SOS.

8 [Iurie Borieco, Ivan Borsenco] *Tìm hằng số a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau*

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

đúng với mọi số thực dương x, y, z.

Chứng minh. Cho $x = y = 1, z \to 0$, ta suy ra được $a \geq \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} = a_0 \simeq$ 1.81884... Ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là chứng minh

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{a_0}\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a_0}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Vì đây là một bất đẳng thức đồng bậc với x, y, z nên ta có thể chuẩn hóa cho $x+y+z = 1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$ thì $\frac{1}{3} \geq q \geq 9r \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$r + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q \geq 0$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $1 \geq 4q \geq 0$, khi đó,

$$\begin{aligned} r + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q &\geq \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q = q^{\frac{3-a_0}{2}}\left(\frac{8}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q^{\frac{a_0-1}{2}}\right) \\ &\geq q^{\frac{3-a_0}{2}}\left(\frac{8}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{a_0-1}{2}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$, khi đó, áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$. Do đó,

$$r + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q \geq \frac{4q-1}{9} + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q = \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - \frac{5q+1}{9} = f(q)$$

Ta có

$$f'(q) = \frac{4(3-a_0)}{q^{\frac{a_0-1}{2}}.3^{\frac{a_0+3}{2}}} - \frac{5}{9}$$

Dễ dàng kiểm tra được $f'(q)$ là hàm đồng biến, lại có $f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ và $f'\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, do đó tồn tại duy nhất $q_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ sao cho $f'(q_0) = 0$. Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(q) \geq \min\left\{f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$

Nhưng $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Do đó,

$$f(q) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn. Kết luận,

$$a_{\min} = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2\ln 2 - \ln 3}.$$

9 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2+bc+c^2} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^2(b^2+bc+c^2)} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a+b+c)}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a+b+c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Vì đây là một bất đẳng thức đồng bậc với a, b, c nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a+b+c = 1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$ thì ta có $\frac{1}{3} \geq q \geq 9r \geq 0$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{(1-2q)^2}{2q^2-3r} \geq \frac{1}{3q}$$

Hay

$$3r + 12q^3 - 14q^2 + 3q \geq 0$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $1 \geq 4q \geq 0$, ta có

$$3r + 12q^3 - 14q^2 + 3q \geq 12q^3 - 14q^2 + 3q = q(12q^2 - 14q + 3) \geq 0$$

Trường hợp 2. $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$,khi đó, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$. Suy ra,

$$\begin{aligned}3r + 12q^3 - 14q^2 + 3q &\geq \frac{4q-1}{3} + 12q^3 - 14q^2 + 3q \\ &= \frac{(3q-1)(12q^2-10q+1)}{3} \geq 0\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (1, 1, 1)$.

10 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$a + b + c + kabc \geq k + 3$$

với mọi số không âm a, b, c *thỏa mãn* $ab + bc + ca + 6abc = 9$.

Chứng minh. Cho $a = b = 3, c = 0$, ta được $k \leq 3$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị ta cần tìm, tức là

$$a + b + c + 3abc \geq 6$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$. Giả thiết của bài toán có thể viết lại là $q + 6r = 9$. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có $p^2 \geq 3q \geq 9$. Bất đẳng thức trở thành

$$p + 3r \geq 6$$

Hay

$$2p - q \geq 3$$

Nếu $p \geq 6$, thì điều này hiển nhiên đúng. Xét $6 \geq p \geq 3$, khi đó có 2 trường hợp xảy ra

Trường hợp 1. Nếu $p^2 \geq 4q$ thì

$$2p - q \geq 2p - \frac{p^2}{4} = \frac{(p-2)(6-p)}{4} + 3 \geq 3$$

Trường hợp 2. Nếu $p^2 \leq 4q$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có $r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} \geq 0$. Do đó

$$27 = 3q + 18r \geq 3q + 2p(4q - p^2)$$

Và vì thế

$$2p - q \geq 2p - \frac{2p^3 + 27}{8p + 3}$$

Ta cần chứng minh

$$2p - \frac{2p^3 + 27}{8p + 3} \geq 3$$

Hay

$$(p + 1)(p - 3)(p - 6) \leq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy

$$k_{\min} = 3.$$

11 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho các số không âm* a, b, c *thỏa* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{2}$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{b^3 + c^3} \geq \sqrt{2}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^3(b+c)}{b^3 + c^3} + b + c \right) \geq 2(a+b+c) + \sqrt{2}$$

