CHUYÊN ĐỀ
Đánh giá trên biên

Bất đẳng thức là một trong những chủ đề khó của **Toán học**, để giải quyết được những bài toán hóc búa đòi hỏi chúng ta phải thông minh, sáng tạo, phải chịu khó tìm tòi phát triển và bên cạnh đó cần phải có phương pháp rõ ràng. Bài viết này giới thiệu với độc giả một phương pháp rất quen thuộc trong giới nghiên cứu về bất đẳng thức, đó là phương pháp: "ĐÁNH GIÁ TRÊN BIÊN", cũng có nhiều tài liệu nói là: "NHÌN VÀO ĐIỂM MÚT". Với tư cách một người biết một chút về **Toán học**, tôi đã thu thập và tham khảo ý kiến của nhiều thầy cô giáo yêu toán để viết chuyên đề này. Tôi xin chân thành cám ơn các thầy cô: "*Vũ Minh Thắng, Nguyễn Thế Anh - K41-ĐHSP Hà Nội*", và các thầy có bút danh: "*huyclvc - thaithuanGC - chienthan - vophung*".

Cám ơn sự quan tâm của các bạn! Mọi ý kiến đóng góp để giúp cho bài viết được đầy đủ và chính xác hơn, vui lòng liên hệ qua điện thoại hoặc hòm thư: `tienthuy3385@gmail.com`.

1 Một số bất đẳng thức cơ bản

1) **Định lý 1.** Nếu $f(x)$ là hàm số bậc nhất theo x, thì với mọi $x \in [a, b]$ ta luôn có:

$$\min\{f(a), f(b)\} \leq f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

2) **Định lý 2.**
   - Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên khoảng $[a, b]$ thì ta có: $f(x) \geq \min\{f(a), f(b)\}$.
   - Nếu $f(x)$ là hàm lõm trên khoảng $[a, b]$ thì ta có: $f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}$.

3) **Định lý 3.** Cho $f(x) = ax^2 + bx + c,\ (a \neq 0)$. Với $x \in [\alpha, \beta]$ thì $f(x)$ đạt giá trị min hoặc max tại $x = \alpha, x = \beta$ hoặc $x = \dfrac{-b}{2a}$ (*nếu* $\dfrac{-b}{2a} \in [\alpha, \beta]$.)

2 Một số thí dụ

Bài toán 1. Cho $x, y, z \in [0, 2]$. Chứng minh rằng:

$$2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4. \ (1)$$

Hướng dẫn. Ta sẽ chuyển hết sang vế trái và coi chúng như một hàm bậc nhất theo x. Sau đó ta áp dụng **Định lý 1.** và hoàn thiện chứng minh.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} & 2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x + y + z) - (xy + yz + zx) - 4 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz - 4 \leq 0. \end{aligned}$$

- Xét hàm số $f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz - 4$, xác định trên $[0, 2]$.
- Nhận thấy $f(0) = 2(y + z) - yz - 4 = -(2 - y)(2 - z) \leq 0$ và $f(2) = -yz \leq 0$, áp dụng **Định lý 1,** ta có $f(x) \leq \max\{f(0), f(2)\} \leq 0$. (đpcm)

Bài toán 2. Cho $a, b, c, d \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) + a + b + c + d \geq 1. \ (2)$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} & (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) + a + b + c + d \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & [1 - (1 - b)(1 - c)(1 - d)]\, a + (1 - b)(1 - c)(1 - d) + b + c + d - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

- Xét hàm số $f(a) = [1-(1-b)(1-c)(1-d)]\,a + (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d - 1$, xác định trên $[0,1]$.

- Nhận thấy $f(1) = b + c + d \geq 0$ và $f(0) = (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d - 1 = g(b) = [1-(1-c)(1-d)]b + (1-c)(1-d) + c + d - 1(*)$.

- Xét $g(1) = c + d \geq 0, g(0) = (1-c)(1-d) + c + d - 1 = cd \geq 0$, theo $(*)$ suy ra $f(0) = g(b) \geq \min\{g(0), g(1)\} \geq 0, \forall b, c, d \in [0,1]$.

