Mục lục

1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Định nghĩa bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1. *Cho hai số a và b, ta nói rằng a nhỏ hơn b và kí hiệu là* $a < b$ *nếu* $a - b$ *âm.* $a < b \Longleftrightarrow a - b$ *âm.*
Tương tự ta có a lớn hơn b và kí hiệu là $a > b$ *nếu* $a - b$ *dương.* $a > b \Longleftrightarrow a - b$ *dương.*

Định nghĩa 1.2. *Cho a,b là hai biểu thức số, các mệnh đề dạng "*$a < b$*" hoặc "*$a > b$*" được gọi là bất đẳng thức.*

Định nghĩa 1.3. *Ta nói a nhỏ hơn hoặc bằng b nếu* $a < b$ *hoặc* $a = b$ *và kí hiệu là* $a \leq b$*.*
Vậy $a \leq b \Leftrightarrow a < b \ \vee a = b$
Tương tự ta cũng có định nghĩa cho a lớn hơn hoặc bằng b.

1.2 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Tính chất 1.1. *Tính bắc cầu:* $a < b$ *và* $b < c$ *suy ra* $a < c$*.*

Tính chất 1.2. *Quy tắc cộng bất đẳng thức với một số:*

$$a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c, \forall c$$

Tính chất 1.3. *Quy tắc chuyển vế:* $a < b + c \Longleftrightarrow a - c < b$

Tính chất 1.4. *Quy tắc cộng hai bất đẳng thức:*

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

Chú ý: Không có quy tắc trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 1.5. *Quy tắc nhân hai bất đẳng thức với một số:*

- $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ *nếu* $c > 0$
- $a < b \Leftrightarrow ac > bc$ *nếu* $c < 0$

Tính chất 1.6. *Quy tắc nhân hai bất đẳng thức:* $\begin{cases} 0 \leq a < b \\ 0 \leq c < d \end{cases} \Leftrightarrow ac < bd$
Chú ý: Chir được phép nhân hai bất đẳng thức không âm cùng chiều và không có phép chia hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 1.7. *Với hai số* $a, b > 0$*; n nguyên dương ta có:* $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$

Tính chất 1.8. *Với* $a, b > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ *ta có:* $a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

2 PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2.1 Chứng minh bất đẳng thức dùng định nghĩa

Để chứng minh $A > B$, ta đi chứng minh $A - B$ dương và ngược lại, để chứng minh $A < B$ ta chứng minh $A - B$ âm. Sau đây là các ví dụ:

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.1. Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq |xy|.$$

Lời giải. Xét hiệu $\dfrac{x^2+y^2}{2} - |xy|$, ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2} - |xy| = \frac{x^2+y^2-2|xy|}{2} = \frac{(|x|+|y|)^2}{2} \geq 0.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $|x| = |y|$.
Vậy bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3.$$

Lời giải. Xét hiệu $x^4 + y^4 - (x^3y + xy^3)$, ta có

$$\begin{aligned}
x^4 + y^4 - (x^3y + xy^3) &= (x^4 - x^3y) + (y^4 - xy^3) \\
&= x^3(x-y) + y^3(y-x) \\
&= (x-y)(x^3-y^3) \\
&= (x-y)^2(x^2+xy+y^2) \\
&= (x-y)^2\big[(x+\frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4}\big] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức luôn đúng. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Ví dụ 2.3. Chứng minh rằng với mọi a, b ta luôn có

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

Lời giải. Xét hiệu $S = a^2 + b^2 + 1 - (ab + a + b) = a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b$.
Ta có

$$\begin{aligned}
2S &= 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \\
&= (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \\
&= (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Do đó $S \geq 0$, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-b=0 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1.$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 2.4. Cho các số dương a, b, chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}.$$

Lời giải. Xét hiệu $\sqrt[4]{ab} - \dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{ab} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \sqrt[4]{ab}\Big(1 - \frac{2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Big) \\
&= \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}) \\
&= \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.1. CMR với mọi a, b, c, d, e ta đều có

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Bài tập 2.2. CMR với mọi a, b, c ta luôn có $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^2$.

Bài tập 2.3. CMR với mọi a, b, c ta luôn có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Bài tập 2.4. Cho $a, b, c \geq -1$, chứng minh rằng

$$2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq -abc.$$

Hướng dẫn: Chuyển vế, đưa về dạng

$$(1+a)(1+b)(1+c) + \frac{(a+b+c+1)^2}{2} \geq 0, \text{ (vì } a, b, c \geq -1).$$

Bài tập 2.5. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $b + c \geq 16abc$

Bài tập 2.6. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng $(a + b)(1 + ab) \geq 4ab$.

2.2 Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương BĐT cần chứng minh về một BĐT đã biết hoặc BĐT hiển nhiên đúng. Sau đây là các ví dụ:

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.5. Cho các số không âm a, b, chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Lời giải. Ta có $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

Đây là bất đẳng thức đúng. Từ đó suy ra đpcm

Ví dụ 2.6. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} \geq 0\\ \Leftrightarrow &\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \ \text{ Đúng vì } a, b > 0\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Longleftrightarrow a = b$

Ví dụ 2.7. Chứng minh rằng $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ta có: $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}&a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3\\ \Leftrightarrow &(a^4-a^3b)+(b^4-ab^3) \geq 0\\ \Leftrightarrow &a^3(a-b)+b^3(b-a) \geq 0\\ \Leftrightarrow &(a-b)(a^3-b^3) \geq 0\\ \Leftrightarrow &(a-b)^2\left[(a+\frac{b}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^2\right] \geq 0 \ \text{ (luôn đúng)}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 2.8. Cho các số thực dương a, b, chứng minh rằng

$$\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}&\frac{b\sqrt{b}+a\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}\\ \Leftrightarrow\ &b\sqrt{b}+a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a} \geq 0 \ \text{(do } \sqrt{ab} > 0)\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{a}(a-b)+\sqrt{b}(b-a) \geq 0\\ \Leftrightarrow\ &(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b) \geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng vì $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ và $a-b$ luôn cùng dấu. Vậy BĐT ban đầu đúng. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 2.9. Chứng minh rằng nếu $ab\geq 0$ thì $(a^2-b^2)^2\geq (a-b)^4$.
Lời giải. Ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2(a+b)^2-(a-b)^4\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &(a-b)^2[(a+b)^2-(a-b)^2]\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &4ab(a-b)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $ab\geq 0$, do đó bất đẳng thức ban đầu đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $a=0$ hoặc $b=0$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.7. Chứng minh rằng $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$ ta có $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$

Bài tập 2.8. Chứng minh rằng $\forall a\neq 0$ ta có $|a+\dfrac{1}{a}|\geq 2$.

Bài tập 2.9. Chứng minh rằng $\forall a$ ta có $a^2+\dfrac{1}{4}\geq a$.

Bài tập 2.10. Cho các số a,b,c,x,y thoả mãn $\begin{cases}ax+by=c\\ a^2+b^2>0\end{cases}$

Chứng minh rằng $x^2+y^2\geq\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

Bài tập 2.11. Chứng minh rằng $(a^5+b^5)(a+b)\geq(a^4+b^4)(a^2+b^2)$ với $ab>0$.

2.3 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức $X^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cổ điển nhất là $x^2 \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Ta sẽ nêu ra hai dạng bất đẳng thức áp dụng bất đẳng thức trên.

- Với mọi a, b, ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$$

  Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

- Áp dụng bất đẳng thức trên ba lần cho ba số thực bất kì a, b, c, ta có:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

  Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.10. Cho $a + b \geq 2$. Chứng minh rằng

a. $a^2 + b^2 \geq 2$.

b. $a^2 + b^2 \geq a + b$

Lời giải. Ta có $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$.

a. Mà $a + b \geq 2$, nên ta suy ra ngay $a^2 + b^2 \geq 2$.

b. Từ $a^2+b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2} = (a+b)\dfrac{a+b}{2}$. Mà $a+b \geq 2$, nên ta suy ra ngay $a^2+b^2 \geq a+b$.

Ở câu *b.* chúng ta có thể làm như sau:

Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a$ và $b^2 + 1 \geq 2b$, suy ra $a^2 + b^2 \geq a + b + (a + b - 2) \geq a + b$.

Bình luận Cả hai cách giải của câu *b.* chúng ta đã sử dụng phương pháp tách theo lượng trội như sau: *Để chứng minh* $A \geq B$, có thể làm theo hai cách:

C1. Chứng minh $A \geq B + C$, rồi chứng minh $C \geq 0$.

C2. Chứng minh $A \geq BC$, (giả sử $B > 0$) rồi chứng minh $C \geq 1$.

Vẫn sử dụng ý tưởng tách theo lượng trội như trên, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.11. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{a},\ y = \sqrt{b},\ z = \sqrt{c}$. Ta có $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Ta cần chứng minh

$$x + y + z \geq xy + yz + zx$$

Ta có

$$3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq (x + y + z)\frac{x + y + z}{3} \tag{1}$$

Mặt khác $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \leq 9$, ta được

$$x + y + z \leq 3 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

2.4 Dùng các bất đẳng thức cổ điển để chứng minh bất đẳng thức

2.4.1 Bất đẳng thức Côsi

1. Dạng tổng quát: Cho $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là những số không âm. Khi đó
   - $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
   - Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

2. Trường hợp đặc biệt
   - Với $n = 2$ ta có: $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow a_1 = a_2$
   - Với $n = 3$ ta có: $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.12. Cho $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương $a_1, a_2, \cdots a_n$ và $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \cdots \dfrac{1}{a_n}$ ta được:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}} \qquad (2)$$

Do hai vế của (1) và (2) đều là số dương, nên nhân từng vế của chúng ta có điều phải chứng minh.
Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \cdots = a_n \\ \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} = \cdots = \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

<u>**Bình luận**</u> Bất đẳng thức trên tuy đơn giản, nhưng nó lại có ứng dụng rộng rãi. Người ta thường hay sử dụng hai dạng đặc biệt của nó, đó là:

1. Với $n = 2$

$$(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \qquad (3)$$

2. Với $n = 3$
$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \tag{4}$$
Trong đó a, b, c là những số dương

Các bạn hãy xem các ví dụ 2.13, 2.14 và các bài tập 2.18 trên trang 16, 2.12 trên trang 15, 2.15 trên trang 15 để biết thêm ứng dụng của nó.