Hay

$$(a^3 + b^3 + c^3) \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq 2(a+b+c) + \sqrt{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{9(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)} \geq 2(a+b+c) + \sqrt{2}$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$ thì ta có $p, q, r \geq 0$ và $p = \sqrt{1 + 2q}, 1 \geq q$. Khi đó, bất đẳng thức trên có thể viết lại là

$$9(p(1-q) + 3r) \geq \left(2p + \sqrt{2}\right)(2 - q)$$

Hay

$$5p - 7pq + \sqrt{2}q + 27r \geq 2\sqrt{2}$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $1 \geq 2$, bất đẳng thức tương đương với

$$f(q) = 5\sqrt{2q+1} - 7q\sqrt{2q+1} + \sqrt{2}q + 27r \geq 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$f'(q) = \frac{\sqrt{2(2q+1)} - 21q - 2}{\sqrt{2q+1}} \le \frac{\sqrt{2(1+1)} - 21q - 2}{\sqrt{2q+1}} = -\frac{21q}{\sqrt{2q+1}} < 0$$

Suy ra, $f(q)$ là hàm nghịch biến. Suy ra,

$$f(q) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 27r \ge 2\sqrt{2}$$

Trường hợp 2. $2q \ge 1$, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r \ge \frac{p(4q-p^2)}{9} = \frac{p(2q-1)}{9} \ge 0$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$5p - 7pq + \sqrt{2}q + 3p(2q-1) \ge 2\sqrt{2}$$

Hay

$$g(q) = 2\sqrt{2q+1} - q\sqrt{2q+1} + \sqrt{2}q \ge 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$g'(q) = \frac{\sqrt{2(2q+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}} \ge \frac{\sqrt{2(1+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}} = \frac{3(1-q)}{\sqrt{2q+1}} \ge 0$$

Do đó, $g(q)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

$$g(q) \ge g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

12 [Walther Janous] *Cho các số dương a, b, c, x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}\cdot(y+z) + \frac{b}{c+a}\cdot(z+x) + \frac{c}{a+b}\cdot(x+y) \ge \frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}\cdot(y+z) &= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c}\cdot(y+z) + (y+z)\right) - 2(x+y+z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\text{cyc}}(b+c)\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{y+z}{b+c}\right) - 2(x+y+z) \\
&\ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}\right)^2 - 2(x+y+z) \\
&= \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(x+y)(x+z)} - (x+y+z)
\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(x+y)(x+z)} - (x+y+z) \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

Đặt $2m^2 = y+z, 2n^2 = z+x, 2p^2 = x+y$ $(m,n,p > 0)$, bất đẳng thức trên có thể viết lại như sau

$$2(mn+np+pm)-(m^2+n^2+p^2) \geq \frac{6(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)-3(m^4+n^4+p^4)}{m^2+n^2+p^2}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} m^4 + \sum_{\text{cyc}} mn(m^2+n^2) + \sum_{\text{cyc}} m^2np \geq 4\sum_{\text{cyc}} m^2n^2$$

Theo bất đẳng thức Schur thì

$$\sum_{\text{cyc}} m^4 + \sum_{\text{cyc}} m^2np \geq \sum_{\text{cyc}} mn(m^2+n^2)$$

Nhưng theo bất đẳng thức AM - GM, ta lại có

$$\sum_{\text{cyc}} mn(m^2+n^2) \geq 2\sum_{\text{cyc}} m^2n^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét. Các bạn hãy thử sức với bài toán sau

$$\frac{a}{b+c}\cdot(y+z) + \frac{b}{c+a}\cdot(z+x) + \frac{c}{a+b}\cdot(x+y) \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

với mọi $a,b,c,x,y,z > 0$.

13 [Hojoo Lee] *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c > 0$ thì*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương tương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\frac{1}{c^3+abc} - \frac{1}{b^3+abc} = \frac{b^3-c^3}{(b^3+abc)(c^3+abc)} \geq 0$$

Do đó, theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

14 [Hojoo Lee] *Với mọi $a, b, c > 0$, ta có*

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \ge a+b+c$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{b+c} \ge 0$$

Ta có

$$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{a-b}{(b+c)(c+a)} \ge 0$$

Nên theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

15 [Vasile Cirtoaje] *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$, ta có*

$$3(a^4+b^4+c^4)+a^2+b^2+c^2+6 \ge 6(a^3+b^3+c^3)$$

Chứng minh. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\begin{aligned}0 &\le \sum_{\text{cyc}}(3a^4-6a^3+a^2+4a-2)=\sum_{\text{cyc}}(a-1)^2(3a^2-2)\\ &=\frac{1}{9}\sum_{\text{cyc}}(2a-b-c)^2(3a^2-2)=\frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}}(4a^2+b^2+c^2-4)(a-b)(a-c)\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Rõ ràng

$$4a^2+b^2+c^2-4 \ge 4b^2+c^2+a^2-4 \ge 4c^2+a^2+b^2-4$$

và

$$4c^2+a^2+b^2-4 \ge 4c^2+\frac{(a+b)^2}{2}-4=\frac{(3c-1)^2}{2} \ge 0$$

Nên theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,1,1)$ hoặc $(a,b,c)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