- Từ đó ta có $f(a) \geq \min\{f(0), f(1)\} \geq 0, \forall a, b, c, d \in [0,1]$. (đpcm)

Bài toán 3. Cho $a, b, c, A, B, C \geq 0$ thỏa mãn: $a + A = b + B = c + C = 1$. Chứng minh rằng:

$$aA + bB + cC \leq 1.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
& aB + bC + cA \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) - 1 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a + b + c - ab - bc - ca - 1 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-b-c)a - bc + b + c - 1 \leq 0.
\end{aligned}$$

- Xét hàm số $f(a) = (1-b-c)a - bc + b + c - 1$, xác định trên $[0,1]$.

- Nhận thấy $f(0) = -bc + c + b - 1 = (1-b)(c-1) \leq 0$ và $f(1) = -bc \leq 0$, áp dụng **Định lý 1** ta có $f(a) \leq \max\{f(0), f(1)\} \leq 0, \forall a, b, c \in [0,1]$. (đpcm)

Bài toán 4. [IMO] Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
& xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27} \\
\Leftrightarrow\ & xy + yz + zx - 2xyz - \frac{7}{27} \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-2z)xy + z(1-z) - \frac{7}{27} \leq 0
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(xy) = (1-2z)xy + z(1-z) - \frac{7}{27}$ với $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2$. Nhận thấy $f(0) = -z^2 + z - \frac{7}{27} = -(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{108} < 0$ và $f(\left(\frac{1-z}{2}\right)^2) = -\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{3}\right)^2\left(z + \frac{1}{6}\right) \leq 0$, nên theo **Định lý 1** ta có $f(xy) \leq \max\{f(0), f(\left(\frac{1-z}{2}\right)^2)\} \leq 0, \forall x, y, z$ thỏa mãn điều kiện bài toán. (đpcm)

Bài toán 5. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \geq 1.$$

Lời giải. Đánh giá $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left[(x+y+z)((x+y+z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx) + 3xyz\right] + 15xyz - 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4 - 12xy - 12yz - 12zx + 27xyz - 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3xy(9z - 4) - 12z(1-z) + 3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(xy) = 3xy(9z-4)-12z(1-z)+3$, với $0 \le xy \le \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2$. Ta có $f(0) = 12z^2-12z+3 = 3(2z-1)^2 \ge 0$ và $f(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2) = 3\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2(9z-4) - 12z(1-z) + 3 = \dfrac{3z}{4}(3z-1)^2 \ge 0$. Áp dụng **Định lý 1** ta có $f(xy) \ge \min\{f(0), f(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2)\} \ge 0, \forall x, y, x$ thỏa mãn điều kiện bài cho, đpcm.

Bài toán 6. Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge \frac{1}{4}.$$

Lời giải. Đánh giá $0 \le xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz \ge \frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\left[(x+y+z)((x+y+z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx) + 3xyz\right] + 6xyz - \frac{1}{4} \ge 0\\
\Leftrightarrow\ &1 - 3xy - 3yz - 3zx + 9xyz - \frac{1}{4} \ge 0\\
\Leftrightarrow\ &3xy(3z-1) - 3z(1-z) + \frac{3}{4} \ge 0.
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(xy) = 3xy(3z-1) - 3z(1-z) + \dfrac{3}{4}$, với $0 \le xy \le \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2$. Ta có $f(0) = 3z^2 - 3z + \dfrac{3}{4} = 3\left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ và $f(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2) = 3\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2(3z-1) - 3z(1-z) + \dfrac{3}{4} = \dfrac{9z^2}{4}[(z-\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{12} > 0.]$
Áp dụng **Định lý 1** ta có $f(xy) \ge \min\{f(0), f(\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2)\} \ge 0, \forall x, y, x$ thỏa mãn điều kiện bài cho, đpcm.

