1 BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

Bài 1.1. (2005*) Tìm giá trị của x để biểu thức $M = \dfrac{x^2 - 2x + 2005}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

Giải

Điều kiện $x \neq 0$. Giả sử M là một giá trị thuộc tập giá trị của hàm số $\dfrac{x^2 - 2x + 2005}{x^2}$, khi đó tồn tại $x \neq 0$ để $M = \dfrac{x^2 - 2x + 2005}{x^2}$. Quy đồng mẫu số và chuyển vế ta được

$$(1 - M)x^2 - 2x + 2005 = 0. \qquad (1)$$

Nếu $M = 1$ thì $x = \dfrac{2005}{2}$.
Nếu $M \neq 1$ thì để phương trình (1) có nghiệm thì

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2005(1 - M) \geq 0 \Leftrightarrow M \geq \frac{2004}{2005}.$$

Từ đó ta nhận thấy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{2004}{2005}$, xảy ra khi $x = 2005$.

Bài 1.2. (2005*) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} \geq 2$. Chứng minh rằng $abc \leq \dfrac{1}{8}$.

Giải

Từ giả thiết bài toán cùng với bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a} &\geq 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c}\\ &= \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\\ &\geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng được

$$\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{(1+c)(1+a)}}, \quad \frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}.$$

Nhân ba bất đẳng thức cùng chiều dương ta được

$$\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 8\frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)},$$

hay

$$abc \leq \frac{1}{8}.$$

Bài 1.3. (2006*) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Giải

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $a < b + c$, từ đây ta có

$$2a < a + b + c = 2 \Rightarrow a < 1.$$

Tương tự ta cũng có $b, c < 1$. Từ đó thì

$$\begin{aligned}
&(1-a)(1-b)(1-c) > 0\\
&\Rightarrow 1 - (a+b+c) + ab + bc + ca > abc\\
&\Rightarrow abc < -1 + ab + bc + ca.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$2abc < -2 + 2(ab + bc + ca).$$

Từ đây thì

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 + 2abc &< a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 2\\
&= (a+b+c)^2 - 2 = 2.
\end{aligned}$$

Bài 1.4. (2007) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = (2x+1)(2-3x)$ với $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right]$.

Giải

Do $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right]$ nên $2x + 1 \geq 0$ và $2 - 3x \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
y &= (2x+1)(2-3x)\\
&= \frac{1}{6}(6x+3)(4-6x)\\
&\leq \frac{1}{6}\left(\frac{6x+3+4-3x}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{49}{4} = \frac{49}{24}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $6x + 3 = 4 - 6x$ hay $x = \dfrac{1}{12}$. Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]} y = \frac{49}{24}$ khi $x = \dfrac{1}{12}$.

Bài 1.5. (2007*) Cho ba số a, b, c dương và thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3(1+b)(1+c)}{(1+b)(1+c)64}} = \frac{3}{4}a.$$

Tương tự ta có hai bất đẳng thức nữa là

$$\frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+c}{8} \geq \frac{3}{4}b.$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3}{4}c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, và rút gọn ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.6. (2008*) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$, chứng minh rằng $b + c \geq 16abc$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
16abc &\leq 16.a.\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \quad \text{(áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số } b \text{ và } c\text{)}\\
&= 4a.(b+c)^2\\
&= 4(b+c).a.(b+c)\\
&\leq 4(b+c).\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \quad \text{(áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số } a \text{ và } b+c\text{)}\\
&= 4(b+c).\frac{1}{4} = b + c.
\end{aligned}$$

Bài 1.7. (2009) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x^2+5}{x^2+1}$.

Giải

Ta biến đổi biểu thức P như sau

$$\begin{aligned}
P &= \frac{3x^2+5}{x^2+1}\\
&= \frac{5(x^2+1) - 2x^2}{x^2+1}\\
&= 5 - 2.\frac{x^2}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Do vậy $P \leq 5$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$. Vậy $P_{\max} = 5$ khi $x = 0$.

Bài 1.8. (2009*) Cho $x > y \geq 0$. Chứng minh rằng $x + \dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Giải

Ta viết lại vế trái dưới dạng

$$(x-y)+\frac{y+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}-1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương

$$(x-y)+\frac{y+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\geq 4\sqrt[4]{\frac{4(x-y)(y+1)^2}{4(x-y)(y+1)^2}}=4.$$

Kết hợp hai điều trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.9. (2010) Cho ba số a,b,c thuộc đoạn $[-1,2]$ thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\leq 6$.