Ví dụ 2.13. Cho tam giác ABC, có các cạnh a, b, c và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải. Áp dụng (3 trên trang trước) ta có:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b} \geq \dfrac{4}{(p-a)+(p-b)} = \dfrac{4}{c} \\ \dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c} \geq \dfrac{4}{(p-b)+(p-c)} = \dfrac{4}{a} \\ \dfrac{1}{p-c}+\dfrac{1}{p-a} \geq \dfrac{4}{(p-c)+(p-a)} = \dfrac{4}{b} \end{cases}$$
Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên suy ra:
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều

Ví dụ 2.14. Cho $a, b, c > 0$ và thoả mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{b+3c+2a}+\frac{1}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{6}$$

Lời giải. Áp dụng (3 trên trang ngay trước) ta có:
$$\begin{aligned} \frac{1}{a+3b+2c} = \frac{1}{3b+(a+2c)} &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3b}+\frac{1}{a+2c}\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3b}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)\right] \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{b}+2\frac{1}{3c}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta có
$$\frac{1}{b+3c+2a} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3b}+\frac{1}{c}+2\frac{1}{3a}\right) \tag{2}$$
$$\frac{1}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3c}+\frac{1}{a}+2\frac{1}{3b}\right) \tag{3}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được
$$\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{b+3c+2a}+\frac{1}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mặt khác theo giả thiết, từ $ab+bc+ca=abc$ ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$
Vậy $\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{b+3c+2a}+\frac{1}{c+3a+2b}\leq\frac{1}{6}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$

Ví dụ 2.15. Cho $a,b,c,d\geq 0$, chứng minh rằng

1. $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$
2. $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{d^3}{a^2}\geq a+b+c+d$

Lời giải.

1. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm a^3, a^3, b^3 ta được

$$a^3+a^3+b^3\geq 3\sqrt[3]{a^6b^3}=3a^2b$$

Tương tự ta cũng có:

$$\begin{aligned} b^3+b^3+c^3&\geq 3b^2c\\ c^3+c^3+a^3&\geq 3c^2a\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

2. Làm tương tự

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b^2}+b+b&\geq 3a\\ \frac{b^3}{c^2}+c+c&\geq 3b\\ \frac{c^3}{d^2}+d+d&\geq 3c\\ \frac{d^3}{a^2}+a+a&\geq 3a\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.
Bình luận Các bạn hãy xem thêm các bài tập 2.16 trên trang 16, 2.17 trên trang 16, rồi hãy cho những trường hợp đặc biệt để có những bất đẳng thức "phù hợp" với mục đích của bạn.

Ví dụ 2.16. Cho $a_1,a_2,\cdots,a_n$ là các số không âm. Cho $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ là các số hữu tỉ dương sao cho $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$. Chứng minh rằng

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n\geq a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}$$

Lời giải. Vì $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ là các số hữu tỉ dương, và $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, nên ta có thể viết chúng dưới dạng sau (sau khi đã quy đồng mẫu số các phân số):

$$\alpha_1=\frac{p_1}{N},\alpha_2=\frac{p_2}{N},\cdots\alpha_n=\frac{p_n}{N}$$

Trong đó $p_1, p_2, \cdots p_n, N$ là các số nguyên dương và $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = N$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với p_1 số a_1, p_2 số a_2, ... p_n số a_n, ta có:

$$\frac{\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{p_1 \text{ lần}} + \underbrace{a_2 + \cdots + a_2}_{p_2 \text{ lần}} + \cdots + \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{p_n \text{ lần}}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq \sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{N} a_1 + \frac{p_2}{N} a_2 + \cdots + \frac{p_n}{N} a_n \geq a_1^{\frac{p_1}{N}} a_2^{\frac{p_2}{N}} \cdots a_n^{\frac{p_n}{N}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} \quad \text{(đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Ví dụ 2.17. Cho $a, b, c \geq 0$ và thoả mãn $a + b + c = 9$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{3^{n+1}}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$a + \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n-1 \text{ số}} \geq n\sqrt[n]{a3^{n-1}}$$

$$b + \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n-1 \text{ số}} \geq n\sqrt[n]{b3^{n-1}}$$

$$c + \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n-1 \text{ số}} \geq n\sqrt[n]{c3^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c) + 9(n - 1) \geq n\sqrt[n]{3^{n-1}}\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{3^{n+1}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 3$.

Ví dụ 2.18. Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$(2^x + 2^y + 2^z)\left(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}\right) \leq \frac{81}{8}$$

Lời giải. Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$ suy ra $1 \leq a, b, c \leq 2$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{81}{8}$$

Từ $(a - 1)(a - 2) \leq 0$ ta có $a + \dfrac{2}{a} \leq 3$. Do đó

$$(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 9$$

Mặt khác $\sqrt{(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)} \leq \dfrac{(a + b + c) + 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)}{2}$.

Nên ta có: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \leq \dfrac{81}{8}$ (đpcm)

Ví dụ 2.19. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \geq 1$$

Lời giải. Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$. Ta có

$$(a+b+1)(1-a)(1-b) \leq \left[\frac{(a+b+1)+(1-a)+(1-b)}{3}\right]^3 = 1$$

Nên $(1-a)(1-b) \geq \dfrac{1}{a+b+1}$. Từ đó suy ra

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geq \frac{1-c}{a+b+1}$$

Mặt khác $a \leq b \leq c$ do đó ta có: $\begin{cases} \dfrac{a}{b+c+1} \leq \dfrac{a}{a+b+1} \\ \dfrac{b}{a+c+1} \leq \dfrac{b}{a+b+1} \end{cases}$

Vậy $\dfrac{a}{b+c+1} + \dfrac{b}{a+c+1} + \dfrac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \geq 1$ (đpcm)

Hãy xem bài 2.14 trên trang 15 để biết bất đẳng thức tổng quát của bài toán này.

Ví dụ 2.20. Cho $a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{1+a_1} + \dfrac{1}{1+a_2} + \cdots + \dfrac{1}{1+a_n} = n-1$.

Chứng minh rằng $a_1 a_2 \cdots a_n \leq \dfrac{1}{(n-1)^n}$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{1+a_1} = \left(1 - \frac{1}{1+a_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+a_3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+a_n}\right)$$
$$= \frac{a_2}{1+a_2} + \frac{a_3}{1+a_3} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_n}$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\dfrac{1}{1+a_1} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_2 a_3 \cdots a_n}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}}$

Lí luận tương tự ta có:

$$\frac{1}{1+a_2} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}}$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{1+a_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_3)\cdots(1+a_{n-1})}}$$

Nhân từng vế của n bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{(1-a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \geq (n-1)^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$
$$\Leftrightarrow a_1 a_2 \cdots a_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n-1}$.

Ví dụ 2.21. Cho hai dãy số không âm $a_1, a_2, \cdots a_n; b_1, b_2, \cdots b_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$$

Lời giải. Có hai khả năng xảy ra

1. Nếu $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n) = 0$ thì bất đẳng thức đã cho đúng.

2. Nếu $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n) > 0$ khi đó bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}.\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}.\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}} \leq 1$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}.\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)$$
$$\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}.\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$, ở đây quy ước nếu $b_k = 0$ thì $a_k = 0, \forall k = \overline{1,n}$.

Ví dụ 2.22. Chứng minh rằng

1. Nếu $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $A = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x(\sin x - \cos x)} \geq 4$

2. Nếu $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ thì:

$$\sin^p x \cos^p x \leq \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}} \ \ (p, q \in \mathbb{N}^*)$$

Lời giải.

1. Đặt $t = \text{tg}x$, từ $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $0 < t < 1$. Bài toán trở thành chứng minh $A = \dfrac{t^2}{t-1} \geq 4$ với $0 < t < 1$.

   Ta có $A = t-1+\dfrac{1}{t-1}+2 \geq 2\sqrt{(t-1)(\dfrac{1}{t-1})}+2 = 4$ từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho p số $\dfrac{\sin^2 x}{p}$ và q số $\dfrac{\cos^2 q}{q}$ ta có:

$$\frac{\underbrace{\frac{\sin^2 x}{p}+\cdots+\frac{\sin^2 x}{p}}_{p \text{ số}}+\underbrace{\frac{\cos^2 x}{q}+\cdots+\frac{\cos^2 x}{q}}_{q \text{ số}}}{p+q} \geq \sqrt[p+q]{\frac{\sin^{2p} x}{p^p}\frac{\cos^{2q} x}{q^q}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq (p+q)\sqrt[p+q]{\frac{\sin^{2p} x}{p^p}\frac{\cos^{2q} x}{q^q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p+q)^{p+q}} \geq \frac{\sin^{2p} x}{p^p}\frac{\cos^{2q} x}{q^q}$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2p} x \cos^{2q} x \leq \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^p x \cos^p x \leq \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}} \quad \text{(đpcm)}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.12. Cho các số a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

1. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$
2. $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \geq 2$

Bài tập 2.13. Cho $a, b, c > 0$

1. Nếu $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq \dfrac{1}{64}$
2. $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab} \geq \dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}$

Bài tập 2.14. Cho $0 \leq a_i \leq 1, i=\overline{1,n}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{S-a_1+1}+\frac{a_2}{S-a_2+1}\cdots+\frac{a_n}{S-a_n+1}+(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) \leq 1$$

Ở đó $S = a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Bài tập 2.15. Cho tam giác ABC, O là điểm tuỳ ý trong tam giác, AO, BO, CO kéo dài cắt các cạnh đối diện tại M, N, P. Chứng minh rằng:

$$\frac{AO}{OM}+\frac{BO}{ON}+\frac{CO}{OP} \geq 6$$

Bài tập 2.16. Cho a, b, c là những số không âm, n, k là những số tự nhiên, $n \geq 2, k \geq 1$. Chứng minh rằng

1. $a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$
2. $a^n + b^n + c^n \geq a^{n-2}b^2 + b^{n-2}c^2 + c^{n-2}a^2$
3. $a^n + b^n + c^n \geq a^{n-k}b^k + b^{n-k}c^k + c^{n-k}a^k$

Bài tập 2.17. Cho a, b, c, d là những số dương. Chứng minh rằng

1. $\dfrac{a^2}{b^3} + \dfrac{b^2}{c^3} + \dfrac{c^2}{d^3} + \dfrac{d^2}{a^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$
2. $\dfrac{a^n}{b^{n+1}} + \dfrac{b^n}{c^{n+1}} + \dfrac{c^n}{d^{n+1}} + \dfrac{d^n}{a^{n+1}} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$
3. $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} + \dfrac{b^{n+1}}{c^n} + \dfrac{c^{n+1}}{d^n} + \dfrac{d^{n+1}}{a^n} \geq a + b + c + d$

Bài tập 2.18. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có $h_a + h_b + h_c \geq 9r$, ở đây h_a, h_b, h_c là ba chiều cao của tam giác còn r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Bài tập 2.19. Cho $a, b > 0; x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{b}{x}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{y}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{z}\right)^4 \geq 3(a + 3b)^4$$

Bài tập 2.20. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có $\sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2$.