Bài toán 7. Cho ba số không âm a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le \max\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\}.$$

Lời giải 1. Giả sử

$$\max\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Xét biểu thức:

$$f(a,b,c) = VP - VT = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{abc}.$$

Với $t = \sqrt{ab}$, ta có:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) - f(t,t,c) &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{abc} - \left((\sqrt{t} - \sqrt{t})^2 - \frac{t+t+c}{3} + \sqrt[3]{abc}\right)\\
&= \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{3} \ge 0.
\end{aligned}$$

Theo định lý dồn biến ta có: $f(a,b,c) - f(t,t,c) = 0$, với $t = \sqrt[3]{abc}$.
Lời giải 2. Giả sử $a \le b \le c$. Lúc đó ta cần chứng minh: $\dfrac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$.
Xét hàm số biến b: $f(b) = \dfrac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}$, ta có $f(x) \le \max\{f(a), f(c)\}$. Giả sử $f(a) \ge f(c)$ ta

chứng minh

$$f(a) \geq (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c - \sqrt[3]{a^2c} + 2\sqrt{ac} \leq 0$$

Chú ý rằng: $a + c + c + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2c} \geq 6\sqrt[18]{a^9c^9} = 6\sqrt{ac}$. Ta sẽ có điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a+b+c}{b+c+1}.$$

Lúc đó bài toán sẽ tương đương với:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 - \frac{a+b+c}{b+c+1}$$
$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-a}{b+c+1}.(*)$$

Sau khi rút gọn $(1-a)$ và sử dụng bất đẳng thức Cauchy thu được điều phải chứng minh.

♡ *Ngoài ra chúng ta có thể dùng hàm bậc nhất để giải quyết vấn đề* $(*)$.

Bài toán 9. Cho $x, y, z, t \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - (xy^2 + yz^2 + zt^2 + tx^2) \leq \frac{8}{27}.$$

Lời giải. Giả sử $y \geq t$ (*còn các trường hợp khác tương tự*). Xét hàm số:

$$f(x, y, z, t) = (y-t)x^2 + (t^2 - y^2)x + y^2z + z^2t - yz^2 - yt^2.$$

Dễ thấy hàm số $f(x, y, z, t)$ là hàm số lõm, nên ta có

$$f(x, y, z, t) \leq \max\{f(0, y, z, t), f(1, y, z, t)\}$$

- Ta có $f(0, y, z, t) = z(y-t)(y+t-z)$. Nếu $y + t - z \leq 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, còn nếu $y + t - z > 0$, ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ thu được kết quả. Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z, t) = (0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
- Ta lại có: $f(1, y, z, t) = (1-z)t^2 + (z^2 - 1)t + t + y^2z - y^2 - yz^2$. Dễ thấy đây là hàm lõm trên $[0, 1]$ theo biến t, nên ta có:

$$f(1, y, z, t) \leq \max\{f(1, y, z, 0), f(1, y, z, 1)\}.$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

3 Một số bài tập đề nghị

Bài 1. Cho ba số dương a, b, c, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4.$$

Bài 2. Cho ba số dương a, b, c, thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc.$$

Bài 3. Cho $a > 0$,; $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [0, a]$ và

$$S = \sum_{k=1}^{n}(a - a_1).(a - a_2)\cdots(a - a_{k-1}).a_k.(a - a_{k+1})\cdots(a - a_n).$$

Tìm giá trị lớn nhất của S.

Bài 4. Cho $a, b, c, d, e \in [p; q]$, với $q > p > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c + d + e)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}) \leq 25 + 6\left[\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right]^2.$$

Bài 5. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{a}{b - c}\right| + \left|\frac{b}{c - a}\right| + \left|\frac{c}{a - b}\right| \geq 2.$$

Bài 6. Cho $x_i \in [0, 1]$, với $i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_1x_2 + x_2x_3 - \cdots - x_nx_1 \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Bài 7. Cho n số không âm: $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \max_{1\leq i\leq j\leq n}\left((\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\right).$$

Bài 8. Cho $a, b, c, d \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c + d - abcd \leq 3.$$

Bài 9. Cho $x_i \in [0, 1]$, với $i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_1x_2\cdots x_n \leq n - 1.$$

Bài 10. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx).$$

Bài 11. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \leq 6(x^3 + y^3 + z^3) + 1.$$

Bài 12. Cho $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ và $a_1; a_2; \cdots; a_n \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cycle}\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n + 1} + (1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_n) \leq 1.$$

Bài 13. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{1 - yz} + \frac{1}{1 - zx} \leq \frac{27}{8}.$$