16 [Vasile Cirtoaje] *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thỏa $a+b+c=3$, ta có*

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab} \ge \frac{3}{2}$$

Chứng minh. Ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+bc} - \frac{3}{2} = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{a+bc} - \frac{2a(b+c)-bc}{2(ab+bc+ca)} \right)$$
$$= \frac{abc}{2(ab+bc+ca)} \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+abc}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\frac{1}{c^2+abc} - \frac{1}{b^2+abc} = \frac{b^2-c^2}{(b^2+abc)(c^2+abc)} \geq 0$$

Nên theo định lý 2, bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

17 [Vasile Cirtoaje] *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thì*

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2a}{3a^2+bc} + \frac{2b}{3b^2+ca} + \frac{2c}{3c^2+ab}$$

Chứng minh. Đặt $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}, y = \sqrt{\frac{ca}{b}}, z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x(y+z)} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{2}{x^2+3yz}$$

Ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x(y+z)} - \sum_{\text{cyc}} \frac{2}{x^2+3yz}$$
$$= \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{x(y+z)(x^2+3yz)} + \sum_{\text{cyc}} \frac{z(x-y)^2(z(x-y)^2+xy(x+y))}{xy(x+z)(y+z)(x^2+3yz)(y^2+3zx)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$, ta có

$$\frac{1}{z(x+y)(z^2+3xy)} - \frac{1}{y(z+x)(y^2+3zx)}$$
$$= \frac{(y-z)(x(y-z)^2+yz(y+z))}{yz(x+y)(x+z)(y^2+3xz)(z^2+3xy)} \geq 0$$

Nên theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

18 [Phạm Kim Hùng] *Với mọi số không âm a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$, ta có*

$$\frac{a^2\sqrt{b+c}}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2\sqrt{c+a}}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2\sqrt{a+b}}{\sqrt{c^2+ab}}\le 3$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$VT^2\le\sum_{\text{cyc}}a^2\cdot\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}=3\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}\le 3$$

Mặt khác, lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có $a+b+c\le 3$ và như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}\le a+b+c$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, ta có

$$\frac{a^2}{a^2+bc}-\frac{b^2}{b^2+ca}=\frac{c(a^3-b^3)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge 0$$

Nên theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

19 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Xét bất đẳng thức sau với mọi $a, b, c>0$*

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

1. *Chứng minh rằng bất đẳng thức trên nói chung không đúng.*

2. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì bất đẳng thức này đúng.*

Chứng minh. (1) Cho $a = 3, b = c = 1$.

(2) Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{a} - \frac{b+c}{a^2+bc} \right) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} - \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{bc(a-b)(a-c)}{abc(ab+bc+ca)}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c) \left(\frac{1}{a(a^2+bc)} - \frac{1}{a(ab+bc+ca)} \right) \geq 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)(b+c-a)}{a^2+bc} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, chú ý rằng a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta có

$$a+b-c \geq c+a-b \geq 0, \qquad b(b^2+ca) \geq c(c^2+ab)$$

Nên

$$\frac{b(a+b-c)}{c^2+ab} \geq \frac{c(c+a-b)}{b^2+ca}$$

Do đó theo định lý 2, bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (1, 1, 1)$, hoặc $(a, b, c) \sim (2, 1, 1)$.

20 [Phạm Hữu Đức] *Chứng minh với mọi* $a, b, c \geq 0$, *ta có*

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^3(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^3(a+b)}{c^2+ab} \leq a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^3(b+c)}{a^2+bc} - \sum_{\text{cyc}} a(b+c) &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)(a^2-bc)}{a^2+bc} \\
&= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a(b+c)(a^2-bc)}{a^2+bc} - (a^2-bc) \right) + \sum_{\text{cyc}} (a^2-bc) \\
&= \sum_{\text{cyc}} \frac{(bc-a^2)(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c) \\
&= 2abc \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc}
\end{aligned}$$

Do $a \geq b \geq c$ nên $\frac{1}{c^3+abc} \geq \frac{1}{b^3+abc}$, do đó theo định lý 2, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} \geq \sum_{\text{cyc}} ab$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \geq 0$$