Bài tập 2.21. Cho m, n là những số tự nhiên sao cho $n > m$. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Bài tập 2.22. Chứng minh rằng

1. $\log_{n+1}(n + 2) < \log_n(n + 1)$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
2. $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n} < \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^{-m}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*, m < n$

Bài tập 2.23. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{a + b + c}{2}$$

Bài tập 2.24. Cho $\alpha, \beta, \gamma > 0$ và thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)} + \frac{\sin \gamma \sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} + \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)} \leq \frac{3}{4}$$

Bài tập 2.25. Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

Bài tập 2.26. Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

Bài tập 2.27. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

2.4.2 Bất đẳng thức Bunhiacopxki

1. Dạng tổng quát: cho hai dãy số $a_1, a_2, \cdots a_n$ và $b_1, b_2, \cdots b_n$. Khi đó ta có
   - $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$
   - Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ quy ước nếu $b_i = 0$ thì $a_i = 0$

2. Trường hợp đặc biệt
   - Với $n = 2$ ta có: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$
   - Với $n = 3$ ta có: $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Bình luận Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacopxki trong trường hợp tổng quát đã được chúng tôi trình bày trong phần *Phương pháp tam thức bậc hai.* Cho nên ở đây chúng tôi không trình bày lại, bạn hãy xem ví dụ 2.37 trên trang 26. Sau đây chúng tôi trình bày ứng dụng của bất đẳng thức Bunhiacopxki trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.23. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $a + 3b + 5c \leq \sqrt{35}$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(1, 3, 5)$ và (a, b, c) ta được:

$$(1^2 + 3^2 + 5^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1.a + 3.b + 5.c)^2$$
$$a + 3b + 5c \leq \sqrt{35}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$

Ví dụ 2.24. Cho $3x-4y=7$. Chứng minh rằng $3x^2+4y^2\geq 7$.
Lời giải. Sử dụng Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned}49=(3x-4y)^2 &\leq ((\sqrt{3})^2+(-2)^2)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}x)-2(2y)\right]^2\\ &\leq (3+4)(3x^2+4y^2)\end{aligned}$$

Vậy $3x^2+4y^2\geq 7$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

Ví dụ 2.25. Cho $\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\\ a,b,c>0\end{cases}$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\geq \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^4}{3}$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2 &\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)\right]^2\\ &\geq \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^4\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}a=?\\ b=?\\ c=?\end{cases}$

Ví dụ 2.26. Cho $\begin{cases}x^2+xy+y^2=16\\ y^2+yz+z^2=3\end{cases}$ chứng minh rằng $xy+yz+zx\leq 8$
Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}(y+\frac{x}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2&=16\\ (y+\frac{z}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2&=3\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\begin{aligned}&(\frac{\sqrt{3}}{2}x)(y+\frac{x}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}z)(y+\frac{z}{2})\\ \leq&\sqrt{\left[(y+\frac{x}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2\right]\left[(y+\frac{z}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2\right]}\\ =&\sqrt{16.3}=4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(xy+\dfrac{zx}{2}+yz+\dfrac{zx}{2}\right)\leq 4\sqrt{3}$
Hay $xy+yz+zx\leq 8$ (đpcm)

Ví dụ 2.27. Cho $a_1, a_2, \cdots a_n; b_1, b_2, \cdots b_n$ là hai dãy số, trong đó $b_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai dãy số:
$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \cdots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$ và $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_1}, \cdots, \sqrt{b_n}$ ta có:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

Ví dụ 2.28. Cho $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số không âm và thoả mãn điều kiện $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 1$. Đặt $S = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_1^3}{S - x_i} \geq \frac{1}{n-1}$$

Lời giải. Đặt $a_i = \sqrt{\frac{x_i^3}{S - x_i}}, b_i = \sqrt{x_i(S - x_i)}\ \ \forall i = \overline{1,n}$ Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{S - x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(S - x_i)\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \tag{1}$$

Do $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(S - x_i) = S^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Nên từ (1) có: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{S - x_i} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}{S^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

Lại theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có: $n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ hay

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq S^2 \tag{2}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một lần nữa ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \geq (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)^2$$

Kết hợp với giả thiết suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 1 \tag{3}$$

Từ (1 trên trang trước), (2 trên trang ngay trước) và (3 trên trang trước) suy ra: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_1^3}{S - x_i} \geq \frac{1}{n-1}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (đpcm)

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.28. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và thoả mãn $x^3 + y^3 = 2$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \leq 2$

Bài tập 2.29. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

Bài tập 2.30. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c+d} + \frac{b+c}{c+d+a} + \frac{c+d}{d+a+b} + \frac{d+a}{a+b+c} \geq \frac{8}{3}$$

Bài tập 2.31. Cho a, b, c, d là các số dương thoả mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$. Chứng minh rằng

$$abcd \leq \frac{1}{81}$$

Bài tập 2.32. Cho $a, b, c, m, n, p > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geq \frac{3}{m+n}$$

Bài tập 2.33. Cho $a, b, c, m, n, p > 0$, thoả mãn $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 1$. Crm

$$m+n+p \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$$

Bài tập 2.34. Cho $a, b > 0$ và thoả mãn $\frac{4}{a} + \frac{9}{b} = 1$. Chứng minh rằng

$$a + b + \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{25}{2}(2+\sqrt{2})$$

Bài tập 2.35. Cho $x \geq y \geq z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Bài tập 2.36. Pháp biểu và chứng minh bài toán tổng quát của bài tập 2.31

Bài tập 2.37. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

Bài tập 2.38. Giả sử x_0 là số thực thoả mãn điều kiện: $x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$$

2.5 Phương pháp phản chứng

Muốn chứng minh một mệnh đề p đúng, ta làm theo các bước như sau:

- Giả sử p sai, tức là $\overline{p}$ đúng.
- Từ $\overline{p}$ đúng dẫn đến điều mâu thuẫn.
- Kết luận p đúng.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Sau đây là các ví dụ minh họa:

Ví dụ 2.29. Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng nếu $a < b$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Lời giải. Giả sử $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$. Khi đó

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \le 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{ab} \le 0 \Leftrightarrow b - a \le 0 \text{ (vì } ab > 0).$$

Suy ra $b \le a$, mâu thuẫn với giả thiết.
Vậy điều giả sử là sai hay $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Ta có đpcm.

Ví dụ 2.30. Chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $|x+y| \le |x| + |y|$.
Lời giải. Giả sử tồn tại x, y sao cho $|x+y| > |x| + |y|$. Vì hai vế đều dương, bình phương lên ta có

$$(x+y)^2 > x^2 + 2|x||y| + y^2 \ge 2xy > 2|x||y|$$

Điều này vô lí. Vậy $|x+y| \le |x| + |y|$.

Ví dụ 2.31. Cho các số không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Lời giải. Giả sử $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Bình phương hai vế không âm, ta được

$$(a+c)(b+d) < ab + cd + 2\sqrt{ab.cd} \Leftrightarrow ad + bc < 2\sqrt{ad.bc}.$$

Điều này vô lí, vì theo BĐT Cauchy thì $ad + bc \ge 2\sqrt{ad.bc}$.
Vậy BĐT ban đầu là đúng.

Ví dụ 2.32. Chứng minh rằng $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}} < \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải. Giả sử $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Bình phương lên ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\Big)^2 \geq \frac{3}{36}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{6+2\sqrt{5}}{25(10-2\sqrt{5})} \geq \frac{1}{12}\\
\Leftrightarrow\ &72+24\sqrt{5} \geq 250-50\sqrt{5}\\
\Leftrightarrow\ &37\sqrt{5} \geq 89\\
\Leftrightarrow\ &6845 \geq 7921 \text{ (vô lí)}.
\end{aligned}$$

Vậy điều giả sử là sai. Ta có đpcm.

Ví dụ 2.33. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, x, y ta có

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2.$$

Lời giải. Giả sử $(a^2+b^2)(x^2+y^2) < (ax+by)^2$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&a^2x^2+a^2y^2+b2x^2+b^2y^2 < a^2x^2+2abxy+b^2y^2\\
\Leftrightarrow\ &a^2y^2-2aybx+b^2x^2 < 0\\
\Leftrightarrow\ &(ay-bx)^2 < 0 \text{ (vô lí)}.
\end{aligned}$$

Vậy điều giả sử là sai. Ta có điêu phải chứng minh.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.39. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a+b=2cd$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai BĐT sau là đúng: $c^2 \geq a; d^2 \geq b$.
Hướng dẫn: Phản chứng, dẫn đến $(c-d)^2 < 0$, vô lí.

Bài tập 2.40. Cho các số a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng ít nhất một trong các BĐT sau là sai: $a(1-b) > \dfrac{1}{4}; b(1-c) > \dfrac{1}{4}; c(1-a) > \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn: Phản chứng, dẫn đến $\begin{cases} a > b \\ b > c \\ c > a \end{cases}$, vô lí.

Bài tập 2.41. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng $a+b+c \geq 3$.
Hướng dẫn: Phản chứng, dẫn đến $a^2b+ab^2+abc < 3ab$, từ đó suy ra $a > 4$.

Bài tập 2.42. Chứng minh rằng nếu $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\text{cotg}\dfrac{x}{2} < 1+\text{cotg}x$.

Hướng dẫn: Phản chứng, dẫn đến $(\text{tg}\dfrac{x}{2}-1)^2 \leq 0$, vô lí.

