

**SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐẲNG CẤP
TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ**

Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu với bạn đọc một kĩ thuật thường sử dụng để xử lí các bài toán về bất đẳng thức và bài toán tìm cực trị của một biểu thức trong đó các biểu thức và giả thiết của bài toán đều là những biểu thức, đẳng thức, bất đẳng thức đẳng cấp.

Trước hết xin nhắc lại định nghĩa biểu thức đẳng cấp:

Biểu thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc k ($k \in \mathbb{Z}$) nếu

$$f(mx_1, mx_2, \dots, mx_n) = m^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Nếu biểu thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là biểu thức đẳng cấp bậc 0 thì với phép đặt $x_i = t_i x_1, x_1 \neq 0$,

$i = 2, 3, \dots, n$ ta có: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ là biểu thức $n - 1$ biến, tức là ta đã làm

giảm đi số biến. Đặt biệt với biểu thức đẳng cấp bậc 0 hai biến thì ta có thể chuyển về biểu thức một biến. Do đó để tìm cực trị của biểu thức này ta có thể sử dụng phương trình khảo sát hàm số.

Sau đây là các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$ (**Đề thi ĐH Khối B – 2009**).

Lời giải.

* Nếu $y = 0 \Rightarrow P = 1$.

* Nếu $y \neq 0$ thì đặt: $x = ty$ ta có: $P = \frac{2(t^2 y^2 + 6ty^2)}{t^2 y^2 + 2ty^2 + 3y^2} = \frac{2(t^2 + 6t)}{t^2 + 2t + 3} = 2f(t)$

Xét hàm số $f(t)$, ta có: $f'(t) = \frac{-4t^2 + 6t + 18}{(t^2 + 2t + 3)^2}$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -\frac{3}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 1$$

Lập bảng biến thiên ta được: $\max f(t) = f(3) = \frac{3}{2}, \quad \min f(t) = f(-\frac{3}{2}) = -3$

Vậy: $\max P = 3$ đạt được khi $\begin{cases} x = 3y \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$

Và $\min P = -6$ đạt được khi $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$.

Ví dụ 2. Cho x, y là hai số thực thay đổi và thỏa mãn $\frac{3}{x^2} + \frac{2y}{x} + y^2 = 11$. Tìm giá trị lớn nhất

và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x} + 3y^2$.

Lời giải.

Đặt $y = \frac{t}{x}$, từ giả thiết bài toán ta có: $\frac{1}{x^2} (3 + 2t + t^2) = 11 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{11}{3 + 2t + t^2}$.

Do $t^2 + 2t + 3 > 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R}$

Khi đó: $A = \frac{1}{x^2}(1 + 2t + 3t^2) = 11 \frac{3t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t + 3}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{3t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t + 3}, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = \frac{4(t^2 + 4t + 1)}{(t^2 + 2t + 3)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2 \pm \sqrt{3}$

$f(-2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}, f(-2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 3$

Suy ra $\max A = 11. \max f(t) = 22 + 11\sqrt{3}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{t^2 + 2t + 3}{11}} = \pm \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{3}}{11}} \\ y = \frac{-2 - \sqrt{3}}{x} \end{cases}$

$\min A = 11. \min f(t) = 22 - 11\sqrt{3}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{t^2 + 2t + 3}{11}} = \pm \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{11}} \\ y = \frac{-2 + \sqrt{3}}{x} \end{cases}$.

Ví dụ 3. Cho hai số thực $x \geq 0, y \geq \frac{1}{4}$ thỏa $x^3 + y^3 = x^2 - 2y^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

Lời giải.

Đặt $x = ty, t \geq \sqrt{2}$, khi đó từ giả thiết bài toán ta suy ra :

$$y(t^3 + 1) = t^2 - 2 \Rightarrow y = \frac{t^2 - 2}{t^3 + 1}$$

Vì $y \geq \frac{1}{4} \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t^2 - t - 3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \leq t \leq 3$.