Giải

Vì $-1\leq a\leq 2$ nên $(a+1)(a-2)\leq 0$ hay $a^2\leq a+2$. Tương tự ta có $b^2\leq b+2, \quad c^2\leq c+2$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$a^2+b^2+c^2\leq a+b+c+6=6 \quad (\text{do } a+b+c=0).$$

Bài 1.10. (2010*) Cho ba số a,b,c với $a>b>c$. Chứng minh rằng $a^2-b^2+c^2>(a-b+c)^2$.

Giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên

$$\begin{aligned}
&a^2-b^2+c^2>(a-b+c)^2\\
&\Leftrightarrow a^2-b^2+c^2>a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac\\
&\Leftrightarrow b^2-ab-bc+ac<0\\
&\Leftrightarrow (b-c)(b-a)<0 \quad (\text{Đúng, vì } b>c, b<a).
\end{aligned}$$

Dưới đây xin gửi tới các bạn một số bài toán luyện tập cùng với hướng dẫn giải. Những hướng dẫn này mang tính chất mở, phù hợp với nhu cầu tự học của học sinh. Hầu hết các bài tập này chỉ ở mức độ trung bình khá.

1. Cho $a,b\geq 0$, chứng minh $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (HD: biến đổi về dạng $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$).
2. Cho $a,b,c\geq 0$, chứng minh $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ (HD: chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 4 số, sau đó áp dụng cho 3 số).
3. Chứng minh $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca, \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ (HD: có thể dùng BĐT Cauchy hoặc đưa về dạng $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$).
4. Chứng minh $|ax+by|\leq\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \quad (\forall a,b,x,y)$ (HD: bình phương hai vế).
5. Chứng minh $a^3+b^3\geq ab(a+b) \quad (a>0,b>0)$ (HD: đưa về dạng $(a-b)^2(a+b)\geq 0$).

6. Chứng minh $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3 \quad (a>0, b>0)$ (HD: đưa về bất đẳng thức quen thuộc $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$).
7. Chứng minh $a^4+b^4 \geq ab(a^2+b^2) \quad (\forall a, b \in \mathbb{R})$ (HD: tương tự như bài 5).
8. Chứng minh $1 < \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} < 2 \quad (a, b, c > 0)$ (HD: đánh giá trội mẫu số).
9. Chứng minh $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e) \quad (\forall a, b, c, d, e)$ (HD: đưa về tổng các bình phương).
10. Cho a, b, c là ba cạnh tam giác. Chứng minh $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$ (HD: dùng tính chất $a < b+c$).
11. Cho a, b, c là ba cạnh tam giác. Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$ (HD: dùng bất đẳng thức Cauchy cho hai số một ở vế trái).
12. Chứng minh $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2} \quad (a>0, b>0, c>0)$ (HD: bất đẳng thức Nesbit).
13. Chứng minh $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b} \quad (a>0, b>0)$ (HD: là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Cauchy).
14. Chứng minh $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c} \quad (a>0, b>0, c>0)$ (HD: tương tự như bài 13).
15. Chứng minh $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 \quad (\forall x, y, z \in \mathbb{R})$ (HD: tương tự như bài 3).
16. Chứng minh $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \quad (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})$ (HD: bình phương rồi đưa về bài 4).
17. Cho a, b dương, chứng minh $\dfrac{a}{a^4+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^4} \leq \dfrac{1}{ab}$ (HD: dùng Cauchy cho dưới mẫu).
18. Cho a, b dương, chứng minh $(a+b)(ab+1) \geq 4ab$ (HD: dùng Cauchy cho hai số).
19. Cho a, b, c dương, chứng minh $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a+b+c$ (HD: dùng Cauchy cho hai số một).
20. Cho a, b, c dương, chứng minh $a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$ (HD: là hệ quả của bài 5).
21. Cho a, b, c dương, chứng minh $\dfrac{a^3+b^3}{2ab} + \dfrac{b^3+c^3}{2bc} + \dfrac{c^3+a^3}{2ca} \geq a+b+c$ (HD: là hệ quả của bài 5).
22. Cho a, b dương, chứng minh $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}} + \sqrt{\dfrac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (HD: là hệ quả của bài 5).
23. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$ (HD: đánh giá trội mẫu).

24. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ (HD: dựa vào đánh giá $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$).

25. Chứng minh $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (HD: dùng tam thức bậc hai).

26. Cho a, b dương thỏa $a + b = 1$, chứng minh $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$ và $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} \geq 14$ (HD: dùng bất đẳng thức Cauchy với điểm rơi tại $a = b = \frac{1}{2}$).

27. Cho a, b dương thỏa $ab = 1$, chứng minh $a + b + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$ (HD: dùng bất đẳng thức Cauchy với điểm rơi tại $a = b = 1$).

28. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ (HD: chứng minh $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > \frac{1}{\sqrt{n}}$).

29. Cho a, b dương, tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ (HD: dùng bất đẳng thức Cauchy, lưu ý điểm rơi).

30. Chứng minh $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc \quad (a, b, c > 0)$ (HD: dùng Cauchy cho từng số một ở vế trái).

31. Cho $a \geq 1, b \geq 1$, chứng minh $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ (HD: áp dụng Cauchy cho số $\sqrt{b-1}$, và cho số $\sqrt{b-1}$).

32. Cho a, b, c dương thỏa $a + b + c = 1$, chứng minh $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$ (HD: dùng bài 14).

33. Cho a, b, c dương thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, chứng minh $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (HD: chứng minh $\frac{a}{1 - a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ bằng Cauchy, lưu ý chọn điểm rơi).

34. Chứng minh $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3} \quad (b_1, b_2, b_3 > 0, \forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$ (HD: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski).

35. Cho a, b, c dương, chứng minh $\frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \geq \frac{1}{5}(a + b + c)$ (HD: dùng bài 34).

36. Cho $a > 1, b > 1$, chứng minh $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$ (HD: dùng bài 34).

37. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, chứng minh $a^5 + b^5 + c^5 \geq 3$ (HD: dùng Cauchy bằng cách thêm bớt dưới dạng $a^5 + a^5 + a^5 + 1 + 1$).

38. Cho $x+y+z=1$, chứng minh $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$ (HD: dùng bài 15).

39. Cho a, b, c dương, chứng minh $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{ab}$ (HD: đánh giá Cauchy cho các biểu thức dưới mẫu).

40. Cho $0 < a, b, c < 1$, chứng minh $\frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c)$ (HD: giả sử $c = \max\{a, b, c\}$, đánh giá cận trên cho $\frac{1}{(1-a)(1-b)}$).

Các bài tập dưới đây không có hướng dẫn, kỹ thuật giải chúng tương tự như các bài tập trên.

41. Cho $x \geq 1, y \geq 1$, chứng minh $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$.

42. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

43. Chứng minh $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4) \quad (\forall a, b \in \mathbb{R})$.

44. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $a(1+b^2)+b(1+c^2)+c(1+a^2) \geq 2(ab+bc+ca)$.

45. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$.

46. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^4+b^4+c^4=48$, chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2 \leq 24$.

47. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{a+b+2c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

48. Cho $a, b > 0$ và $a+b \leq 1$, tìm GTNN của $P = \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$.

49. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}$.

50. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$.

51. Cho $x > y > 0$ và $x^5+y^5 = x-y$, chứng minh $x^4+y^4 < 1$.

52. Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$, chứng minh $xy+yz+zx > \frac{18xyz}{2+xyz}$.

53. Chứng minh $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} \geq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

54. Cho $x.y \neq 0$, chứng minh $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4 \geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$.

55. Chứng minh $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2.\sqrt{3}$

56. Cho a, b, c thỏa $\begin{cases} a+b+c>0 \\ ab+bc+ca>0 \\ abc>0 \end{cases}$, chứng minh cả ba số a, b, c đều dương.

57. Cho a, b, c dương thỏa $a+b+c=3abc$, chứng minh $\dfrac{1}{a^5}+\dfrac{1}{b^5}+\dfrac{1}{c^5} \geq 3$.

58. Cho $a, b, c>0$ thỏa $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$, chứng minh $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}$.

59. Cho x, y, z thỏa $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$, chứng minh $1 \leq x, y, z \leq \dfrac{7}{3}$.

60. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa $2\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$, chứng minh $x+y \geq \dfrac{1}{5}$.