The VietNam Inequality Mathematic Forum

DISCOVERY INEQUALITY

VIMF

The First Version

LỜI NÓI ĐẦU.

Không còn nghi ngờ gì nữa, bất đẳng thức đã thực sự chiếm được chỗ đứng riêng cho mình trong nền toán học hiện đại. Nếu các bạn thường xuyên theo dõi các chương trình ***360^0 thể thao*** hay ***24/7*** thì các bạn có thể thấy những chương trình phần lớn đều bình luận nhiều về *môn thể thao vua – bóng đá*. Bất đẳng thức cũng vậy, ngày nay đi khắp các diễn đàn toán ta đều thấy vấn đề nóng bỏng nhất, thời sự nhất vẫn là bất đẳng thức. Với mong muốn có thể góp chút ít công sức vào công cuộc đổi mới dạy và học, chúng tôi – những thành viên của **Diễn Đàn Bất Đẳng Thức Việt Nam VIMF** muốn tạo ra một sân chơi thật sự bổ ích cho những bạn đã đang và sẽ yêu thích bộ môn bất đẳng thức này. Và sự ra đời của tập san này là đại diện cho những gì mà chúng tôi mong muốn. Tập san bao gồm nhưng chuyên mục chính:

- **Bất đẳng thức từ những cuộc thi**: tuyển chọn những bất đẳng thức và những lời giải hay từ các cuộc thi như NMO (thi toán của các quốc gia), TST (chọn đội tuyển thi toán quốc tế), đề thi tuyển sinh đại học, các cuộc thi bất đẳng thức,…
- **Bất đẳng thức sưu tầm và sáng tạo**: tuyển chọn những bất đẳng thức hay mà chúng tôi tự sáng tạo hoặc sưu tầm được từ các bài toán trên các diễn đàn, đặc biệt là Diễn Đàn Bất Đẳng Thức Việt Nam.
- **Giải toán như thế nào?**: tìm kiếm những bài viết mới hay về các vấn đề bất đẳng thức cổ điển – hiện đại, những sáng tạo mới, những ứng dụng của một bất đẳng thức đặc biệt nào đó giúp giải quyết được được một lớp các bài toán bất đẳng thức, những tìm tòi mở rộng cho một bất đẳng thức hay nào đó,…

Tập tài liệu không chỉ là người bạn đồng hành với chúng ta mà tôi còn mong muốn rằng nó còn giúp các bạn tự trao đổi, tích lũy kinh nghiệm lẫn nhau thông qua việc mỗi thành viên hãy đóng góp một chút sức mình vào tập san để nó ngày càng hoàn thiện hơn. Các bạn có thể tham gia đóng góp ở các chuyên mục: **Bất đẳng thức từ những cuộc thi và Giải toán như thế nào?.** Riêng chuyên mục bất đẳng thức từ những cuộc thi kêu gọi sự đóng góp từ tất cả các thành viên thông qua việc post các đề thi hay từ các năm lên forum để tổng hợp và tìm lời giải mới (nếu có).

<u>Yêu cầu khi tham gia:</u>

Để cho thống nhất, làm cho tập san có tính mỹ quan, dễ đọc, dễ tra cứu và hạn chế thời gian chúng tôi biên tập chỉnh sửa lại. Các bạn tham gia cần phải tuân thủ nghiêm ngặt các yêu cầu sau:

1. Bài chỉ đánh máy bằng word (2003 hoặc 2007) và chỉ gửi về một địa chỉ email duy nhất: vif.vimf@gmail.com
2. Tất cả các công thức toán soạn thảo đều phải dung mathtype hoặc equation của word 2007. Tránh tình trạng có chữ thì viết bình thường có chữ hoặc symbol thì dùng mathtype, như thế sẽ không tạo tính đồng bộ cho tập san và mất thời giờ biên tập chỉnh sửa lại. Vì thế, yêu cầu tất cả các công thức toán đều phải đặt trong mathtype.
3. Các bài viết phải trình bày một cách khoa học nhất, không được viết lang man
4. Font chữ là Unicode, cỡ chữ là 11, size trong mathtype cũng là 11
5. Bài trong chuyên mục Bất đẳng thức từ những cuộc thi các bạn có thể sưu tầm từ các cuộc thi và một số lời giải khác nhau (nhớ ghi gõ xuất sứ bài toán và tên hoặc nickname người giải). còn chuyên mục **Giải toán như thế nào?** phải là những bài viết mới gần đây (do bạn viết thì càng tốt) bao gồm những tìm tòi khám phá về một bất đẳng thức nào đó hay một kĩ thuật nhỏ áp dụng giải một lớp các bất đẳng thức ,…
6. Các bạn gửi bài đến nhớ để lại tên tuổi, nickname để chúng tôi tiện cập nhật thông tin

Cuối cùng, xin lưu ý rằng chúng tôi thực hiện tập san này một cách nghiêm túc vì mục đích giáo dục. Vì thế, chúng tôi hi vọng rằng các bạn cộng tác cũng phải thật sự nghiêm túc và có trách nhiệm đối với mỗi bài viết của mình để góp phần hoàn thiện tập san này. Các bạn tham gia tích cực sẽ được hưởng ưu đãi từ diễn đàn. Xin chân thành cảm ơn

---

Bất Đẳng Thức Từ Những Cuộc Thi

Bài O 1. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng*
$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\geq 3$$

UK TST 2005

Lời Giải 1 (VIMF). Do $abc = 1$ nên đặt $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}$

Bất đẳng thức được viết lại như sau
$$\frac{3x^2+xy}{(x+y)^2}+\frac{3y^2+yz}{(y+z)^2}+\frac{3z^2+zx}{(z+x)^2}\geq 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)^2+\left(\frac{y-z}{y+z}+1\right)^2+\left(\frac{z-x}{z+x}+1\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}+\frac{(y+z)^2-(y-z)^2}{(y+z)^2}+\frac{(z+x)^2-(z-x)^2}{(z+x)^2}\right]\geq 3$$

Hay
$$\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z-x}{z+x}\right)^2\geq -3\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right)=\frac{3(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

+ Nếu $(x-y)(y-z)(z-x)\leq 0$ thì bđt trên hiển nhiên đúng.
+ Nếu $(x-y)(y-z)(z-x)\geq 0$ thì theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có
$$\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z-x}{z+x}\right)^2\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right)^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq 1 \Leftrightarrow 2\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\geq 0$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Lời Giải 2 (VIMF). Trước tiên ta chứng minh 2 bổ đề sau

Bổ Đề 1.
$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq \frac{2}{1+a+b+c}+1$$

Bổ Đề 2.
$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\geq 1$$

Chứng minh Bổ đề 1. Bất đẳng thức tương đương với
$$\frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}\geq \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$$
Mà theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$

Vậy Bổ đề 1 được chứng minh.

Chứng minh Bổ đề 2. theo nguyên lí *Đirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0 \Rightarrow \frac{c+1}{c}=ab+1\geq a+b$. Ta có
$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow (ab-1)^2+(a-b)^2\geq 0 \text{ (đúng)}$$
nên
$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq \frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$$
Do đó

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\geq\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1$$

Vậy Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}\geq 3$$

Mà theo bổ đề trên ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}$$
$$\geq\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1\geq 2=1=3$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

NHẬN XÉT. *Từ lời giải trên ta có thể làm chặt bài toán bằng giả thiết $ab+bc+ca=3\Rightarrow abc\geq 1$. Các bạn hãy thử làm xem*

■

BÀI O 2. *Cho các số thực dương a,b,c và x,y,z sao cho $a+x=b+y=c+z=1$. Chứng minh*

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3$$

Russia 2002

LỜI GIẢI 1. Ta có

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)=\frac{bc}{y}+\frac{ca}{z}+\frac{ab}{x}+\frac{zx}{a}+\frac{xy}{b}+\frac{yz}{c}$$
$$=\left(\frac{bc}{y}+c\right)+\left(\frac{ca}{z}+a\right)+\left(\frac{ab}{x}+b\right)+\left(\frac{zx}{a}+z\right)+\left(\frac{xy}{b}+x\right)+\left(\frac{yz}{c}+y\right)$$
$$-(a+x+b+y+c+z)=\frac{c}{y}+\frac{a}{z}+\frac{b}{x}+\frac{z}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}-6$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ 2 số thì

$$\frac{a}{z}+\frac{z}{a}\geq 2,\qquad \frac{b}{x}+\frac{x}{b}\geq 2,\qquad \frac{c}{y}+\frac{y}{c}\geq 2$$

Cộng các bất đẳng thức này vế theo vế ta suy ra điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2.