2.6 Phương pháp quy nạp

Cho n_0 là một số nguyên dương và $P(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Nếu

1. $P(n_0)$ là đúng và
2. Nếu $P(k)$ đúng, thì $P(k+1)$ cũng đúng với mọi số tự nhiên $k \geq n_0$ thì mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.34. Cho n là số nguyên, $n > 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} \tag{1}$$

Lời giải. Ta có $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Nên (1) đúng với $n = 2$
Giả sử (1) đúng với $n = k, (k \geq 2)$, tức là:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k} \tag{2}$$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1} \tag{3}$$

Cộng vào hai vế của (2) với $\frac{1}{(k+1)^2}$ ta được

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Để chứng minh (3) ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1} \\ \Leftrightarrow & 0 < \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} \\ \Leftrightarrow & 0 < \frac{1}{k(k+1)^2} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, tức là (3) đúng. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.35. Cho a, b là hai số tuỳ ý và thoả mãn $a + b \geq 0$. Chứng minh rằng $\forall n$ nguyên dương ta đều có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \tag{1}$$

Lời giải.

- Với $n = 1$ dễ thấy (1 trên trang trước) đúng.
- Giả sử (1 trên trang ngay trước) đúng với số nguyên dương $n = k$, ta có

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k+b^k}{2} \tag{2}$$

- Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ tức là

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \tag{3}$$

Thật vậy, nhân hai vế của (2) với $\dfrac{a+b}{2} \geq 0$ ta được

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^k+b^k}{2}\frac{a+b}{2}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a^k+b^k}{2}\frac{a+b}{2} \geq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\\
\Leftrightarrow& a^{k+1}+a^kb+b^ka+b^{k+1} \leq 2a^{k+1}+2b^{k+1}\\
\Leftrightarrow& a^{k+1}-a^kb-b^ka+b^{k+1} \leq 0\\
\Leftrightarrow& a^k(a-b)-b^k(a-b) \geq 0\\
\Leftrightarrow& (a^k-b^k)(a-b) \geq 0
\end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối cùng đúng, do đó (3) đúng. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$. Và nếu n lẻ thì dấu bằng xảy ra còn thêm trường hợp $a = -b$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.43. Chứng minh rằng $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$

Bài tập 2.44. Chứng minh rằng nếu $a > -1$ và n là số nguyên dương, thì $(1+a)^n \geq 1+na$

Bài tập 2.45. Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ thì

1. $\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$
2. $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Bài tập 2.46. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, α tuỳ ý ta có

$$|\sin n\alpha| \leq n|\sin\alpha|$$

2.7 Phương pháp tam thức bậc hai

Nội dung của phương pháp này là sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai

1. Định lý thuận: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ và $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a, với mọi số thực x
   - Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$
   - Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 giả sử $(x_1 < x_2)$. Thế thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ và $f(x)$ trái dấu với a khi x ở trong khoảng hai nghiệm $(x_1; x_2)$. (Hay nói gọn là "trong trái ngoài cùng")
2. Định lý đảo: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ và một số thức α. Nếu $af(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ và $x_1 < \alpha < x_2$.

Các dạng toán thường gặp:
Dạng 1: Giả sử cần chứng minh $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó ta chứng minh $a > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.
Dạng 2: Giả sử cần chứng minh bất đẳng thức dạng $b^2 - 4ac \leq 0$, khi đó ta lập một tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, rồi biến đổi đưa tam thức này về dạng các tổng bình phương để khẳng định rằng $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.
Dạng 3: Giả sử cần chứng minh bất đẳng thức dạng $b^2 - 4ac \geq 0$, khi đó ta lập một tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, rồi chỉ ra rằng tam thức này có nghiệm bằng cách tìm $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $af(\alpha) \leq 0$ hoặc tìm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.36. Cho tam giác ABC bất kì, A, B, C tương ứng là ba góc của tam giác ứng với ba cạnh a, b, c. Chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$ ta đều có:

$$1 + \frac{x^2}{2} \geq \cos A + x(\cos B + \cos C) \qquad (1)$$

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x(\cos B + \cos C) + 2(1 - \cos A) \geq 0$
Đặt $f(x) = x^2 - 2x(\cos B + \cos C) + 2(1 - \cos A)$ thì $f(x)$ là một tam thức bậc hai của x.
Ta có: hệ số $a = 1 > 0$ và

$$\begin{aligned}\Delta' &= (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A)\\ &= 4\cos^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2}\\ &= 4\sin^2\frac{A}{2}(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1)\\ &= -4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B-C}{2} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Vậy $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.37. Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacôpxki tổng quát. Cho

$$a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$$

là $2n$ số bất kì. Chứng minh rằng:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \tag{2}$$

Lời giải. Nếu $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ thì (2) hiển nhiên đúng.
Xét $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$. Lập tam thức bậc hai:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Ta có $f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2$ suy ra $f(x) \geq 0, \forall x$ nên $f(x)$ phải có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1x - b_1 = a_2x - b_2 = \cdots = a_nx - b_n = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \text{ (quy ước } a_i = 0 \text{ thì } b_i = 0).$$

Ví dụ 2.38. Cho $a \geq 0$ và n là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a} \\ x_2 &= \sqrt{a + \sqrt{a}} \\ &\ldots \\ x_n &= \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}} \end{aligned}$$

Do $a \geq 0$ nên ta có ngay $x_n \geq x_{n-1}$.

1. Nếu $a = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

2. Nếu $a > 0$, khi đó ta có $x_n > x_{n-1}$.
   Mặt khác từ cách đặt ta có $x_n^2 = a + x_{n-1}$.
   Vậy $x_n^2 < a + x_n$ hay $x_n^2 - x_n - a < 0$.
   Xét $f(t) = t^2 - t - a < 0$. Theo trên ta có $f(x_n) < 0$, vậy theo định lí đảo dấu tam thức bậc hai thì tam thức bậc hai $f(t)$ có hai nghiệm $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thoả mãn $t_1 < x_n < t_2$, tức là

$$x_n < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2.39. Các số a, b, c, d, p, q thoả mãn điều kiện: $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(pq - ac - bd)^2 \geq (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện đã cho được viết dưới dạng:

$$(p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) \geq 0 \quad (2)$$

Khi đó, từ (2) ta có

- Hoặc $\begin{cases} p^2 - a^2 - b^2 \leq 0 \\ q^2 - c^2 - d^2 \geq 0 \end{cases}$

- Hoặc $\begin{cases} q^2 - c^2 - d^2 \leq 0 \\ p^2 - a^2 - b^2 \geq 0 \end{cases}$

Do đó bất đẳng thức (1) đúng.
Vì vậy không làm mất tính tổng quát có thể giả sử $p^2 - a^2 - b^2 > 0$. Suy ra $p^2 > a^2 + b^2 \geq 0$ nên $p \neq 0$.
Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2)$$

Suy ra $f(x) = (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$. Với $\alpha = \dfrac{q}{p}$, ta có:

$$f(\alpha) = -\Big((a\alpha - c)^2 + (b\alpha - d)^2\Big)$$

Nên $(p^2 - a^2 - b^2)f(\alpha) \leq 0$. Theo định lí đảo dấu tam thức bậc hai thì tam thức $f(x)$ có nghiệm, từ đó ta được

$$\Delta' = (pq - ac - bd)^2 - (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq 0$$

Hay $(pq - ac - bd)^2 \geq (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2)$ (đpcm)

Ví dụ 2.40. Chứng minh rằng $\forall x, y$ ta đều có

$$(x + y)^2 - xy + 1 \geq \sqrt{3}(x + y)$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} &(x + y)^2 - xy + 1 \geq \sqrt{3}(x + y) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy + 1 \geq x\sqrt{3} + y\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - \sqrt{3})x + y^2 - y\sqrt{3} + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Xét $f(x) = x^2 + (y - \sqrt{3})x + y^2 - y\sqrt{3} + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta'_x &= (y - \sqrt{3})^2 - 4(y^2 - y\sqrt{3} + 1) \\ &= -3y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 \\ &= -(\sqrt{3}y - 1)^2 \leq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mặt khác $f(x)$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0$.
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{9 - \sqrt{3}}{6}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Với cách giải tương tự như những ví dụ trên, ta có có thể giải các bài tập sau:

Bài tập 2.47. Chứng minh rằng $\forall x, y$ ta luôn có:

$$x^2(1+\sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$$

Bài tập 2.48. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\forall x, y, z$ ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$$

Bài tập 2.49. Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 8 \\ xy+yz+zx = 4 \end{cases}$
Chứng minh rằng $-\dfrac{8}{3} \leq x, y, z \leq \dfrac{8}{3}$

Bài tập 2.50. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thoả mãn $\begin{cases} a+b+c+d = 7 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \end{cases}$
Chứng minh rằng $1 \leq a \leq \dfrac{5}{2}$

Bài tập 2.51. Cho x, y, z thoả mãn $\begin{cases} x+y+z = 5 \\ xy+yz+zx = 8 \end{cases}$
Chứng minh rằng $1 \leq x, y, z \leq \dfrac{7}{3}$

Bài tập 2.52. Cho x, y, z thoả mãn $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ xy+yz+zx = 1 \end{cases}$
Chứng minh rằng $-\dfrac{4}{3} \leq x, y, z \leq \dfrac{4}{3}$

Bài tập 2.53. Tìm m để biểu thức sau đây luôn dương

$$P = 9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + mxyz \quad \text{với} \quad x^2+y^2+z^2 \neq 0$$

2.8 Phương pháp đạo hàm

Để giải một bài toán chứng minh bất đẳng thức bằng đạo hàm, thường chúng ta làm theo các bước sau:
✍ Bước 1: Xác định hàm $f(x)$ và miền xác định D của nó.
✍ Bước 2: Xét sự biến thiên của $f(x)$ trên D hoặc trên những đoạn con thích hợp của D.
✍ Bước 3: Từ sự biến thiên của $f(x)$ trên D kết hợp với tính chất của đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra kết luận của bài toán.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dưới đây chúng tôi trình bày một vài ví dụ minh hoạ cho phương pháp:

Ví dụ 2.41. Chứng minh rằng $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$ ta có: $\sin x < x < \text{tg}x$.