Do $a \geq b \geq c$ nên $\frac{a^2}{a^2+bc} \geq \frac{b^2}{b^2+ca}$, từ đây sử dụng định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

21 [Phạm Hữu Đức, Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^2+ca}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^2+ab}{a+b}} \geq \sqrt{3(a+b+c)}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, dễ thấy rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{2(a^2+bc)}{b+c}} \geq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)(a-c) \geq 0$$

trong đó

$$M_a = \frac{1}{\sqrt{b+c}\left(\sqrt{2(a^2+bc)} + \sqrt{(a+b)(a+c)}\right)}$$
$$M_b = \frac{1}{\sqrt{c+a}\left(\sqrt{2(b^2+ca)} + \sqrt{(b+c)(b+a)}\right)}$$
$$M_c = \frac{1}{\sqrt{a+b}\left(\sqrt{2(c^2+ab)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}\right)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó, ta có

$$a(a+c)(b^2+ca) \geq b(b+c)(a^2+bc)$$

Do đó

$$\sqrt{a}M_a \geq \sqrt{b}M_b$$

Suy ra

$$aM_a \geq bM_b$$

Theo định lý 2, bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

22 *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$, ta có*

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} &= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{3(a+b+c)} - \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}\right) \\ &= \frac{1}{3(a+b+c)} \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)}\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$a(a+2b) \geq b(b+2a) \geq 0, \qquad a(2b+c) \geq b(2a+c) \geq 0$$

Nên

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \geq \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}$$

Theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b > 0, c = 0$ và các hoán vị.

23 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho các số không âm* x, y, z *thỏa* $6 \geq x + y + z \geq 3$, *chứng minh rằng*

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} \geq \sqrt{xy + yz + zx + 15}$$

Chứng minh. Đặt $a^2 = 1 + x, b^2 = 1 + y, c^2 = 1 + z, d = a^2 + b^2 + c^2$ thì ta có $a, b, c \geq 1$ và $9 \geq d \geq 6$, bất đẳng thức trở thành

$$a + b + c \geq \sqrt{18 - 2d + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Hay

$$3d + 2(ab + bc + ca) \geq 18 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Sử dụng giả thiết $9 \geq d \geq 6$ và bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$3d(d-6) \geq \frac{1}{3}d^2(d-6) \geq (d-6)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Suy ra

$$3d + \frac{6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{d} \geq 18 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Ta cần chứng minh

$$ab + bc + ca \geq \frac{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{d}$$

Hay

$$(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} (b + c)(4a - b - c)(a - b)(a - c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$(b + c)(4a - b - c) - (c + a)(4b - c - a) = (a - b)(a + b + 6c) \geq 0$$

Từ đó, suy ra

$$(b + c)(4a - b - c) \geq (c + a)(4b - c - a) \geq (a + b)(4c - a - b)$$

Mặt khác lại có

$$9c^2 \geq 9 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Suy ra

$$8c^2 \geq a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Do đó

$$4c - a - b \geq 0$$

Từ đây, sử dụng định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$ hoặc $x = y = z = 1$.

24 [Vasile Cirtoaje] *Với mọi $a, b, c \geq 0$, ta có*

$$\frac{a^2 + bc}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b^2 + ca}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c^2 + ab}{a^2 + ab + b^2} \geq 2$$

Chứng minh. Ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + bc}{b^2 + bc + c^2} - 2 = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{b^2 + bc + c^2} + \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\frac{1}{b^2 + bc + c^2} - \frac{1}{a^2 + ac + c^2} = \frac{(a-b)(a+b+c)}{(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)} \geq 0$$

Nên theo định lý 2, bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

25 [Romania TST 2005] *Cho các số dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Chứng minh. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{a^2} - a^2 + 2(a-1) \right) \geq 0$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} (a-1)^2 \cdot \frac{1 + 2a - a^2}{a^2} \geq 0$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} (4M_a + M_b + M_c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

trong đó

$$M_a = \frac{1+2a-a^2}{a^2}, \qquad M_b = \frac{1+2b-b^2}{b^2}, \qquad M_c = \frac{1+2c-c^2}{c^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$M_b - M_a = \frac{(a-b)(a+b+2ab)}{a^2b^2} \geq 0$$

Từ đó, ta có

$$4M_c + M_a + M_b \geq 4M_b + M_c + M_a \geq 4M_a + M_b + M_c$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} 4M_a + M_b + M_c &= \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{8}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 6 \\ &\geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Nên theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