Từ điều kiện ta có $x\left(\frac{a}{x}+1\right)=y\left(\frac{b}{y}+1\right)=z\left(\frac{c}{z}+1\right)$

Hay $\frac{a}{x}+1=\frac{1}{x},\ \frac{b}{y}+1=\frac{1}{y},\ \frac{c}{z}+1=\frac{1}{z}$

Đặt $\frac{a}{x}=m,\frac{b}{y}=n,\frac{c}{z}=p$ thì $m+1=\frac{1}{x},n+1=\frac{1}{y},p+1=\frac{1}{z}$

Và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\left(\frac{abc}{xyz}+1\right)\left(\frac{xz}{a}+\frac{xy}{b}+\frac{yz}{c}\right)\geq 3\Leftrightarrow(mnp+1)\left(\frac{1}{m(p+1)}+\frac{1}{n(m+1)}+\frac{1}{p(n+1)}\right)\geq 3$$
$$\Leftrightarrow\frac{mnp+1}{m(p+1)}+1+\frac{mnp+1}{n(m+1)}+1+\frac{mnp+1}{p(n+1)}+1\geq 6$$
$$\Leftrightarrow\frac{p(n+1)}{p+1}+\frac{m(p+1)}{m+1}+\frac{n(m+1)}{n+1}+\frac{m+1}{m(p+1)}+\frac{n+1}{n(m+1)}+\frac{p+1}{p(n+1)}\geq 6$$

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức trên bằng bất đẳng thức $AM-GM$ 6 số.

■

BÀI O 3. *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh rằng*

$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{4}$$

Romania 2005, Cezar Lupu

LỜI GIẢI 1.

Từ bất đẳng thức quen thuộc $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$ và giả thiết suy ra

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \frac{9}{8}$$

Hơn nữa ta cũng có $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$

Nên

$$\sqrt{3(ab+bc+ca)^3} \leq \frac{9}{8}$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2.

Đặt $a+b=x, b+c=y, c+a=z$ thì $xyz=1$ và $a=\frac{x+z-y}{2}, b=\frac{x+y-z}{2}, c=\frac{y+z-x}{2}$

Và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x+y-z}{2}.\frac{y+z-x}{2}+\frac{y+z-x}{2}.\frac{z+x-y}{2}+\frac{(z+x-y)}{2}.\frac{x+y-z}{2} \leq \frac{3}{4}$$

Hay

$$x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(xy+yz+zx)$$

Vì $xyz=1$ nên bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1 \geq 2(xy+yz+zx)$$

Đây là một bất đẳng thức khá quen thuộc.

■

BÀI O 4. *Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c} \geq 2\sqrt{a+b+c}$$

Iran TST 2008

LỜI GIẢI 1 (Albanian Eagle).

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq 2\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Jensen$ đối với hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}{a+b+c}}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)^2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)$$
$$\geq 4(ab+bc+ca)(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=min\,\{a,b,c\}$. Khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(a-b)^2(a^2b+ab^2+a^2c+b^2c-ac^2-bc^2)+c^2(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $c=min\,\{a,b,c\}$.

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2 (VIMF).

Theo bất đẳng thức $Mincopxki$ ta có

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}=\sqrt{a^3+a(ab+bc+ca)}+\sqrt{b^3+b(ab+bc+ca)}+\sqrt{c^3+c(ab+bc+ca)}$$

$$=\sqrt{a^2(a+b+c)+abc}+\sqrt{b^2(a+b+c)+abc}+\sqrt{c^2(a+b+c)+abc} \geq \sqrt{\left(\sum a\sqrt{a+b+c}\right)^2+\left(3\sqrt{abc}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(a+b+c)^3+9abc}\,.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{(a+b+c)^3+9abc} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \Leftrightarrow \sum a^3+3abc \geq \sum a^2(b+c)\,.$$

Đây chính là bất đẳng thức $\boldsymbol{Schur}$. Vậy bài toán được chứng minh .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hoặc $(1;1;0)$ và các hoán vị.

■

<u>BÀI O 5.</u> *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

APMO 2004

<u>LỜI GIẢI 1.</u> Đặt $t=\frac{b+c}{2}$. Khi đó

$$(b^2+2)(c^2+2)=b^2c^2+1+2b^2+2c^2+3\geq 2bc+2b^2+2c^2+3=(b+c)^2+b^2+c^2+3$$
$$\geq \frac{3}{2}(b+c)^2+3$$

Và do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2+2)\left(\frac{3}{2}(b+c)^2+3\right)\geq 9(ab+bc+ca)\Leftrightarrow [(b+c)^2+2](2+a^2)\geq 6(ab+bc+ca)$$

Theo bất đẳng thức $Bunhiacopxki$ thi

$$[(b+c)^2+2](2+a^2)\geq \left(\sqrt{2}(b+c)+\sqrt{2}a\right)^2=2(a+b+c)^2\geq 6(ab+bc+ca)$$

Và trường hợp rút ra được điều phải chứng minh.

<u>LỜI GIẢI 2.</u> Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq\ 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2$$

với mọi số thực dương a,b,c

<u>CHỨNG MINH.</u> Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+\ 4(a^2+b^2+c^2)+\ 2abc\ +\ 7\geq\ 9(ab\ +\ bc\ +\ ca)$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$2a^2b^2+\ 2\ +\ 2b^2c^2+\ 2\ +\ 2c^2a^2+\ 2\geq 4ab\ +\ 4bc\ +\ 4ca$$

Và $3a^2+\ 3b^2+\ 3c^2\geq\ 3ab\ +\ 3bc\ +\ 3ca$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)$$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0$ thì $2c(a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow 2abc\geq 2bc+2ca-2c$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+1\geq 2c+2ab\Leftrightarrow (a\ -\ b)^2+(c\ -\ 1)^2\geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a\ =\ b\ =\ c\ =\ 1$

<u>LỜI GIẢI 3 (VIMF).</u> Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn bài toán ban đầu nhưng trong phạm vi rộng hơn với bài toán trong lời giải 2.

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq\ 3(a+b+c)^2$$

với mọi số thực a,b,c

<u>CHỨNG MINH.</u> Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+\ a^2+b^2+c^2+\ a^2b^2c^2+\ 8\geq\ 6(ab\ +\ bc\ +\ ca)$$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì $c^2(a^2-1)(b^2-1)\geq\ 0\Rightarrow\ a^2b^2c^2+\ c^2\geq\ b^2c^2\ +\ c^2a^2$. Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+6\geq 4(ab\ +\ bc\ +\ ca)\Leftrightarrow (ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\geq\ 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Vậy, ta có điều phải chứng minh. đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a\ =\ b\ =\ c\ =\pm 1$

■

<u>BÀI O 6.</u> *Cho các số thực x,y,z sao cho $x+y+z=xy+yz+zx$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$$

Brazilian Math Olympiads

LỜI GIẢI 1 (VÕ QUỐC BÁ CẨN). Cho $x = y = -1$ và $z = 1$ thì $P = \frac{-1}{2}$, và ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{-1}{2}$, tức là chứng minh

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1} \ge \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1} \ge \frac{(z-1)^2}{z^2+1}$$

Từ điều kiện $x + y + z = xy + yz + zx$ ta có $z(x+y-1) = x+y-xy$.

Chú ý rằng ta không thể có $x+y=1$, bởi vì nếu ngược là $x+y=1$, thì $x+y-xy=0$ hay $xy = 1$, mà $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$ (điều này vô lí) nên $x+y \ne 1$ và ta có $z = \frac{x+y-xy}{x+y-1}$

Nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1} \ge \frac{(xy-1)^2}{(x+y-1)^2+(x+y-xy)^2}$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ thì

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1} \ge \frac{\left[(1+x)(1-y)+(1+y)(1-x)\right]^2}{(1+x^2)(1-y)^2+(1+y^2)(1-x)^2} = \frac{4(xy-1)^2}{(1+x^2)(1-y)^2+(1+y^2)(1-x)^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$4(x+y-1)^2+4(x+y-xy)^2 \ge (1+x^2)(1-y)^2+(1+y^2)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (y^2-3y+3)x^2-(3y^2-8y+3)x+3y^2-3y+1 \ge 0$$

Mà ta có $\triangle_f = (3y^2-8y+3)^2-4(y^2-3y+3)(3y^2-3y+1) = -3(y^2-1)^2 \le 0$ nên $f(x) \ge 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2 (VIMF).