Lời giải.
* Trước hết ta sẽ chứng minh $\sin x < x$ (1) $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
✍ Bước 1:
(1) $\Leftrightarrow x - \sin x > 0$
Ta sẽ xét hàm số $f(x) = x - \sin x$, trên miền xác định $[0; \frac{\pi}{2}]$[1].
✍ Bước 2:
Ta có: $f^{'}(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Do đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2}]$
✍ Bước 3:
Vậy với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow x - \sin x > 0 \Leftrightarrow x > \sin x$.
* Chứng minh: $x < \text{tg}x$ (2) $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$
(2) $\Leftrightarrow x - \text{tg}x < 0$.
Xét hàm: $f(x) = x - \text{tg}x$ trên $[0; \frac{\pi}{2}]$.
Ta có $f^{'}(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \leq 0$ $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, do đó $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0; \frac{\pi}{2}]$
Vậy với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, $f(x) < f(0) \Leftrightarrow x - \text{tg}x < 0 \Leftrightarrow x < \text{tg}x$.

Ví dụ 2.42. Chứng minh rằng: $x^4 + (1-x)^4 \geq \frac{1}{8}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:
Xét hàm số: $f(x) = x^4 + (1-x)^4$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có:
* $f^{'}(x) = 4\left[x^3 - (1-x)^3\right]$.
* $f^{'}(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > (1-x)^3 \Leftrightarrow x > 1 - x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.
Bảng biến thiên của $f(x)$:

[1] Chúng ta phải xét $[0; \frac{\pi}{2}]$, chứ không xét $(0; \frac{\pi}{2})$ để còn tồn tại $f(0)$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & - & 0 & + & \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
f(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & \frac{1}{8} & &
\end{array}$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x) \geq \frac{1}{8}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy, $x^4 + (1-x)^4 \geq \frac{1}{8}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.43. Cho $x > y > 0$: Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$$

Lời giải.
✍ Bước 1:
Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \\
&\Leftrightarrow \ln x - \ln y > 2\frac{x-y}{x+y} \qquad (\text{do } x > y > 0) \\
&\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y} > 2.\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1} \\
&\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y} - 2.\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1} > 0 \ \ (1)
\end{aligned}$$

Nếu đặt $t = \frac{x}{y} > 1$ thì (1) có dạng: $f(t) = \ln t - 2.\frac{t-1}{t+1} > 0$ (2).
✍ Bước 2:
Xét hàm số: $f(t) = \ln t - 2.\frac{t-1}{t+1}$ với $t \geq 1$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{1}{t} - 2.\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2} \\
&= \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0, \ \ \forall t \geq 1.
\end{aligned}$$

Do đó hàm $f(t)$ luôn đồng biến trên $[1; +\infty)$.
✍ Bước 3:
Suy ra $f(t) > f(1) = 0$. Vậy, (2) đúng, từ đó suy ra (đ.p.c.m)

Chú ý:
☞ Khi sử dụng phương pháp đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức thì chúng ta phải đi

khảo sát sự biến thiên của một hàm f nào đó. Vì vậy chúng ta cần chú ý đến mấy điểm sau:
❶ Phải xác định đúng hàm f và tìm đúng miền xác định D.
❷ Việc xác định dấu của f' có thể tiến hành theo các cách sau:
 ⋆ Tìm các điểm tới hạn của hàm số f, rồi lập bảng xét dấu của f'.
 ⋆ Giải bất phương trình trên miền D.
 ⋆ Nếu không tìm được các điểm tới hạn của hàm số f thì ta tính f'' rồi từ dấu của f'' xác định được các khoảng đơn điệu của f'. Từ đó xác định được dấu của f' (xem ví dụ 2.45).
❸ Việc xác định hàm số f có thể theo nhiều hướng nhau, không có một quy tắc nào cho phép xác định các hàm f. Một số bài thì hàm f có thể nhìn thấy ngay từ đề bài (xem các ví dụ 2.41 trên trang 29, 2.42 trên trang 29), một sô thì phải biến đổi khéo mới được hàm f hợp lý (?). Nhìn chung để tìm được hàm f thích hợp thì chúng ta cần hướng dẫn học sinh nghiên cứu kĩ đề bài, ví dụ 2.46 trên trang tiếp là một ví dụ về việc xác định hàm f cho thích hợp.

Ví dụ 2.44. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2007} < \ln\frac{2007}{2006} < \frac{1}{2006}$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1}{2007} < \ln 2007 - \ln 2006 < \frac{1}{2006}$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$, với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall x > 0$.
Do đó theo định lí Lagrange thì $\forall 0 < a < b$ đều tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho:

$$\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$$

Đặc biệt với $a = 2006, b = 2007$ suy ra $\exists c \in (2006; 2007)$ sao cho

$$\ln 2007 - \ln 2006 = \frac{1}{c}$$

Vậy $\dfrac{1}{2007} < \dfrac{1}{c} = \ln 2007 - \ln 2006 < \dfrac{1}{2006}$

Chú ý: Định lí Lagrange
Nếu $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ thì với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ đều tồn tại x_0 nằm giữa x_1, x_2 sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ví dụ 2.45. Cho $x > 0$, chứng minh rằng: $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$.

Lời giải. Xét hàm $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

$f"(x) = -\sin x + x \geq 0,\ \forall x \geq 0$ (chứng minh điều này tương tự như ví dụ 2.41 trên trang 29).
Suy ra $f'(x)$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$ $\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0, \forall x \geq 0$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ $\Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x, \forall x > 0$.

Ví dụ 2.46. Chứng minh rằng $\forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$ ta có $3x - x^3 < \dfrac{2}{\sin 2x}$.
Lời giải. Xét 2 hàm số sau: $f(x) = 3x - x^3$ và $g(x) = \dfrac{2}{\sin 2x}$ trên $(0;\dfrac{\pi}{2})$.
Ta có: $f'(x) = 3 - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	-1	0		1		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\searrow$	2	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $f(x) \leq 2,\ \forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$ (1).
Mặt khác ta lại có $0 < \sin 2x \leq 1,\ \forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{2}{\sin 2x} \geq 2$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $f(x) \leq 2 \leq g(x),\ \forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$.
Dấu $'='$ xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu $'='$ ở (1) và (2) có nghĩa là:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \text{điều này là vô lý}$$

Vậy $f(x) < g(x),\ \forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$ hay $3x - x^3 < \dfrac{2}{\sin 2x}$.
☺ Lời bình:
Trong ví dụ này, nếu chúng ta xét hàm số $f(x) = 3x - x^3 - \dfrac{2}{\sin 2x}$ trên miền $(0;\dfrac{\pi}{2})$ thì về nguyên tắc là vẫn được. Nhưng thực tế việc xét dấu của $f'(x) = 3 - 3x^2 + 4\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$ trên $(0;\dfrac{\pi}{2})$ là rất khó khăn. Vì, $f'(x)$ có chứa cả biểu thức lượng giác và biểu thức đại số.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.54. Chứng minh rằng $\forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$ ta có:
⓪ $\sin x > \dfrac{2x}{\pi}$.
① $2^{\sin x} + 2^{\text{tg} x} > 2^{x+1}$.

② $x.\sin x + \cos x > 1$.

③ $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$.

④ $\text{tg}x - \sin x > \dfrac{x^3}{2}$.

Bài tập 2.55. Cho $0 < x \neq y < 1$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4$$

Bài tập 2.56. cho $0 < x \neq 1$ chứng minh rằng: $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Bài tập 2.57. Cho $x > 0$ chứng minh rằng:

❶ $\ln x < \sqrt{x}$

❷ $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x} + \ln x$

Bài tập 2.58. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây luôn đúng với $x \in [0;1]$

a) $1 - x < e^{-x} < 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

b) $1 - x < \dfrac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \dfrac{x^4}{2(1+x)}$

Bài tập 2.59. Chứng minh với $x > 0$ và với mọi số nguyên dương n ta đều có:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Bài tập 2.60. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$ ta có $n^{n+1} > (n+1)^n$

Bài tập 2.61. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để:

$$x^4 + px^3 + q \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{là} \quad 256q \geq 27p^4.$$

Bài tập 2.62. Chứng minh rằng $\forall x$ ta có:

$$\sqrt{17} \leq \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 6} + \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 3} \leq \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

Bài tập 2.63. Cho x, y thoả mãn hệ: $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \leq 2$

Bài tập 2.64. Cho $0 \leq x, y, z < 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài tập 2.65. Chứng minh rằng nếu $x \geq 0$ và $\alpha > 1$ thì $x^\alpha + \alpha - 1 > \alpha x$. Từ đó chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Bài tập 2.66. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α, β, γ tương ứng là các góc của đường chéo $B'D$ của hình hộp tạo với các cạnh $B'B, B'A, B'C'$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\text{cotg}\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\text{cotg}\beta}{\sin\beta} + \frac{\text{cotg}\gamma}{\sin\gamma} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Hướng dẫn: Đặt $x = \cos\alpha; y = \cos\beta; z = \cos\gamma$. Khi đó ta có $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Áp dụng kết quả của bài tập 2.64 trên trang ngay trước ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài tập 2.67. Không dùng bảng số hay máy tính cá nhân hãy chứng minh rằng:

❶ $4\text{tg}5^\circ\text{tg}9^\circ < 3\text{tg}6^\circ\text{tg}10^\circ$

❷ $\text{tg}55^\circ > 1,4$

❸ $\dfrac{1}{3} < \sin 20^\circ < \dfrac{7}{20}$

Bài tập 2.68. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

Bài tập 2.69. Cho $a > b > c > 0$, chứng minh rằng:

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 > a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3$$

Bài tập 2.70. Cho các số dương a, b, c chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Bài tập 2.71. Cho $a, b, c > 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4+b^4+c^4)}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 2$$

2.9 Phương pháp hình học, toạ độ, véctơ

Khi sử dụng nhóm phương pháp này để giải bài toán chứng minh bất đẳng thức chúng ta thường vận dụng các kiến thức cơ bản sau:

1. Trong tất cả các đường gấp khúc nối hai điểm A, B cho trước, thì đường thẳng nối A, B là đường có độ dài bé nhất.

2. Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh luôn luôn lớn hơn độ dài cạnh thứ ba.

3. Cho M ở ngoài một đường thẳng Δ cho trước. Khi đó độ dài đường vuông góc kẻ từ M xuống Δ, ngắn hơn mọi đường xiên kẻ từ M xuống cùng đường thẳng ấy.