26 [Darij Grinberg] *Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{y+z}{x^3+yz} + \frac{z+x}{y^3+zx} + \frac{x+y}{z^3+xy} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức GM - HM, ta có

$$1 = \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì ta có $a, b, c > 0$ và $1 \geq \frac{3}{a+b+c}$, do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{y+z}{x^3+yz} \leq \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{3a^3+bc(a+b+c)}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 \geq \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{3a^3+bc(a+b+c)}\right)$$

Hay

$$\frac{3\sum_{\text{cyc}} a^2}{\sum_{\text{cyc}} a} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{3a^3(b+c)}{3a^3+bc(a+b+c)}$$

Hay

$$\frac{\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2}{\sum_{\text{cyc}} a} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a(3a^3-3a^2(b+c)+3abc+bc(b+c-2a))}{3a^3+bc(a+b+c)} \geq 0$$

$$\frac{\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2}{\sum_{\text{cyc}} a} + 3\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(a-b)(a-c)}{3a^3+bc(a+b+c)} + abc\sum_{\text{cyc}} \frac{b+c-2a}{3a^3+bc(a+b+c)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, dễ thấy $\frac{a^3}{3a^3+bc(a+b+c)} \geq \frac{b^3}{3b^3+ac(a+b+c)} > 0$ nên theo định lý 2, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(a-b)(a-c)}{3a^3+bc(a+b+c)} \geq 0$$

Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b+c-2a}{3a^3+bc(a+b+c)} \geq 0$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \geq 0$$

trong đó

$$S_a = (3b^2+3c^2-a^2+3bc-ca-ab)(3a^3+bc(a+b+c))$$
$$S_b = (3c^2+3a^2-b^2+3ca-ab-bc)(3b^3+ca(a+b+c))$$
$$S_c = (3a^2+3b^2-c^2+3ab-bc-ca)(3c^3+ab(a+b+c))$$

Do $a \geq b \geq c > 0$ nên dễ thấy $S_b, S_c \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
&a^2S_b + b^2S_a \\
&= c(a+b+c)((a-b)^2(a+b)(2a^2+ab+2b^2) + c(a-b)(a^3-b^3) \\
&+ a^5 + b^5 + 3(a^3+b^3)c^2 + 2(a^4+b^4)c) + 3a^2b^2(2(a-b)^2(a+b) \\
&+ 3(a+b)c^2 + 2(a^2+b^2)c + (a-b)^2c) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

27 [Nguyễn Văn Thạch] *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}}\geq\frac{3}{2}$$

Chứng minh. Chú ý rằng $\sum_{\text{cyc}}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}\ \forall a,b,c\geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}\geq\sum_{\text{cyc}}\frac{a}{b+c}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}M_a(a-b)(a-c)\geq 0$$

trong đó

$$M_a=\frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)}\right)}$$

$$M_b=\frac{\sqrt{b}}{(c+a)\sqrt{c+a}\left(\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{b(c+a)}\right)}$$

$$M_c=\frac{\sqrt{c}}{(a+b)\sqrt{a+b}\left(\sqrt{c^2+ab}+\sqrt{c(a+b)}\right)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq 0$ thì ta có

$$(c+a)^2(b^2+ca)-(b+c)^2(a^2+bc)=c(a-b)(a^2+b^2+c^2+ac+bc-ab)\geq 0$$

$$(c+a)^2b-(b+c)^2a=(a-b)(ab-c^2)\geq 0$$

Suy ra

$$(c+a)\sqrt{b^2+ca}\geq(b+c)\sqrt{a^2+bc},\qquad(c+a)\sqrt{b}\geq(b+c)\sqrt{a}$$

Từ đây, ta suy ra được $M_a\geq M_b\geq 0$ nên theo định lý 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

3 Kết luận

Còn rất nhiều bài toán có thể giải được bằng Schur và Vornicu Schur nhưng do khuôn khổ nên xin được nêu những bài toán điển hình nhất. Qua đó, ắt hẳn ít nhiều các bạn đã thấy được "tính năng" của chúng. Hy vọng rằng qua bài viết này, các bạn sẽ có 1 cái nhìn khác về bất đẳng thức Schur. Do trình độ còn hạn chế, nên hy vọng các bạn bỏ qua cho những sai sót (nếu có) và mong các bạn sẽ đóng góp ý kiến để tôi hoàn thiện bài viết này, xin cảm ơn rất nhiều. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: Võ Quốc Bá Cẩn, C65 khu dân cư Phú An, phường Phú Thứ, quận Cái Răng, thành phố Cần Thơ hoặc qua thư điện tử babylearnmath@yahoo.com