Đặt $a + b + c = p, ab + bc + ca = q, abc = r$, từ giả thiết ta có $p = q$

Cũng như dự đoán trong lời giải 1 ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{2}$ và ta chứng minh

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1} \ge \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{qr+pq-3r+p}{r^2+p^2-2q+q^2-2pr+1} \ge \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(pr+p^2-3r+p)+(r^2+2p^2-2p-2pr+1) \ge 0 \Leftrightarrow r^2-6r+4p^2+1 \ge 0$$

Từ bất đẳng thức đúng

$$(ab-c)^2+(bc-a)^2+(ca-b)^2 \ge 0$$

ta thu được

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2 \ge 6abc \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2$$
$$\ge 2abc(a+b+c)+2(ab+bc+ca+6abc \Leftrightarrow 2p^2 \ge 6r+2pr+2p$$

Và do đó

$$r^2-6r+4p^2+1 = r^2-6r+2p^2+1+2p^2 \ge r^2-6r+2p^2+1+6r+2pr+2p$$
$$= (r+p)^2+(p+1)^2 \ge 0$$

Phép chứng minh hoàn tất.

■

BÀI O 7 . *Cho a,b,c là các số dương và x,y,z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca}+\sqrt{\frac{x+y-z}{x}bc} \le a+b+c$$

MIC Staff 2009 – TRẦN QUỐC LUẬT

LỜI GIẢI 1 (MIC Staff). Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca} = \sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{z+x-y}{z}a}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}c}\right)$$

$$\le a+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca}\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{\frac{x+y-z}{z}bc}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca}\right)^2\le b+c,$$

$$\left(4-\frac{z+x-y}{z}\right)b+\left(4-\frac{y+z-x}{y}\right)c\ge 2\left[2\sqrt{\frac{x+y-z}{x}}+\sqrt{\frac{(z+x-y)(y+z-x)}{yz}}\right]\sqrt{bc}.$$

Chú ý rằng $4-\frac{z+x-y}{z}>0$ và $4-\frac{y+z-x}{y}>0$ nên sau khi áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\left(4+\frac{z+x-y}{z}\right)\left(4-\frac{y+z-x}{y}\right)\ge\left[2\sqrt{\frac{x+y-z}{x}}+\sqrt{\frac{(z+x-y)(y+z-x)}{yz}}\right]^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{x+y-z}{z}+\frac{z+x-y}{z}+\frac{y+z-x}{y}+\sqrt{\frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{xyz}}\le 4$$

Đặt $m=y+z-x, n=z+x-y, p=x+y-z$ thì m,n,p là các số dương và bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{m}{m+p}+\frac{n}{n+m}+\frac{p}{p+n}+\sqrt{\frac{2mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}}\le 2\Leftrightarrow\frac{mn^2+np^2+pm^2+mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}$$

$$\ge\sqrt{\frac{2mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}}\Leftrightarrow mn^2+np^2+pm^2+mnp$$

$$\ge\sqrt{2mnp(m+n)(n+p)(p+m)}$$

Bình phương 2 vế của bất đẳng thức này ta được bất đẳng thức tương đương là

$$m^2n^4+n^2p^4+p^2m^4\ge 3m^2n^2p^2$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$ 3 số.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Lời Giải 2 (MIC Staff). Giả sử rằng x,y,z là độ dài 3 cạnh cảu tam giác ABC. Khi đó

$$\frac{z+x-y}{z}=\frac{sinA-sinB+sinC}{sinC}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Điều này dẫn đến

$$\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca}+\sqrt{\frac{x+y-z}{z}bc}$$

$$=\frac{\cos\frac{B}{2}\sqrt{absinA}+\cos\frac{A}{2}\sqrt{casinB}+\cos\frac{C}{2}\sqrt{bcsinC}}{\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}$$

$$\le\sqrt{\frac{\left(abcos^2\frac{B}{2}+cacos^2\frac{A}{2}+bccos^2\frac{C}{2}\right)(sinA+sinB+sinC)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}\ (Cauchy\ Schwarz)$$

$$=\sqrt{2abcosB+2cacosA+2bccosC+2ab+2bc+2ca}$$

Mặt khác, với chú ý ở bất đẳng thức quen thuộc

$$2abcosB+2cacosA+2bccosC\le a^2+b^2+c^2$$

Ta có thể dễ dàng suy ra kết quả của bài toán.

Lời Giải 3 (VIMF).

Do x,y,z là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên đặt $x=k+m, y=m+n, z=n+k$ $(k,m,n>0)$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{2k}{k+n}ab}+\sqrt{\frac{2n}{m+n}ca}+\sqrt{\frac{2m}{m+k}bc}\le a+b+c$$

Không mất tính tổng quát, giả sử k là số ở giữa m và n. Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\sqrt{\frac{2k}{k+n}ab}+\sqrt{\frac{2n}{m+n}ca}+\sqrt{\frac{2m}{m+k}bc}=\sqrt{\frac{2ka}{k+n}.b}+\sqrt{\frac{2na}{k+n}.\frac{k+n}{m+n}c}+\sqrt{\frac{2mc}{m+k}b}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{2ka}{k+n}+b+\frac{2na}{k+n}+\frac{k+n}{m+n}c+\frac{2mc}{m+k}+b\right)=\frac{1}{2}\left[2a+2b+\left(\frac{k+n}{m+n}+\frac{2m}{m+k}\right)c\right]$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{c}{2}.\left(\frac{k+n}{m+n}+\frac{2m}{m+k}\right)\le c\Leftrightarrow(k+m)(k+n)+2m(m+n)\le 2(m+n)(m+k)$$

$$\Leftrightarrow k^2+mn\le km+kn\Leftrightarrow(k-m)(k-n)\le 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do k là số ở giữa m và n.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ và $x=y=z$.

■

BÀI O 8. *Cho các số dương a,b,c. Biết rằng $a\le b\le c$ và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng*

$$b\ge\frac{1}{a+c-1}$$

MIC Staff 2009 – Vasile Cirtoaje

LỜI GIẢI 1 (MIC Staff).

Từ giả thiết $a\le b\le c$ ta suy ra $(b-c)(b-a)\le 0$, hay là $ac\le b(a+c-b)$, từ đó dẫn đến

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac}+\frac{1}{b}\ge\frac{a+c}{b(a+c-b)}+\frac{1}{b},$$

Suy ra

$$b(a+c)^2-2(a+c)+b(1-b^2)\ge 0,$$

Và ta thu được

$$a+c\le\frac{1-\sqrt{b^4-b^2+1}}{b}\text{ hoặc }a+c\ge\frac{1+\sqrt{b^4-b^2+1}}{b},$$

Mặt khác, ta thấy $a+c>b$ mà $\frac{1-\sqrt{b^4-b^2+1}}{b}<b$ nên không thể xảy ra trường hợp $a+c\le\frac{1-\sqrt{b^4-b^2+1}}{b}$.

Như vậy, ta phải có

$$a+c\ge\frac{1+\sqrt{b^4-b^2+1}}{b}\ge\frac{1+\sqrt{b^2}}{b}=\frac{1}{b}+1$$

Hay là

$$b\ge\frac{1}{a+c-1}$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Dễ thấy rằng từ các lập luận trên ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

LỜI GIẢI 2 (MIC Staff).

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ thì ta phải chứng minh $y\le\frac{1}{x}+\frac{1}{z}-1$ với $x\ge y\ge z>)$ và $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Từ giả thiết $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, ta suy ra được

$$2y=(x+z)\left(\frac{1}{xy}-1\right)+\sqrt{(x+z)^2\left(\frac{1}{xz}-1\right)^2+4}$$

Do đó ta phải chứng minh

$$(x+z)\left(\frac{1}{xz}-1\right)+\sqrt{(x+z)^2\left(\frac{1}{xz}-1\right)^2+4}\le 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}-1\right)$$

Hay là

$$\sqrt{(x+z)^2\left(\frac{1}{xz}-1\right)^2+4} \le (x+z)\left(\frac{1}{xz}+1\right)-2$$

Do

$$(x+z)\left(\frac{1}{xz}+1\right)-2 = x+\frac{1}{x}+\frac{(z-1)^2}{z} > 0$$

Nên ta có thể bình phương 2 vế bất đẳng thức trên và thu gọn nó lại thành

$$\frac{4(z+x)(x-1)(z-1)}{xz} \le 0$$

Bất đẳng thức này đúng nếu $x \ge 1 \ge z$. Tuy nhiên, áp dụng giả thiết $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ một lần nữa, ta thấy rằng

$$2(x+y+z) = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = x+y+z = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right) \ge 6$$

Từ đó suy ra

$$x \ge \frac{x+y+z}{3} \ge 1, \qquad \frac{1}{z} \ge \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \ge 1 \Leftrightarrow z \le 1$$

Phép chứng minh của ta hoàn tất.