4. Trong các tam giác cùng nội tiếp đường tròn, thì tam giác đều có chu vi và diện tích lớn nhất.

   Với các véctơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ ta có:

5. $|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \geq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$, dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$[2]

6. $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| \geq ||\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}||$, dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$

7. $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} \leq |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$, dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$

Chú ý. Nếu ta gắn với toạ độ, giả sử $\overrightarrow{a}(x_1; y_1)$, $\overrightarrow{b}(x_2; y_2)$ (trong không gian ta xét tương tự), ta sẽ được các bất đẳng thức sau:

- $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2)}$, dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$, điều này tương đương với $\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \end{cases} \quad (k > 0)$. Bất đẳng thức này có thể mở rộng cho nhiều vectơ.

- $x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, dấu bằng xảy ra $\Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$, điều này tương đương với $\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \end{cases} \quad (k > 0)$.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.47. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$

Lời giải. Ta có

$$\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{(a - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \geq 2$$

[2] kí hiệu này nghĩa là hai vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ cùng phương

Đặt $\overrightarrow{u} = (a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{v} = (-a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ ta có:

- $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(a + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$
- $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(a - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$
- $|\overrightarrow{u + v}| = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u + v}| = 2$ đây là một bất đẳng thức đúng, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a + \frac{1}{2}}{-a + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow a = 0$

Ví dụ 2.48. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + y^2 + xy} + \sqrt{y^2 + z^2 + yz} + \sqrt{x^2 + z^2 + xz} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{(x + \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2} + \sqrt{(y + \frac{z}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2} + \sqrt{(z + \frac{x}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$$

Đặt

- $\overrightarrow{u} = (x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}y)$. Suy ra $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(x + \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2}$
- $\overrightarrow{v} = (y + \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z)$. Suy ra $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(y + \frac{z}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2}$
- $\overrightarrow{w} = (z + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}x)$. Suy ra $|\overrightarrow{w}| = \sqrt{(z + \frac{x}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2}$

Ta có $|\overrightarrow{u + v + w}| = \sqrt{3}(x + y + z)$ Mặt khác ta luôn có $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}| \geq |\overrightarrow{u + v + w}|$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.49. Cho 4 số thực a, b, c, d thoả mãn $\begin{cases} a + 2b = 9 \\ c + 2d = 4 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \sqrt{a^2 - 12a + b^2 - 8b + 52} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd} + \sqrt{c^2 + d^2 - 4c + 8d + 20}$$

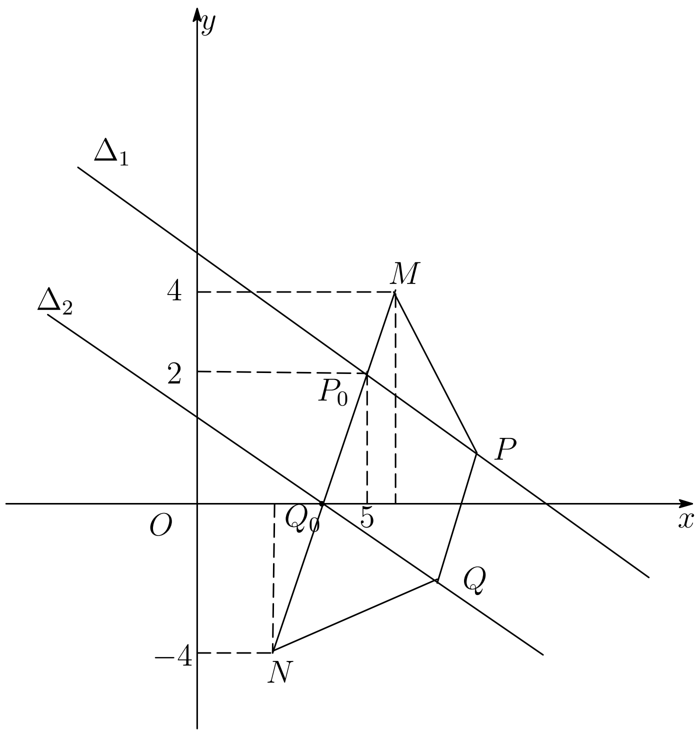
Lời giải. Ta có

$$T = \sqrt{(a - 6)^2 + (b - 4)^2} + \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} + \sqrt{(c - 2)^2 + (d + 4)^2}$$

Trong mặt phẳng Oxy xét hai đường thẳng

$$\Delta_1 : x + 2y - 9 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : x + 2y - 4 = 0$$

Xét hai điểm cố định $M(6; 4), N(2; -4)$ và hai điểm di động $P(a, b) \in \Delta_1, Q(c; d) \in \Delta_2$



Ta có $T = MP + PQ + QN \geq MN = 4\sqrt{5}$. Suy ra $T_{min} = 4\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, N, P, Q thẳng hàng. Hay $\begin{cases} P \equiv P_0(5;2) \\ Q \equiv Q_0(4;0) \end{cases}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.72. Cho điểm $A(2;3)$, tìm hai điểm B, C trên Ox sao cho $BC = 6$ và $AB + AC$ nhỏ nhất

Bài tập 2.73. Cho a, b, c, d thoả mãn $\begin{cases} a^2 + b^2 + 1 = 2a + 4b \\ 3c + 4d + 4 = 0 \end{cases}$ Chứng minh rằng

$$c^2 + d^2 - 2ac - 2bd + 2a + 4b \geq 2$$

Bài tập 2.74. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq 3$$

Bài tập 2.75. Giả sử hệ $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \leq 8$$

Bài tập 2.76. Chứng minh rằng $\forall x, y$ ta đều có

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

Bài tập 2.77. Chứng minh rằng

1. $\sqrt{x^2+4y^2+6x+9} + \sqrt{x^2+4y^2-2x-12y+10} \geq 5, \ \ \forall x, y$
2. $\sqrt{9+x^2-3x\sqrt{2}} + \sqrt{16+x^2-4x\sqrt{2}} \geq 5$

Bài tập 2.78. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} + |y-2|$$

Bài tập 2.79. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

2.10 Phương pháp miền giá trị

Chúng xét hai bài toán sau:
Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có của biểu thức $P = f(x)$ với $x \in D$.[3]
Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có của biểu thức $P = f(x, y)$ [4] với $x, y \in D$.

Phương pháp làm dạng toán này như sau: Trước hết tìm điều kiện của P [5] để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} f(x) = P \\ x \in D \end{cases} \quad \text{(đối với bài toán 1) và} \begin{cases} f(x, y) = P \\ x, y \in D \end{cases} \quad \text{(đối với bài toán 2).}$$

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.50. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$$

Lời giải. Ta có $\sin x - 2\cos x + 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $P = \dfrac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$, thì phương trình sau có nghiệm

$$\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = P$$

Tương đương với phương trình sau có nghiệm

$$(2 - P)\sin x + (2P + 1)\cos x = 3P - 1$$

Điều này tương đương với $(2 - P)^2 + (2P + 1)^2 \geq (3P - 1)^2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq P \leq 2$ Vậy GTNN của P là $-\dfrac{1}{2}$ và GTLN của P là 2.

Ví dụ 2.51. Cho $x, y \geq 0$ và $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$. Tìm GTLN, GTNN của

$$m = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy}$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ P = \sqrt{xy} \end{cases}$. Điều kiện là $\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S, P \geq 0 \end{cases}$.
Hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} S^2 - 2P = S + P \\ S - P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^2 - S}{3} \\ -S^2 + 4S = 3m \ (*) \end{cases}$$

---

[3] Điều kiện D ở đây không nhất thiết là đoạn hay khoảng mà là một ràng buộc cho trước của x, y
[4] Để đơn giản ta chỉ xét biểu thức hai biến
[5] Coi P là tham số

Vì $\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S, P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 \geq 4\dfrac{S^2 - S}{3} \\ \dfrac{S^2 - S}{3} \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ 1 \leq S \leq 4 \end{array} \right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (∗) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} S = 0 \\ 1 \leq S \leq 4 \end{array} \right.$. Giải ra ta được $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

Kết luận $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. Vậy GTNN của m là 0 và GTLN của m là $\frac{4}{3}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.80. Cho x, y thoả mãn $\sqrt{x-4} + \sqrt{y-1} = 4$. Tìm GTLN, GTNN của

$$A = xy - 3y$$

Bài tập 2.81. Cho $x, y \neq 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 = x^2y + xy^2$. Tìm GTLN, GTNN của

$$A = \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$$

Bài tập 2.82. Cho $x, y \neq 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 - xy = xy(x+y)$. Tìm GTLN của

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

Bài tập 2.83. Cho x, y thoả mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$A = x^2 - xy + 2y^2$$

2.11 Các phương pháp khác

2.11.1 Phương pháp làm trội

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.52. Chứng minh rằng $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+n}\\
&\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+n}\\
&\cdots\\
&\frac{1}{n+n-1}>\frac{1}{n+n}\\
&\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n+n}
\end{aligned}$$

Cộng các BĐT theo vế, ta được

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}.$$

Ta có đpcm.

Ví dụ 2.53. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ta có

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1^2}=1\\
&\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}\\
&\cdots\\
&\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế các BĐT ta có

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

Ta có đpcm.

Ví dụ 2.54. Chứng minh rằng: $\forall n > 2, n \in N$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\cdots\\
&\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế các BĐT ta có: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\sqrt{n} = \sqrt{n}.$
Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.55. Chứng minh rằng: $\forall n > 2, n \in N^*$ ta có:

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2...n} < 2.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
\frac{1}{1.2} &= 1 - \frac{1}{2}\\
\frac{1}{1.2.3} &= \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\\
\frac{1}{1.2.3.4} &< \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\\
&\cdots\\
\frac{1}{1.2...n} &< \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế ta có

$$VT < 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ta có điều phải chứng minh.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.84. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{5}{4}.$$

Hướng dẫn: Sử dụng $\dfrac{1}{(2k+1)^2} < \dfrac{1}{4k(k+1)} = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\Big)$.

Bài tập 2.85. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta đều có

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < 1.$$

Hướng dẫn: Sử dụng $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n}$.

Bài tập 2.86. Chứng minh rằng với mọi số tụ nhiên n ta đều có

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Hướng dẫn: Hỏi Trịnh Văn Vân K53D.

Bài tập 2.87. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta đều có

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n-1}.$$

Hướng dẫn: Như bài trước.