Ta có: $P = y(t + 3) = \frac{(t + 3)(t^2 - 2)}{t^3 + 1} = 1 + \frac{3t^2 - 2t - 7}{t^3 + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{3t^2 - 2t - 7}{t^3 + 1}, t \in D = \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 3 \right]$, ta có: $f'(t) = \frac{-3t^4 + 4t^3 + 21t^2 - 2}{(t^3 + 1)^2}$

Vì $-3t^4 + 4t^3 + 21t^2 - 2 = t^3(3 - t) + (t^3 - 2) + 2t^2(9 - t^2) + 3t^2 > 0, \forall t \in D$

Dẫn tới $f'(t) > 0, \forall t \in D$. Từ đó ta tìm được:

$\min P = 1 + f\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) = \frac{7 + \sqrt{13}}{8}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\max P = 1 + f(3) = \frac{3}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Ví dụ 4. Cho các số thực dương x, y thỏa $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y^3}{x^3} + \frac{2x^2}{y^2}.$$

Lời giải. Đặt $t = \frac{y}{x} > 0 \Rightarrow P = t^3 + \frac{2}{t^2}$

Khi đó $xy \leq y - 1$ trở thành $x^2t - tx + 1 \leq 0$, vì x tồn tại nên bất phương trình này phải có nghiệm x hay $\Delta = t^2 - 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + \frac{2}{t^2}, t \geq 4$ có $f'(t) = 2t^2 - \frac{4}{t^3} = \frac{2(t^5 - 2)}{t^3} > 0, \forall t \geq 4$

Suy ra $\min_{t \geq 4} f(t) = f(4) = \frac{513}{8}$.

Vậy $\min P = \frac{513}{8}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa $x(x + y + z) = 3yz$ (*), ta luôn có:

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \leq 5(y + z)^3 \text{ (ĐH Khối A – 2009)}.$$

Lời giải.

Đặt $y = ax; z = bx$.

Khi đó giả thiết bài toán trở thành: $x(x + ax + bx) = 3abx^2 \Leftrightarrow 1 + a + b = 3ab$ (*) và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x + ax)^3 + (x + bx)^3 + 3(x + ax)(ax + bx)(bx + x) \leq 5(ax + bx)^3$$

$$\Leftrightarrow (1 + a)^3 + (1 + b)^3 + 3(1 + a)(1 + b)(a + b) \leq (a + b)^3 \quad (1).$$

Vì (*) và (1) là những biểu thức đối xứng đối với a, b nên ta nghĩ tới cách đặt

$$S = a + b; P = ab$$

Mỗi quan hệ giữa S và P là $\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ 1 + S = 3P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1+S}{3} \\ 3S^2 - 4S - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1+S}{3} \\ S \geq 2 \end{cases}$.

Khi đó :

$$(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab = 1 + S + \frac{1+S}{3} = \frac{4(1+S)}{3}$$

$$(1 + a)^3 + (1 + b)^3 = (2 + a + b)^3 - 3(1 + a)(1 + b)(2 + a + b) = (2 + S)^3 - 4(1 + S)(2 + S)$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow (2 + S)^3 - 4(S^2 + 3S + 2) + 4S(1 + S) \leq 5S^3$$

$$\Leftrightarrow 2S^2 - 3S - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (2S + 1)(S - 2) \geq 0 \text{ luôn đúng do } S \geq 2.$$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho các số thực $x, y, z \in [1; 4]; x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x + 3y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x} \text{ (ĐH Khối A – 2011)}.$$

Lời giải. Đặt $y = ax, z = bx \Rightarrow a, b \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Khi đó:

$$P = \frac{x}{2x + 3ax} + \frac{ax}{ax + by} + \frac{bx}{bx + x} = \frac{1}{2 + 3a} + \frac{a}{a + b} + \frac{b}{b + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(a) = \frac{1}{2 + 3a} + \frac{a}{a + b}, f'(a) = -\frac{3}{(2 + 3a)^2} + \frac{b}{(a + b)^2}$$

$$\text{Xét } b(2 + 3a)^2 - 3(a + b)^2 = 9a^2b + 6ab + 4b - 3a^2 - 3b^2$$

$$\geq 15a^2b + 4b - 3a^2 - 3b^2 = 3a^2(5b - 1) + b(4 - 3b) > 0$$

Nên $f(a)$ là hàm đồng biến trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow f(a) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b}$

Do đó: $P \geq \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{b+1} = g(b)$

Ta có: $g'(b) = \frac{-4}{(1+4b)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \Rightarrow g'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

Từ đó suy ra: $g(b) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34}{33}$ hay $P \geq \frac{34}{33}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = 2z \end{cases}, \text{ mà } x, y, z \in [1; 4] \Rightarrow \begin{cases} x = 4, y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{34}{33}$.