LỜI GIẢI 3 (VIMF). Đặt $bc = x, ac = y, ab = z$. Do $a \le b \le c$ nên $x \ge y \ge z$

Ta có $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow ab+bc+ca=a^2bc+ab^2c+abc^2 \Leftrightarrow x+y+z=xy+yz+zx$

Và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $ab+bc \ge b+1 \Leftrightarrow x+z \ge \sqrt{\frac{zx}{y}}+1$

Chú ý rằng $x \ge y \ge z$ nên $x+y+z=xy+yz+zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow 3 \le x+y+z \le 3x \Rightarrow x \ge 1$

Bây giờ ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $z \ge 1$ thì ta chỉ cần chứng minh $x \ge \sqrt{\frac{zx}{y}}$

Mà do $x \ge y \ge z$ và $x \ge 1$ nên $x \ge \sqrt{1.x} \ge \sqrt{\frac{zx}{y}}$

Từ đó ta có điều phải chứng minh

Trường hợp 2. Nếu $z \le 1$

Từ $x+y+z=xy+yz+zx$, suy ra $y=\frac{x+z-xz}{x+z-1}$. Do đó

$$x+z \ge \sqrt{\frac{zx}{y}}+1 \Leftrightarrow x+z-1 \ge \sqrt{\frac{xz(x+z-1)}{x+z-xz}} \Leftrightarrow \sqrt{x+z-1} \ge \sqrt{\frac{xz}{x+z-xz}} \Leftrightarrow (x+z-1)(x+z-xz) \ge xz$$

$$\Leftrightarrow (x+z)^2-(x+z)(xz+1) \ge 0 \Leftrightarrow (x+z)(x+z-xz-1) \ge 0 \Leftrightarrow (x+z)(x-1)(z-1) \ge 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do $x \ge 1 \ge z$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

■

BÀI O 9. Cho *các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$8(2-a)(2-b)(2-c) \ge (a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

TRẦN QUỐC LUẬT - MIC Staff 2009

LỜI GIẢI 1 (MIC Staff).

Giả sử $c = min\,\{a,b,c\}$, suy ra $0 < c \le 1$. Ta có các đánh giá sau

$$2(2-a)(2-b) = 8-4(a+b)+2ab = 8-4(a+b)+(a+b)^2-a^2-b^2$$
$$= 4-a^2-b^2+(a+b-2)^2 \ge 4-a^2-b^2 = 1+c^2,$$

$$(a+bc)(b+ca) \le \frac{(a+bc+b+ca)^2}{4} = \frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4} \le \frac{(a^2+b^2)(c^2+1)}{2}$$
$$= \frac{(3-c^2)(c+1)^2}{2} \le (3-c^2)(c^2+1),$$
$$c+ab \le c+\frac{a^2+b^2}{2} = c+\frac{3-c^2}{2} = \frac{3+2c-c^2}{2}.$$

Vì vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau là đủ

$$8(c-2) \ge (3-c^2)(3+2c-c^2)$$

Là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì

$$8(2-c)-(3-c^2)(3+2c-c^2) = (7-c^2)(c-1)^2 \ge 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

LỜI GIẢI 2 (MIC Staff). Tương tự như lời giải 1, ta cũng có đánh giá $2(2-a)(2-b) \ge 1+c^2$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $2(2-c) = 4-2c \ge 4-(c^2+1) = a^2+b^2$

Do vậy, theo bất đẳng thức $Bunhiacopxki$ thì

$$4(2-a)(2-b)(2-c) \ge (a^2+b^2)(c^2+1) = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+1)}.\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+1)}$$
$$\ge (ac+b)(a+bc)$$

Ngoài ra, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta cũng có

$$2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+1}{2} \ge ab+c$$

Kết hợp với kết quả ở trên ta thu được điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 3 (VIMF). Không mất tính tổng quát, giả sử $c = max\,\{a,b,c\}$, khi đó

$$3 = a^2+b^2+c^2 \le 3c^2 \Rightarrow c \ge 1, \qquad 3 = a^2+b^2+c^2 \ge 2ab+1 \Rightarrow ab \le 1,$$

Ta có

$$4-2a = a^2-2a+1+b^2+c^2 \ge b^2+c^2$$

Đánh giá tương tự đối với b và c. Nhân các bất đẳng thức lại với nhau ta được

$$8(2-a)(2-b)(2-c) \ge (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$

Và ta chỉ cần chứng minh được

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \ge (a+bc)(b+ca)(c+ab)$$
$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - a^2b^2c^2$$
$$\ge a^2b^2c^2+abc+abc(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Từ điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$ ta thu gọn bất đẳng thức này thành

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge a^2b^2c^2+2abc \Leftrightarrow c^2(a^2+b^2)-2abc \ge a^2b^2(c^2-1)$$

Hay ta chỉ cần chứng minh

$$2c^2ab-2abc \ge a^2b^2(c^2-1) \Leftrightarrow 2c(c-1) \ge ab(c-1)(c+1) \Leftrightarrow 2c \ge ab(c+1)$$

Điều này hiển nhiên đúng theo các đánh giá $1 \ge ab, 2c \ge c+1$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

■

BÀI O 10. *Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số dương thì*

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}$$

TRẦN QUỐC ANH – MIC Staff 2009

LỜI GIẢI 1 (MIC Staff). Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\frac{(a+c)(b+c)}{ab} = 1+\frac{c^2}{ab}+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 1+\frac{4c^2}{(a+b)^2}+\frac{4c}{a+b} = \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2}$$

Do đó ta được

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{c(a+b)}{(a+b+2c)^2}$$

Mặt khác ta thấy

$$c(3a+3b+2c)^2=\frac{1}{8}.8c.(3a+3b+2c).(3a+3b+2c)$$
$$\le \frac{1}{8}\left(\frac{8c+3a+3b+2c+3a+3b+2c}{3}\right)^3=(a+b+2c)^2$$

Suy ra

$$\frac{c}{(a+b+2c)^2}\le \frac{a+b+2c}{(3a+3b+2c)^2}$$

Nên từ đây ta dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2 (MIC Staff). Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại thành

$$\frac{(a+b)(a+b+2c)}{abc}\ge \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Sau khi phân tách và thu gọn ta thấy bất đẳng thức có dạng tương đương là

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}\ge \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$, ta thấy rằng

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}=\frac{a+b+c}{bc}+\frac{a+b+c}{ca}+\frac{a+b}{ab}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{bc(a+b+c)}+\frac{(a+b+c)^2}{ca(a+b+c)}+\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)}$$
$$\ge \frac{(3a+3b+2c)^2}{bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b)}=\frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Phép chứng minh của ta hoàn tất.

LỜI GIẢI 3 (VIMF). Chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại

$$\frac{abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}\le \frac{(1-c)(1+c)}{(3-c)^2}\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}\le \frac{1-c^2}{(3-c)^2}$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ thì

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}\le \frac{1}{\frac{4}{a+b}+\frac{1}{c}-1}=\frac{1}{\frac{4}{1-c}+\frac{1}{c}-1}=\frac{c(1-c)}{(c+1)^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{c(1-c)}{(c+1)^2}\le \frac{1-c^2}{(3-c)^2}$$

Hay $(c+1)^3\ge c(3-c)^2\Leftrightarrow (3c-1)^2\ge 0$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

■

BÀI O 11. *Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z. Chứng minh rằng*

$$\frac{bcx}{(x+y)(x+z)}+\frac{cay}{(y+z)(y+x)}+\frac{abz}{(z+x)(z+y)}\le \frac{(a+b+c)^2}{4(x+y+z)}$$

Đề Thi Tài Năng Toán Học Trẻ THPT – http://www.truongtructuyen.vn

LỜI GIẢI. Đặt $m=x+y,n=y+z,k=z+x$ thì bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{bc(m+k-n)}{mk}+\frac{ca(m+n-k)}{mn}+\frac{ab(n+k-m)}{nk}\le \frac{(a+b+c)^2}{m+n+k}$$
$$\Leftrightarrow \frac{bc(m^2+k^2-n^2+2mk)}{mk}+\frac{ca(m^2+n^2-k^2+2mn)}{mn}+\frac{ab(n^2+k^2-m^2+2nk)}{nk}\le (a+b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{bc(m^2+k^2-n^2)}{mk}+\frac{ca(m^2+n^2-k^2)}{mn}+\frac{ab(n^2+k^2-m^2)}{nk}\le a^2+b^2+c^2$$

Nhưng từ cách đặt $Ravi$ trên thì ta thấy ngay m,n,k là độ dai 3 cạnh của tam giác ABC. Nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C\le a^2+b^2+c^2$$
Bất đẳng thức này là một bất đẳng thức đã quá quên thuộc. Vậy ta có điều phải chứng minh.