2.11.2 Phương pháp lượng giác

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1: Sử dụng điều kiện của biến $|x| \leq k, k > 0$ đặt

$$x = k\sin\alpha, \alpha \in \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big] \text{ hoặc } x = k\cos\alpha, \alpha \in [0; \pi].$$

Ví dụ 2.56. Chứng minh rằng $|3\sqrt{9-a^2} + 4a| \leq 45$.

Lời giải. Điều kiện: $|a| \le 3$. Đặt $a = 3\sin\alpha, \alpha \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]$. Khi đó

$$\begin{aligned}|3\sqrt{9-a^2}+4a| &= |3.3\cos\alpha + 4.3\sin\alpha|\\ &= 3|3\cos\alpha + 4\sin\alpha|\\ &= 15|\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha|\\ &= 15|\cos\alpha - \beta| \text{ (với } \cos\beta = \frac{3}{5}, \sin\beta = \frac{4}{5}, \beta \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big])\\ &\le 15.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.57. Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ và n là số nguyên dương $n \ge 2$ thì

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

Lời giải. Điều kiện: $|x| < 1$. Đặt $x = \cos\alpha, \alpha \ne k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó

$$\begin{aligned}(1-x)^n + (1+x)^n &= (1-\cos\alpha)^n + (1+\cos\alpha)^n\\ &= \Big(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big)^n + \Big(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big)^n\\ &= 2^n\Big(\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\Big)\\ &\le 2^n\Big(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\Big) \text{ (vì } n \ge 2)\\ &= 2^n.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dạng 2: Các biến x, y của bài toán có điều kiện $x^2 + y^2 = k^2, k > 0$.
Khi đó ta đặt $\begin{cases} x = k\sin\alpha \\ y = k\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$

Ví dụ 2.58. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{4} \le x^6 + y^6 \le 1$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$, ta có

$$\begin{aligned}x^6 + y^6 &= \sin^6\alpha + \cos^6\alpha\\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)\\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.\end{aligned}$$

Mặt khác vì $0 \le \sin^2 2\alpha \le 1$ nên $\dfrac{1}{4} \le 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha \le 1$.
Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.59. Chứng minh rằng nếu $a+b=2$ thì $a^4+b^4 \geq a^3+b^3$.
Lời giải. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $ab<0$, không mất tính tổng quát, giả sử $b<0$. Từ đo suy ra $a>2$ và

$$\begin{cases} a^4 > a^3 \\ b^4 > b^3 \end{cases} \Rightarrow a^4+b^4 > a^3+b^3.$$

- Nếu $ab \geq 0$, từ $a+b=2$ ta đặt $\begin{cases} a = 2\sin^2\alpha \\ b = 2\cos^2\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0;2\pi]$. Khi đó

$$\begin{aligned} a^4+b^4 \geq a^3+b^3 &\Leftrightarrow 16\sin^8\alpha+16\cos^8\alpha \geq 8\sin^6\alpha+8\cos^6\alpha \\ &\Leftrightarrow 8\sin^6\alpha(2\sin^2\alpha-1)+8\cos^6\alpha(2\cos^2\alpha-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 8\cos 2\alpha(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 8\cos^2 2\alpha(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha) \geq 0 \end{aligned}$$

BĐT cuối đúng. Vậy $a^4+b^4 \geq a^3+b^3$.

Dạng 3: Sử dụng điều kiện $|x| \geq k, k>0$ đặt $x=\dfrac{k}{\cos\alpha}, \alpha \in \big[0;\dfrac{\pi}{2}\big) \cup \big[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\big]$.

Ví dụ 2.60. Cho $|a| \geq 1$. Chứng minh rằng $-2 \leq \dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a} \leq 2$.
Lời giải. Đặt $a=\dfrac{1}{\cos\alpha}, \alpha \in \big[0;\dfrac{\pi}{2}\big) \cup \big[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\big]$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a} &= \frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\sqrt{3}}{\dfrac{1}{\cos\alpha}} \\ &= \cos\alpha(\text{tg}\alpha+\sqrt{3}) \\ &= \sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha \\ &= 2\cos(\alpha-\frac{\pi}{6}). \end{aligned}$$

Do đó $-2 \leq \dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a} \leq 2$. Ta có đpcm.

Dạng 4: Bài toán có biểu thức dạng x^2+k^2, đặt $x=k\text{tg}\alpha, \alpha \in \big(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\big)$.

Ví dụ 2.61. Chứng minh rằng $|1+ab| \geq \sqrt{a^2+1}.\sqrt{b^2+1}$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = \text{tg}\alpha \\ b = \text{tg}\beta \end{cases}$ với $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} |1+ab| &= |1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta| \\ &= \left|\frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right| \\ &= \left|\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right| \\ &\le \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}.\sqrt{1+\text{tg}^2\beta} \\ &= \sqrt{a^2+1}.\sqrt{b^2+1}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.62. Chứng minh rằng với mọi a, b ta có $-\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = \text{tg}\alpha \\ b = \text{tg}\beta \end{cases}$ với $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} &= \frac{(\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)(1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta)}{(1+\text{tg}^2\alpha)(1+\text{tg}^2\beta)} \\ &= \cos^2\alpha.\cos^2\beta(\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)(1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta) \\ &= \sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha+\beta) \\ &= \frac{1}{2}\sin[2(\alpha+\beta)] \\ &\le \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 2.88. Cho a, b, c, d thỏa mãn $a = c\sqrt{1-d^2}, b = d\sqrt{1-c^2}$. Chứng minh rằng $|a| + |b| \le 1$.
Hướng dẫn: Đặt $|d| = \cos\alpha; |c| = \cos\alpha$.

Bài tập 2.89. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác vuông, cạnh huyền c. Các số thực x, y, z thoả mãn $ax + by = cz$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \ge z^2$.
Hướng dẫn: Từ $ax + by = cz$ suy ra $\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y = z$.
Chú ý rằng $\sin A = \frac{a}{c}; \cos A = \frac{b}{c}$. Xét các trường hợp x, y đồng thời bằng 0 và không đồng thời bằng 0.

Bài tập 2.90. Chứng minh rằng $4ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+(2a^2-1)(2b^2-1)\leq 1$, với $|b|\leq 1$.
Hướng dẫn: Đặt $a=\cos\alpha; b=\cos\beta$.

Bài tập 2.91. Cho các số dương a,b,c thoả mãn $a+b=c$.
Chứng minh rằng $a^{3/4}+b^{3/4}>c^{3/4}$.
Hướng dẫn: Từ $a+b=c$ suy ra $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$. Đặt $\sin^2\alpha=\frac{a}{c};\cos^2\alpha=\frac{b}{c}$.

Bài tập 2.92. Cho $4x^2+9y^2=25$. Chứng minh rằng $|6x+12y|\leq 25$.
Hướng dẫn: Từ $4x^2+9y^2=25$ suy ra $\big(\frac{2x}{5}\big)^2+\big(\frac{3y}{5}\big)^2=1$.
Đặt $\sin\alpha=\frac{2x}{5};\cos\alpha=\frac{3y}{5}$.

Bài tập 2.93. Chứng minh rằng với mọi $n\geq 2$ và với mọi a ta có

$$-(1+a^2)^n\leq (2a)^n+(1-a^2)^n\leq (1=a^2)^n.$$

Hướng dẫn: Viết BĐT dưới dạng

$$-1\leq \Big(\frac{2a}{1+a^2}\Big)^n+\Big(\frac{1-a^2}{1+a^2}\Big)^n\leq 1.$$

Đặt $a=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, -\pi<\alpha<\pi$.

Bài tập 2.94. Cho x,y,z thoả mãn $\begin{cases}0<x,y,z<1\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn: Đặt $x=\mathrm{tg}\alpha; y=\mathrm{tg}\beta; z=\mathrm{tg}\gamma, 0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{4}$. Đưa về

$$\frac{\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}2\beta}{1-\mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}2\beta}=-\mathrm{tg}2\gamma.$$

Bài tập 2.95. Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2-2x-4y+4=0$. Chứng minh rằng

$$x^2-y^2+2\sqrt{3}xy-2(1+2\sqrt{3})x+(4-2\sqrt{3})y-3+4\sqrt{3}\geq 1.$$

Bài tập 2.96. Cho $x^2+y^2=u^2+v^2=1$. Chứng minh rằng

$$|x(u-v)+y(u+v)|\leq\sqrt{2}.$$

3 ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

3.1 Giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 3.1. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}$

Lời giải. ✍ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai bộ số:

$$(1;1) \text{ và } (\sqrt{x-1};\sqrt{5-x})$$

ta được:

$$\begin{aligned}
&(1^2+1^2)\left[(\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{5-x})^2\right] \geq \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}\right)^2\\
\Leftrightarrow &2(x-1+5-x) \geq \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}\right)^2\\
\Leftrightarrow &\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}\right)^2 \leq 8\\
\Leftrightarrow &\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x} \leq 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x-1}}{1}=\frac{\sqrt{5-x}}{1}\\
\Leftrightarrow &x-1=5-x\\
\Leftrightarrow &x=3
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 3.2. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=2 \quad (1)$$

Lời giải. Do: $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2+x+1>0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

nên tập xác định của phương trình là: $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải 1:

✍ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương:

$$\sqrt{x^2+x+1},\ \sqrt{x^2-x+1}$$

ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1} &\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{x^2-x+1}}\\ &= 2\sqrt{\sqrt{[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]}}\\ &= 2\sqrt{\sqrt{x^4+x^2+1}}\\ &= 2\sqrt[4]{x^4+x^2+1}\\ &\geq 2\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\\ \sqrt[4]{x^4+x^2+1}=1\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$

Lời giải 2:

✍ Chọn hai véctơ

$$\overrightarrow{u}=(-x+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ và } \overrightarrow{v}=(x+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Ta có:

- $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$
- $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$
- $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=2$

Khi đó phương trình (2) có dạng: $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$ (3)

Nhưng (3) xảy ra nếu và chỉ nếu

$$\begin{cases}\overrightarrow{u}=k.\overrightarrow{v}\\ k\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(-x+\frac{1}{2})=k.(x+\frac{1}{2})\\ \frac{\sqrt{3}}{2}=k.\frac{\sqrt{3}}{2}\\ k\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\ x=0\end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$

Lời giải 3:

✍ Viết lại phương trình (1) dưới dạng tương đương sau:

$$\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=2 \quad (2)$$

Trong mặt phẳng toạ độ Đềcác vuông góc xOy chọn ba điểm

$$A(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}),\quad B(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}),\quad M(x;0)$$

Ta có:

- $AM=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$
- $BM=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$
- $AB=2$

Do đó (2) trở thành:

$$AM+BM=AB\Leftrightarrow M,A,B\ \text{ thẳng hàng}$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng AB là:

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{1}=\frac{y+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$$

Vì M,A,B thẳng hàng nên toạ độ của M phải thoả mãn phương trình đường thẳng AB, từ đó tìm được $x=0$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.
Bình luận Trên đây là ba cách giải đại diện cho ba hướng đánh giá khác nhau của một "đối tượng". (với bài toán trên, bạn đọc có thể tìm hiểu trong [**?**] để biết thêm một số cách giải thú vị khác) Trong ứng dụng của bất đẳng thức để giải phương trình, bất phương trình, tuỳ thuộc vào từng đối tượng cần đánh giá mà ta chọn hình thức tương ứng, có thể là dùng trực tiếp một bất đẳng thức quen thuộc nào đó; dùng đạo hàm, khảo sát hàm số; cũng có thể dùng hình học, véctơ, toạ độ,...