Ví dụ 7. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $(a+2b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 4$ và $3a \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn

nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + 2b^2}{ac}$.

Lời giải. Đặt $a = xb, c = yb; x, y > 0$

Từ giả thiết ta có: $(x+2)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \Rightarrow x = \frac{4y}{y+1} - 2 = \frac{2(y-1)}{y+1}$

Do $\frac{x}{y} = \frac{a}{c} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow x \geq \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{2y-2}{y+1} \geq \frac{y}{3} \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3$

Khi đó: $P = \frac{x^2 + 2}{xy} = \frac{3y^2 - 2y + 3}{y^3 - y} = f(y)$

Xét hàm số $f(y)$ với $y \in [2; 3]$, có:

$$f'(y) = \frac{-3y^4 + 4y^3 + 3}{(y^3 - y)^2} = \frac{-3y^3(y-2) - (2y^2 - 3)}{(y^3 - y)^2} < 0, \forall y \in [2; 3]$$

Suy ra $\max P = \max_{[2; 3]} f(y) = f(2) = \frac{11}{6}$, đạt được khi $a = \frac{2}{3}b, c = 2b$

$\min P = \min_{[2; 3]} f(y) = f(3) = 1$, đạt được khi $a = b, c = 3b$.

Ví dụ 8. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 16$. Tìm giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + 2b^2}{ab}$.

Lời giải.

Đặt $b = ay, c = ax; x, y > 0$, từ giả thiết ta có: $(1+x+y)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 16$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{y}\right)x^2 + \left(y + \frac{1}{y} - 13\right)x + y + 1 = 0 \quad (*)$$

$$a, b, c \text{ tồn tại khi (*) có nghiệm } x, y > 0 \text{ hay là: } \begin{cases} y > 0 \\ \Delta = \left(y + \frac{1}{y} - 13\right)^2 - 4(y+1)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 0 \\ y + \frac{1}{y} < 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 30\left(y + \frac{1}{y}\right) + 161 \geq 0 \\ y + \frac{1}{y} < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y + \frac{1}{y} \leq 7 \\ y + \frac{1}{y} < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Khi đó $P = y + \frac{2}{y}$, khảo sát $f(y) = y + \frac{2}{y}$ với $y \in \left[\frac{7-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right]$ ta tìm được

$$\max P = f\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{21+3\sqrt{5}}{2}, \text{ đạt được khi } \begin{cases} b = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}a \\ c = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a \end{cases}$$

$$\min P = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, \text{ đạt được khi } \begin{cases} b = \sqrt{2}a \\ c = xa \end{cases} \text{ với } x \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$(\sqrt{2}+1)x^2 - (13\sqrt{2}-3)x + \sqrt{2}+1 = 0.$$

Cuối cùng chúng tôi đưa ra một số bài tập để bạn đọc luyện tập.

Bài 1. Cho $x^2 + y^2 + xy = 1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 - xy + 2y^2$.

Bài 2. Cho các số thực x, y thỏa $x^2 + y^2 + xy \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 - xy + y^2$

Bài 3. Cho x, y là hai số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{y^2 + 1}$.

Bài 4. Cho $x, y \geq 0$ thỏa $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 < 1$.

Bài 5. Cho các số thực $a, b, c \geq 0$ thỏa $4abc \geq 2a^3 - (b+c)^3$. Chứng minh rằng

$$\frac{7}{16}a^4 + 3(b^4 + c^4) \geq 2a^2b^2 - 3b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Bài 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 3b^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc - (a^2 + c^2)(a+c)}{b^2(a+c)}.$$

Bài 7. Cho các số thực dương x, y thỏa $x + 2\sqrt{xy} \geq 8y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

Bài 8. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $(a + c)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{10}{b}$ và $c \geq 4b$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a + c - b}{b}$.

GV: Nguyễn Tất Thu – GV trường THPT Lê Hồng Phong Biên Hòa Đồng Nai

Email: nguyentatthudn@gmail.com

ĐT: 01699257507