■

<u>BÀI O 12.</u> *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$
Pháp 2005

<u>LỜI GIẢI 1.</u>Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có
$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge3\left(\frac{ab}{c}\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}\frac{ca}{b}+\frac{ca}{b}\frac{ab}{c}\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
Nên từ đây ta suy ra ngay điều phải chứng minh.

<u>LỜI GIẢI 2 (VIMF).</u> Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn là
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$
Trước tiên ta chứng minh
$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$
Bất đẳng thức trên tương đương với
$$\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a+b}{2}\right)\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}-(a+b+c)$$
Ta đưa về dạng $\boldsymbol{S.O.S}$ với $S_a=\dfrac{1}{2(b+c)}-\dfrac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+a+b+c}$;
$$S_b=\frac{1}{2(a+c)}-\frac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+a+b+c};\ S_c=\frac{1}{2(b+a)}-\frac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+a+b+c}.$$
Dễ thấy các S_a,S_b,S_c đều dương nên bất đẳng thức trên đúng.
Tiếp theo ta chứng minh
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}$$
Bất đẳng thức này tương đương với
$$\sum\left(\frac{ab}{c}-\frac{a+b}{2}\right)\ge\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a+b}{2}\right).$$
Ta cũng đưa về dạng $\boldsymbol{S.O.S}$ với $S_a=\dfrac{a}{bc}-\dfrac{1}{b+c};S_b=\dfrac{b}{ac}-\dfrac{1}{a+c};S_c=\dfrac{c}{ab}-\dfrac{1}{b+a}$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$ thì theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có
$$S_a+S_c=\frac{a}{bc}+\frac{c}{ab}-\frac{1}{b+a}-\frac{1}{b+c}\ge2.\sqrt{\frac{a}{bc}.\frac{c}{ab}}-\frac{1}{b+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{2}{b}-\frac{1}{b+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{a}{b(b+a)}+\frac{c}{b(b+c)}>0$$
Tương tự $S_b+S_c>0;S_b=\dfrac{b}{ac}-\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{a(b-c)+bc}{ac(a+c)}\ge0$.
Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

■

<u>BÀI O 13.</u> *Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng*
$$x^3(y^2+z^2)^2+y^3(z^2+x^2)^2+z^3(x^2+y^2)\ge xyz[xy(x+y)^2+yz(y+z)^2+zx(z+x)^2]$$
USA TST 2009

<u>LỜI GIẢI 1 (VIMF).</u>
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x[(xy^2+xz^2)^2-(y^2z+yz^2)^2]+y[(yz^2+yx^2)^2-(x^2z+xz^2)^2]$$
$$+z[(zx^2+zy^2)^2-(x^2y+xy^2)^2]\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x(xy^2+xz^2+y^2z+yz^2)[y^2(x-z)+z^2(x-y)]$$
$$+y(yx^2+yz^2+x^2z+xz^2)[x^2(y-z)+z^2(y-x)]$$
$$+z(zx^2+zy^2+x^2y+xy^2)[x^2(z-y)+y^2(z-x)]\ge 0$$

Hay

$$x^2(y-z)(x^2y^2+yz^2+x^2yz+xyz^2-x^2z^2-z^2y^2-x^2yz-xy^2z)$$
$$+y^2(z-x)(x^2z^2+z^2y^2+x^2yz+xy^2z-x^2y^2-x^2z^2-xy^2z-xyz^2)$$
$$+z^2(x-y)(x^2y^2+z^2x^2+xy^2z+xyz^2-x^2y^2-y^2z^2-x^2yz-xyz^2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^3(y-z)^2(xy+xz-yz)+y^3(z-x)^2(xy+yz-zx)$$
$$+z^3(x-y)^2(yz+zx-xy)\ge 0$$

Ta đưa về dạng $S.O.S$

$$S=S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$$

Trong đó $S_x=x^3(xy+zx-yz), S_y=y^3(xy+yz-zx), S_z=z^3(yz+zx-xy)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó dễ thấy $S_y\ge 0$

Ta có

$$S_x+S_y=x^4y+x^3z(x-y)+xy^4+y^3z(y-x)\ge z(x-y)(x^3-y^3)$$
$$=z(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\ge 0,$$
$$S_y+S_z=y^4z+xy^3(y-z)+yz^4+xz^3(z-y)\ge x(y-z)(y^3-z^3)$$
$$=x(y-z)^2(y^2+yz+z^2)\ \ge 0$$

Do đó $S=(S_x+S_y)(y-z)^2+(S_y+S_z)(x-y)^2+2S_y(x-y)(y-z)\ge 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

LỜI GIẢI 2 (VÕ QUỐC BÁ CẨN).

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(a^2+b^2)^3}{c^3a^4b^4}+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^3b^4c^4}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^3c^4a^4}\ge\frac{1}{abc}\left(\frac{(a+b)^2}{a^3b^3}+\frac{(b+c)^2}{b^3c^3}+\frac{(c+a)^2}{c^3a^3}\right)$$

Hay $a(b^2+c^2)^2+b(c^2+a^2)^2+c(a^2+b^2)^2\ge a^3(b+c)^2+b^3(c+a)^2+c^3(a+b)^2$

Chú ý rằng

$$a(b^2+c^2)^2+b(c^2+a^2)^2+c(a^2+b^2)^2$$
$$=a(b^4+c^4)+b(c^4+a^4)+c(a^4+b^4)+2(ab^2c^2+bc^2a^2+ca^2b^2)$$
$$=a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)+a^2bc(b+c)+b^2ca(c+a)+c^2ab(a+b)$$

Do đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$[a^4(b+c)+a^2bc(b+c)-a^3(b+c)^2]+[b^4(c+a)+b^2ca(c+a)-b^3(c+a)^2]$$
$$+[c^4(a+b)+c^2ab(a+b)-c^3(a+b)^2]\ge 0$$

Hay $a^2(b+c)(a-b)(a-c)+b^2(c+a)(b-c)(b-a)+c^2(a+b)(c-a)(c-b)\ge 0$

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức $Vonicur\ Schur$.

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

NHẬN XÉT. **VÕ QUỐC BÁ CẨN** còn lưu ý rằng bất đẳng thức trên còn thế viết lại thành bất đẳng thức đúng sau

$$x(y-z)^2(xy+xz-yz)^2+y(z-x)^2(yz+xy-zx)^2+z(x-y)^2(zx+yz-xy)^2\ge 0$$

■

BÀI O 14. *Chứng minh rằng với các số thực dương x,y,z thõa mãn $x(x+y+z)=3yz$, ta có*

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3$$

Tuyển Sinh Đại Học Khối A 2009

LỜI GIẢI.

Trước tiên là 2 bổ đề được dùng xuyên suốt trong các lời giải của chúng ta

BỔ ĐỀ 1. $x\le\sqrt{yz}$

Chứng minh 1. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$3yz=x^2+x(y+z)\ge x^2+2x\sqrt{yz}\Leftrightarrow(x-\sqrt{yz})(x+3\sqrt{yz})\le 0\Rightarrow x\le\sqrt{yz}$$

Chứng minh 2. Từ điều kiện ta có

$$4yz=(x+y)(x+z)\ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{xz}\Rightarrow\sqrt{yz}\ge x$$

BỔ ĐỀ 2. $2x \le y + z$

Chứng minh 1. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x^2 + x(y+z) = 3yz \le \frac{3}{4}(y+z)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y+z}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}(y+z)\right) \le 0 \Rightarrow 2x \le y + z$$

Chứng minh 2. Từ điều kiện ta có

$$(x+y+z) = 3xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{9} \Rightarrow x^2 \le \frac{(x+y+z)^2}{9} \Rightarrow 2x \le y + z$$

Chứng minh 3. Theo bổ đề 1 thì

$$x \le \sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2} \Rightarrow 2x \le y + z$$

LỜI GIẢI 1 (ĐÁP ÁN BỘ GD&ĐT – PHAN HUY KHẢI).

Đặt $a = x + y, b = x + z, c = y + z$ thì $x = \frac{a+b-c}{2}, y = \frac{a+c-b}{2}, z = \frac{b+c-a}{2}$ và điều kiện $x(x+y+z) = 3yz$ trở thành $c^2 = a^2 - ab + b^2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$a^3 + b^3 + 3abc \le 5c^3 \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc \le 5c^3 \Leftrightarrow (a+b)c^2 + 3abc \le 5c^3$$
$$\Leftrightarrow (a+b)c + 3ab \le 5c^2$$

Theo bổ đề 2 ta thu được $a + b \le 2c$

Suy ra $(a+b)c \le 2c^2$ *và* $3ab \le \frac{3}{4}(a+b)^2 \le 3c^2$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay $x = y = z$.