Ví dụ 3.3. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}\ (2)$$

Lời giải. Phương trình (2) được viết dưới dạng tương đương sau:

$$\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}\ (2.1)$$

+) Tập xác định: $x\in\mathbb{R}$
+) Đặt: $\overrightarrow{u}=(1-x;2)$, $\overrightarrow{v}=(x+1;3)$ ta có:
◆ $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{(1-x)^2+2^2}$
◆ $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{(x+1)^2+3^2}$
◆ $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=\sqrt{29}$

Khi đó phương trình (2.1) có dạng: $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$ (2.2)
Nhưng (2.2) xảy ra nếu và chỉ nếu

$$\begin{cases}\overrightarrow{u}=k.\overrightarrow{v}\\ k\geq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)=k.(x+1)\\ 2=k.3\\ k\geq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\\ x=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{5}$

Ví dụ 3.4. Giải phương trình: $3^x+4^x=5^x$ (3)
Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1 \quad (3.1)$$

Dễ thấy $x=2$ là một nghiệm của (3.1), ta sẽ chứng minh nó là nghiệm duy nhất.
Chú ý rằng hàm số $y=a^x$ nghịch biến khi $0<a<1$
$\ast$ Với $x>2$ ta có:

$$\begin{cases}(\frac{3}{5})^x<(\frac{3}{5})^2\\ (\frac{4}{5})^x<(\frac{4}{5})^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x<(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$$
$$\Rightarrow x>2 \text{ không là nghiệm}$$

$\ast$ Với $x<2$ ta có:

$$\begin{cases}(\frac{3}{5})^x>(\frac{3}{5})^2\\ (\frac{4}{5})^x>(\frac{4}{5})^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x>(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$$
$$\Rightarrow x<2 \text{ không là nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

Ví dụ 3.5. Giải phương trình: $(x-1)^{2006}+(x-2)^{2006}=1$ (7)

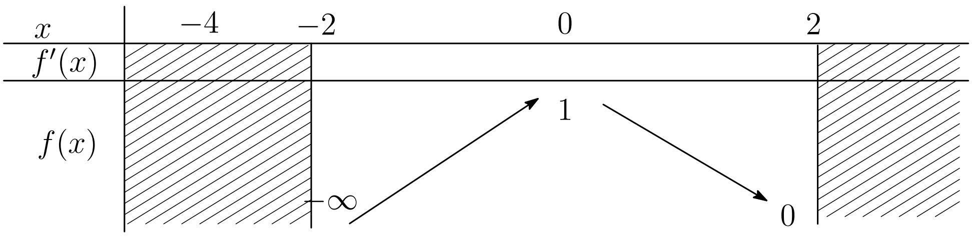
Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
&(x-1)^{2006}+(x-2)^{2006}=1\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}(x-1)^{2006}=1-(x-2)^{2006}\leq 1\\(x-2)^{2006}=1-(x-1)^{2006}\leq 1\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}(x-1)^{2}\leq 1\\(x-2)^{2}\leq 1\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}0\leq x\leq 2\\1\leq x\leq 3\end{cases}\\
\Leftrightarrow&1\leq x\leq 2
\end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(x)=(x-1)^{2006}+(x-2)^{2006}$ trên đoạn $[1;2]$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2006\Big((x-1)^{2005}+(x-2)^{2005}\Big)\\
f'(x)=0&\Leftrightarrow(x-1)^{2005}+(x-2)^{2005}=0\\
&\Leftrightarrow(x-1)^{2005}=-(x-2)^{2005}\\
&\Leftrightarrow x-1=-(x-2)\\
&\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Bảng biến thiên của $f(x)$:



Từ bảng biến thiên ta có $f(x)\leq 1\ \ \forall x\in[1;2]$
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=1\vee x=2$
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1=1,x_2=2$.

Ví dụ 3.6. Giải phương trình sau:

$$4^{\sin x}-2^{1+\sin x}.\cos yx+2^{|x|}=0\ (9)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
(9)&\Leftrightarrow\Big[(2^{\sin x})^2-2.2^{\sin x}.\cos xy+\cos^2 xy\Big]+\Big[2^{|x|}-\cos^2 xy\Big]=0\\
&\Leftrightarrow\Big(2^{\sin x}-\cos xy\Big)^2+\Big(2^{|x|}-\cos^2 xy\Big)=0\ (9.1)
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng:

- $\Big(2^{\sin x}-\cos xy\Big)^2\geq 0,\forall x,y$

◆ $2^{|x|} \geq 2^0 = 1 \geq \cos^2 xy, \forall x, y$
$\Rightarrow 2^{|x|} - \cos^2 xy \geq 0, \forall x, y$
$\Rightarrow VT(9.1) \geq 0, \forall x, y$
Vậy phương trình đã cho được thoả mãn nếu và chỉ nếu:

$$\begin{cases} 2^{\sin x} = \cos xy \\ 2^{|x|} = 1 = \cos^2 xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Kết luận: $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 3.1. Giải các phương trình sau:

❶ $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{2}$

Đ.S : $x = 1$

❷ $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

Đ.S : $x_1 = 1, x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$

❸ $\sqrt{x+9} + \sqrt{15-x} = 2\sqrt{12}$

Đ.S : $x = 3$

❹ $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

Đ.S : $x = 3$

❺ $\sqrt{x^2+4y^2+6x+9} + \sqrt{x^2+4y^2-2x-12y+10} = 5$

Đ.S : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{1}{8}(3\alpha + 9) \\ -3 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$

❻ $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$

Đ.S : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

❼ $\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} = \sqrt{x^2+xz+z^2}$

Đ.S: PT vô nghiệm

Bài tập 3.2. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

ĐS: $x = 3$

Bài tập 3.3. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-3x+4}$

ĐS: $x = 2$

Bài tập 3.4. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$

   ĐS: $x = -1$

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$

   ĐS: $x = 1$

3. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$

ĐS: $x=0$

4. $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

ĐS: $x=7$

5. $x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1}=\dfrac{3xy}{2}$

ĐS: $x=y=2$

6. $\dfrac{16}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}+\dfrac{1225}{\sqrt{z-665}}=82-\sqrt{x-3}-\sqrt{y-1}-\sqrt{z-665}$

ĐS: $\begin{cases} x=19 \\ y=5 \\ x=1890 \end{cases}$

7. $\sqrt{5-x^6}-\sqrt[3]{3x^4-2}=1$

ĐS: $|x|=1$

8. $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|=5$

ĐS: $x=\dfrac{5}{4}$

9. $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x+1}$

ĐS: $x=1; x=1+\sqrt{2}$

Bài tập 3.5. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}\geq\sqrt{(2x-3)^2+2x-2}$

ĐS: $x=5$

3.2 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Tư tưởng của phương pháp này: sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc đã biết, các đánh giá khéo léo để chỉ ra dấu " = " trong các kết quả mong muốn. Từ đó xác định được GTNN, GTLN. Sau đây là các ví dụ minh hoạ.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 3.7. Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+1-1}{x+1}+\frac{y+1-1}{y+1}+\frac{z+1-1}{z+1} \\ &= 3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$(x+1+y+1+z+1)\Big(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\Big)\geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq\frac{9}{x+y+z+3}=\frac{9}{4}$$

Từ đó suy ra $P\leq 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$
Vậy $P_{max}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Ví dụ 3.8. Cho $a\geq 3, b\geq 4, c\geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{ab\sqrt{c-2}+bc\sqrt{a-3}+ca\sqrt{b-4}}{abc}$$

Lời giải. Ta có

$$P=\frac{\sqrt{c-2}}{c}+\frac{\sqrt{a-3}}{a}+\frac{\sqrt{b-4}}{b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $c-2$ và 2 ta được:

$$c=(c-2)+2\geq 2\sqrt{2(c-2)}\Rightarrow\frac{\sqrt{c-2}}{c}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow c-2=2\Leftrightarrow c=4$.
Tương tự ta có

$$\frac{\sqrt{a-3}}{a}\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sqrt{b-4}}{b}\leq\frac{1}{4}$$

Từ đó suy ra $P\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=8\\c=4\end{cases}$

Vậy $P_{max}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{4}$

Ví dụ 3.9. Cho $x,y>0$ và $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x+y$
Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\Big)^2\leq\Big(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\Big)(x+y)=6(x+y)$$
$$\Leftrightarrow x+y\geq\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{6}=\frac{5+2\sqrt{6}}{6}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 6 \\ \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{6} \\ y = \dfrac{3+\sqrt{6}}{6} \end{cases}$

Vậy $(x+y)_{min} = \dfrac{5+2\sqrt{6}}{6}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 3.6. Cho x, y là các số thay đổi thoả mãn điều kiện $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = (3-x)(4-y)(2x+3y)$$

Bài tập 3.7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = y - 4x + 8$ biết rằng $4x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$

Bài tập 3.8. Cho $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$. Tìm x, y, z để $|x + 2y + 3z - 8|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 3.9. Cho $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$