LỜI GIẢI 2 (LÊ THỐNG NHẤT và các cộng sự). Từ giả thiết ta có $(x+y)(x+z) = 4yz$

Đặt $a = x + y, b = x + z$. Ta có $(a-b)^2 = (y-z)^2$ và $ab = 4yz$

Mặt khác

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \le \sqrt{2(y^2+z^2)}[(a-b)^2 + ab]$$
$$= \sqrt{2[(a-b)^2 + 2ab]}[(a-b)^2 + ab] = \sqrt{2[(y-z)^2 + 8yz]}[(y-z)^2 + 4yz]$$
$$= \sqrt{2[(y+z)^2 + 4yz]}(y+z)^2 \le 2(y+z)^3$$

Ta lại có $3(x+y)(x+z)(y+z) = 12yz(y+z) \le 3(y+z)^3$

Cộng 2 bất đẳng thức trên vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 3 (NGUYỄN ANH DŨNG và các cộng sự).

Đặt $t = y + z$, từ giả thiết suy ra $yz = \frac{x^2 + xt}{3}$

Theo bổ đề 2 thì $2x \le t$

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$(2x+y+z)^3 - 3(x+y)(x+z)(2x+y+z) + 3(x+y)(x+z)(y+z) \le 5(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow (2x+y+z)^3 - 3(x+y)(x+z)2x \le 5(y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow (2x+y+z)^3 - 6x[x^2 + x(y+z) + yz] \le 5(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow (2x+t)^3 - 6x\left[x^2 + xt + \frac{x^2+xt}{3}\right] \le 5t^3 \Leftrightarrow 2t(2x^2 + 3xt - 2t^2) \le 0$$

Vì $0 < x \le \frac{t}{2} \Rightarrow 2x^2 + 3xt \le \frac{t^2}{2} + \frac{3t^2}{2} = 2t^2 \Rightarrow 2x^2 + 3xt - 2t^2 \le 0$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 4 (BÁO TUỔI TRẺ Online & THANH NIÊN Online).

Từ điều kiện $x(x+y+z) = 3yz$ suy ra $1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 3.\frac{y}{x}.\frac{z}{x}$

Theo bổ đề 2 thì $t = u + v \ge 2$

Chia 2 vế của bất đẳng thức cần chứng minh cho x^3 thì ta được bất đẳng thức tương đương là

$$(1+u)^3+(1+v)^3+3(1+u)(1+v)(u+v)\le 5(u+v)^3$$
$$\Leftrightarrow (2+t)^3-3(1+u)^2(1+v)-3(1+u)(1+v)^2+3(1+u)(1+v)t\le 5t^3$$
$$\Leftrightarrow (2+t)^3-6(1+u)(1+v)\le 5t^3 \Leftrightarrow (2+t)^3-6(1+u+v+uv)\le 5t^3$$
$$\Leftrightarrow (2+t)^3-6\left(1+t+\frac{1+t}{3}\right)\le 5t^3 \Leftrightarrow 4t^3-6t^2-4t\ge 0 \Leftrightarrow t(2t+1)(t-2)$$
$$\ge 0$$
Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng với $t\ge 2$.

<u>LỜI GIẢI 5 (canhang_2007).</u> Theo bổ đề 1 thì $x\le\sqrt{yz}$ và chú ý $(x+y)(x+z)=4yz$
Sử dụng hằng đẳng thức $u^3+v^3=uv(u+v)+(u-v)^2(u+v)$ ta được
$$(x+y)^3+(x+z)^3=(x+y)(x+z)(2x+y+z)+(y-z)^2(2x+y+z)$$
$$\le 4yz\left(2\sqrt{yz}+y+z\right)+(y-z)^2\left(2\sqrt{yz}+y+z\right)=(y+z)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$$
$$\le 2(y+z)^3$$
Ngoài ra ta cũng có $3(x+y)(x+z)(y+z)=12yz(y+z)\le 3(y+z)^3$
Nên cộng 2 đánh giá này ta có điều phải chứng minh.

<u>LỜI GIẢI 6 (tanpham90).</u> Bất đẳng thức đã cho tương đương với
$$x^3+3x^2(y+z)+3x[(y+z)^2-2yz]+3xyz\le 2(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow x^3+3x^2(y+z)+3x\left[(y+z)^2-\frac{2}{3}x(x+y+z)\right]+3xyz\le 2(y+z)^3$$
Đặt $y+z=2a$. Ta có
$$x^3+6x^2a+3x\left[4a^2-\frac{2}{3}x(x+2a)\right]+x^2(x+a)\le 16a^3 \Leftrightarrow 4(x-a)(x+4a)a\le 0$$
Theo bổ đề 2 ta có điều phải chứng minh.

<u>LỜI GIẢI 7 (VIMF).</u> Theo bổ đề 2 thì $2x\le y+z$
Áp dụng đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
Lần lượt thay a,b,c bởi $x+y,x+z,-(z+x)$ ta được
$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^3+(x+z)^3-(y+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 4(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow (x+y+x+z-y-z)[(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2+(x+y)(y+z)$$
$$+(x+z)(y+z)-(x+y)(x+z)]\le 4(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow 2x\left(x^2+3y^2+3z^2+3(xy+yz+zx)\right)\le 4(y+z)^3$$
Do $2x\le y+z$ nên ta chỉ cần chứng minh
$$x^2+3y^2+3z^2+3(xy+yz+zx)\le 4(y+z)^2 \Leftrightarrow x^2-3yz+3x(y+z)\le (y+z)^2 \Leftrightarrow 2x(y+z)$$
$$\le (y+z)^2 \Leftrightarrow (y+z)(y+z-2x)\ge 0$$
Bất đẳng thức trên đúng do $y+z\ge 2x$.
Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

<u>Lời giải 8 (VIMF).</u> Theo bổ đề 1 thì $x\le\sqrt{yz}$
Do đó
$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\le\left(\sqrt{yz}+y\right)^3+\left(\sqrt{yz}+z\right)^3+3\left(\sqrt{yz}+y\right)\left(\sqrt{yz}+z\right)(y+z)$$
$$=\sqrt{y^3}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^3+\sqrt{z^3}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^3+3\sqrt{yz}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2(y+z)$$
$$=\left(\sqrt{y^3}+\sqrt{z^3}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^3+3\sqrt{yz}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2(y+z)$$
$$=\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^4\left(y+z-\sqrt{yz}\right)+3\sqrt{yz}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2(y+z)$$
$$=\frac{1}{4}\left(y+z+2\sqrt{yz}\right)\left(y+z+\sqrt{yz}\right)\left(4y+4z-4\sqrt{yz}\right)+3\sqrt{yz}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2(y+z)$$
$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{y+z+2\sqrt{yz}+y+z+\sqrt{yz}+4y+4z-4\sqrt{yz}}{3}\right)^3$$
$$+3\frac{(y+z)}{2}\left(\sqrt{2(y+z)}\right)^2(y+z)=2(y+z)^3+3(y+z)^3=5(y+z)^3$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

Dựa vào các cách giải trên các bạn hãy giải bài toán sau, đăng trên tạp chí **Toán Học Tuổi Trẻ** số tháng 7 năm 2009

"Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + 2a(b + c) = 5bc$. Chứng minh rằng

$$(a + b)^3 + (a + c)^3 + (a + b)(a + c)(b + c) \leq 3(b + c)^3"$$

■

Bất Đẳng Thức Sáng Tạo Và Sưu Tầm

LTG. ***Đây là những bài toán mà chúng tôi sưu tầm được từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, chủ yếu là trên các diễn đàn Toán, đặc biệt là Diễn Đàn Bất Đẳng Thức Việt Nam www.vimf.co.cc/ và chúng tôi chỉ tường thuật lại theo nguyên văn của người đã gửi bài lên.***

BÀI ST1. *Cho các số thực dương* a, b, c *sao cho* $a+b+c=3$. *chứng minh rằng*

$$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\ge\frac{9}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$$

2math

LỜI GIẢI (NGUYỄN ANH TUẤN).

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge 1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự đối với 2 bất đẳng thức còn lại, cộng các bất đẳng thức lại với nhau ta được

$$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\ge 3-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=3-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-a-b-c}{4}$$
$$=\frac{15}{4}-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{15}{4}-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4}\ge\frac{9}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$$

Đặt $t=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Chú ý rằng

$$\sqrt{a+b+c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3(a+b+c)}$$

Nên $\sqrt{3}<t\le 3$. Và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{15}{4}-\frac{t^2}{4}\ge\frac{9}{2t}\Leftrightarrow t^3-15t+18\le 0\Leftrightarrow (t-3)\left(t-\frac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{33}+\sqrt{3}}{2}\right)\le 0$$

Dễ thấy $\sqrt{3}>\frac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}$ nên đánh giá trên đúng với $t\in\left(\sqrt{3},3\right]$

Phép chứng minh hoàn tất.

■

BÀI ST 2. *Cho các số thực dương* a, b, c. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\le\sqrt[3]{a.\frac{(a+b)}{2}.\frac{a+b+c}{3}}$$

LỜI GIẢI 1. Áp dụng bất đẳng thức $Holder$ ta có

$$a.\frac{(a+b)}{2}.\frac{a+b+c}{3}\ge\frac{(a+a+a)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)(a+b+c)}{27}\ge\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\right)^3$$

Từ đây ta có ngay điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$a+\sqrt[3]{ab.\frac{a+b}{2}}+\sqrt[3]{abc}\le 3\sqrt[3]{a.\frac{(a+b)}{2}.\frac{a+b+c}{3}}$$

Hay

$$\sqrt[3]{\frac{6a^2}{(a+b)(a+b+c)}}+\sqrt[3]{\frac{3b}{a+b+c}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}}\le 3$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\sqrt[3]{\frac{6a^2}{(a+b)(a+b+c)}}=\sqrt[3]{1.\frac{2a}{a+b}.\frac{3a}{a+b+c}}\le\frac{1}{3}\left(1+\frac{2a}{a+b}+\frac{3a}{a+b+c}\right),$$

$$\sqrt[3]{\frac{3b}{a+b+c}} = \sqrt[3]{1.1.\frac{3b}{a+b+c}} \le \frac{1}{3}\left(1+1+\frac{3b}{a+b+c}\right) = \frac{1}{3}\left(2+\frac{3b}{a+b+c}\right),$$

$$\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} = \sqrt[3]{1.\frac{2b}{a+b}.\frac{3c}{a+b+c}} \le \frac{1}{3\left(1+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}\right)}.$$

Cộng các bất đẳng thức này về theo vế ta thu được điều phải chứng minh.

■

<u>BÀI ST 3.</u> Cho *các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right) \ge 3$$

Vasile Cirtoaje

<u>LỜI GIẢI.</u>

Đặt $x = a+\frac{1}{b}, y = b+\frac{1}{c}, z = c+\frac{1}{a}$ thì bất đẳng thức được viết lại thành

$$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1) \ge 3$$

Theo nguyên lí $Dirichlet$ thì 2 trong 3 số $(x-2), (y-2), (z-2)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(x-2)(y-2) \ge 0 \Rightarrow xy+4 \ge 2x+2y \Rightarrow 2(x+y+z) \le 2z+xy+4 \quad (1)$

Lại có

$$xyz = abc+\frac{1}{abc}+x+y+z \ge 2+x+y+z \ge 2+2\sqrt{xy}+z \Rightarrow z(xy-1) \ge 2\left(\sqrt{xy}-1\right)$$

$$\Rightarrow z\left(\sqrt{xy}-1\right) \ge 2 \Rightarrow 4+2z \ge 2\sqrt{yz.zx} \le yz+zx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $2(x+y+z) \le 2z+xy+4 \le xy+yz+zx$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, hay $a=b=c=1$

■

<u>BÀI ST 4.</u> *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c \ge abc+2$$

NGUYỄN ANH TUẤN

<u>LỜI GIẢI (VIMF).</u>

Đặt $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc$ thì $a^2+b^2+c^2=3 \Leftrightarrow p^2-2q=3 \Leftrightarrow q=\frac{p^2-3}{2}$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có một bất đẳng thức quen thuộc là

$$2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2) \ge a^3+b^3+c^3+9abc \Leftrightarrow 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\ge (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+18abc \Leftrightarrow 3pq \ge 3p+18r \Leftrightarrow \frac{p(p^2-3)}{2} \ge p+6r$$

$$\Rightarrow r \le \frac{p^3-3p}{12}-\frac{p}{6}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $p \ge r+2$

Theo bất đẳng thức trên thì ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{p^3-3p}{12}-\frac{p}{6} \le p-2 \Leftrightarrow p^3-17p+24 \le 0 \Leftrightarrow (p-3)\left(p+\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right)\left(p-\frac{\sqrt{41}-3}{2}\right) \le 0$$

Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$ suy ra

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \Rightarrow \sqrt{3} \le p \le 3$$

Chú ý rằng $\sqrt{3} > \frac{\sqrt{41}-3}{2}$ nên bất đẳng thức trên là hiển nhiên đúng

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

■

<u>BÀI ST 4.</u> *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh*

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{0,8}+\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^{0,8}+\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^{0,8} \ge 3^{0,2}$$

<u>LỜI GIẢI (VIMF).</u> Theo bất đẳng thức $AM-GM$ 10 số ta có

$$\underbrace{\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{3a}+...+\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{3a}}_{8numbers}+1+1\ge 10.\sqrt[10]{\left(\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{3a}\right)^8}\Rightarrow \frac{8\sqrt{a^2+8bc}+6a}{3a}\ge 10.\sqrt[10]{\left(\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{3a}\right)^8}$$

Hay

$$\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{0,8}\ge \frac{3a.10}{8\sqrt{a^2+8bc}+6a}=\frac{15a}{4\sqrt{a^2+8bc}+3a};$$

Và tương tự ta có

$$\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^{0,8}\ge \frac{15b}{4\sqrt{b^2+8ac}+3b},\ \left(\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^{0,8}\ge \frac{15c}{4\sqrt{c^2+8ab}+3c}.$$

Do đó

$$\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{0,8}+\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^{0,8}+\left(\frac{3c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^{0,8}$$

$$\ge \frac{15a}{4\sqrt{a^2+8bc}+3a}+\frac{15b}{4\sqrt{b^2+8ac}+3b}+\frac{15c}{4\sqrt{c^2+8ab}+3c}$$

$$=\frac{15a^2}{4\sqrt{a^2\left(a^2+8bc\right)}+3a^2}+\frac{15b^2}{4\sqrt{b^2\left(b^2+8ac\right)}+3b^2}+\frac{15c^2}{4\sqrt{c^2\left(c^2+8ab\right)}+3c^2}$$

$$\ge \frac{15(a+b+c)^2}{4\left(\sqrt{a\left(a^3+8abc\right)}+\sqrt{b\left(b^3+8abc\right)}+\sqrt{c\left(c^3+8abc\right)}\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)}(Schwarz)$$

$$\ge \frac{15(a+b+c)^2}{4\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}+3\left(a^2+b^2+c^2\right)}(Bunhiacopxki)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{15(a+b+c)^2}{4\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}+3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge 3$$

Hay

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+10(ab+bc+ca)\ge 4\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên đặt $a=x+y;\ b=y+z;\ c=z+x$. Ta có

* $\left(a+b+c\right)^2=4\left(x+y+z\right)^2=4p^2\left(p=x+y+z\right)$;

* $ab+bc+ca=\left(x+y+z\right)^2+xy+yz+zx=p^2+q(q=xy+yz+zx)$;

* $abc=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=pq-r(\text{r=xyz})$

* $a^3+b^3+c^3+24abc=\left(a+b+c\right)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+27abc=$

$=8p^3-3.2p(p^2+q)+27(pq-r)=2p^3+21pq-27r$

Do đó $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+10(ab+bc+ca)\ge 4\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}$

$\Leftrightarrow \left(4p^2+3\left(p^2+q\right)\right)\ge 2\sqrt{2p\left(2p^3+21pq-27r\right)}\Leftrightarrow \left(7p^2+3q\right)^2\ge 4.2p\left(2p^3+21pq-27r\right)$

$\Leftrightarrow 33p^4+9q^2+216pr\ge 126p^2q$

Mà theo bất đẳng thức $Schur$ thì

$$\left(x+y+z\right)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+xz)\Leftrightarrow p^3+9r\ge 4pq\Leftrightarrow 31,5p^4+283,5pr\ge 126p^2q.$$

Nên ta chỉ cần chứng minh $1,5p^4+9q^2\ge 67,5pr$

Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức $Cauchy - Bunhiacopxki$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

■

<u>BÀI ST 5.</u> *Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^3+b^3+c^3+3abc.\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

<u>LỜI GIẢI 1 (VIMF).</u>

Nếu $a \ge b \ge c$ thì $a^2b+b^2c+c^2a \ge ab^2+bc^2+ca^2$, nên theo bất đẳng thức Schur thì

$$a^3+b^3+c^3+3abc.\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Nếu $c \ge b \ge a$ thì bất đẳng thức được viết lại như sau

$$a^3+b^3+c^3-3abc+3abc.\left(\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}-1\right) \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)-\frac{3abc(a-b)(b-c)(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b-c)(a-b)^2+\frac{1}{2}(b+c-a)(b-c)^2+\frac{1}{2}(c+a-b)(c-a)^2 \ge \frac{3abc(a-b)(b-c)(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2}$$

Theo **tiêu chuẩn 1** trong ***Kĩ thuật phân tích bình phương cho bất đẳng thức hoán vị S.O.C*** thì ta chỉ cần chứng minh

$$2\sqrt{ac}+c+a-b-\frac{3abc(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge 0$$

Quy đồng, rút gọn và nhóm các số hạng lại với nhau ta được bất đẳng thức tương đương là

$$2bc^2\left(\sqrt{ac}-a\right)+ab^2(c-b)+bc^2(c-b)+a^2c^2+a^2b^2+a^3c+2ab^2\sqrt{ac}+2ca^2\sqrt{ac}+2a^2bc \ge 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do $c \ge b \ge a$

Vậy ta có ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhua hoặc một trong 3 biến bằng 0 và 2 biến còn lại bằng nhau.

<u>LỜI GIẢI 2 (dangtrung).</u>

Nếu $a \ge b \ge c$ thì theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có

$$a^3+b^3+c^3+3abc.\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Nếu $a \le b \le c$ thì bất đẳng thức đưa về dạng

$$f(a,b,c)=\sum(a-b)^2(a+b-c)-\frac{6abc(a-b)(b-c)(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\sum(a-b)^2 \ge 6abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

Mà $(a-b)^2 \ge 4(b-c)(c-a)$ và $4\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \ge 6bc(a-b) \Leftrightarrow 2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+3b^2c \ge 3abc$,

hiển nhiên đúng nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $a=0$

Hay cần chứng minh $b^2(b-c)+(b-c)^2(b+c)+c^2(c-b) \ge 0 \Leftrightarrow 2(b+c)(b-c)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

■

<u>BÀI ST 6.</u> *Cho các số thực không âm a, b, c sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh*

$$\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2} \ge \frac{1}{ab+bc+ca}$$

PHẠM KIM HÙNG

Về ***Kĩ thuật phân tích bình phương cho bất đẳng thức hoán vị S.O.C*** các bạn có thể xem thêm trong ***Chuyên đề bất đẳng thức THPT*** **của** ***Diễn Đàn Bất Đẳng Thức Việt Nam www.vimf.co.cc/***

LỜI GIẢI (VÕ QUỐC BÁ CẨN). Ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $4(ab+bc+ca)\ge a^2+b^2+c^2$ thì

$$\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2}=\frac{(a+2c)^2}{(a+2b)^2(a+2c)^2}+\frac{(b+2a)^2}{(b+2c)^2(b+2a)^2}+\frac{(c+2b)^2}{(c+2a)^2(c+2b)^2}$$

$$\ge\frac{9(a+b+c)^2}{(a+2b)^2(a+2c)^2+(b+2c)^2(b+2a)^2+(c+2a)^2(c+2b)^2}(Schwarz).$$

Ta chứng minh

$$9\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right)\ge\sum\left[(a+2b)^2(a+2c)^2\right]\Leftrightarrow 9\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right)\ge\left(\sum a\right)^4+18\left(\sum ab\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum a^2-\sum ab\right)\left(4\sum ab-\sum a^2\right)\ge 0$$ (đúng do $4(ab+bc+ca)\ge a^2+b^2+c^2$)

Trường hợp 2. Nếu $a^2+b^2+c^2\ge 4(ab+bc+ca)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=max\{a,b,c\}$. Ta chứng minh $a\ge 2(b+c)$. Bất đẳng thức này đúng bởi vì nếu ngược lại $a\le 2(b+c)$ thì $a^2+b^2+c^2-4(ab+bc+ca)=a(a-2b-2c)+b(b-a)+c(c-a)-4bc\le 0$

Trở lại bài toán, theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}\ge\frac{2}{(a+2b)(b+2c)}$ nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{2}{(a+2b)(b+2c)}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}\Leftrightarrow b(a-2b-2c)\ge 0$ (đúng do $a\ge 2b+2c$)

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

■

BÀI ST 7. *Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng*

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge\frac{4abc(a^2-b^2)^2}{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

VIMF

LỜI GIẢI (VIMF). Xét

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3+3abc-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)\\
&=a^3+b^3+c^3-a(b^2-bc+c^2)-b(c^2-ca+a^2)-c(a^2-ab+b^2)\\
&=a^3+b^3+c^3-\frac{a(b^3+c^3)}{b+c}-\frac{b(c^3+a^3)}{c+a}-\frac{c(a^3+b^3)}{a+b}\\
&=\frac{ab(a^2-b^2)+ac(a^2-c^2)}{b+c}+\frac{bc(b^2-c^2)+ba(b^2-a^2)}{c+a}\\
&+\frac{ca(c^2-a^2)+cb(c^2-b^2)}{a+b}\\
&=ab(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)+bc(b^2-c^2)\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&+ca(c^2-a^2)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)\\
&=\frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc(b+c)(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca(c+a)(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}
\end{aligned}$$

Bây giờ ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc(b+c)(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca(c+a)(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}\\
&=\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{c}+\frac{(b^2-c^2)^2}{a}+\frac{(c^2-a^2)^2}{b}\right)\\
&\ge\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\frac{(b^2-a^2+b^2-c^2+c^2-a^2)^2}{a+b+c}\\
&=\frac{4abc(a^2-b^2)^2}{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

■

BÀI ST 8. *Chứng minh rằng với mọi a,b,c không âm ta có*

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

DƯƠNG ĐỨC LÂM

LỜI GIẢI 1 (VIMF). Ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. nếu $a^2+b^2+c^2\le 4(ab+bc+ca)$ thì theo bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

đặt $x=a^2+b^2+c^2, y=ab+bc+ca$ thì bất đẳng thức được quy về

$$\frac{9}{x+2y}\ge\frac{1}{y}+\frac{2}{x}\Leftrightarrow 9xy\ge(x+2y)^2\Leftrightarrow(x-y)(x-4y)\le 0$$

do $x\ge y$ và theo giả thiết ở trên $x\le 4y$ ta suy ra bất đẳng thức trên đúng

Trường hợp 2. nếu $a^2+b^2+c^2\ge 4(ab+bc+ca)$ thì suy ra

$$\frac{2}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{1}{2(ab+bc+ca)}$$

suy ra

$$\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{2}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{3}{2}.\frac{1}{ab+bc+ca}$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ab+bc+ca}$$

đến đây theo bất đẳng thức Iran 96 thì
bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức $Iran$ 1996

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{9}{4}.\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ab+bc+ca}$$

LỜI GIẢI 2 (DƯƠNG ĐỨC LÂM).

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$(b^2+bc+c^2)(ab+bc+ca)\le\frac{1}{4}(b+c)^2(a+b+c)^2$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\ge(a+b+c)^4$$

theo bất đẳng thức $Holder$ thì

$$\begin{aligned}&4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\\&=(a^2+b^2+c^2)\big(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\big)\big(a(b+c)+b(c+a)\\&+c(a+b)\big)\left(\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right)\ge(a+b+c)^4\end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 3 (TRẦN QUỐC ANH). Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn là

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{5}{3(ab+bc+ca)}+\frac{4}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Ta viết lại bất đẳng thức

$$\sum\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\sum\frac{bc}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{5}{3}+\frac{4(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Mà theo bất đẳng thức quen thuộc $\sum\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}\ge 2$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{3}+\sum\frac{bc}{b^2+bc+c^2}\geq\frac{4(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Dùng bất đẳng thức $AM-GM$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn là

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sum\frac{bc}{b^2+c^2}\geq\frac{4(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}\Leftrightarrow 3+2\sum\frac{bc}{b^2+c^2}\geq\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow\sum\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}\geq\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Bất đẳng thức này đúng theo $Schwarz$. Phép chứng minh của ta hoàn tất.

■

BÀI ST 9. *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}\geq 3$$

Jaanin

LỜI GIẢI (VIMF). Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}=\frac{a^2+b^2+c}{\sqrt{(a^2+b^2+c)(a+b+c^2)}}\geq\frac{2(a^2+b^2+c)}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}$$

Tương tự cho 2 bất đẳng thức cong lại và cộng lại với nhau ta được

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}\geq\frac{2(a^2+b^2+c^2+a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2+a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}\geq 3$$

Hay $a^2+b^2+c^2\geq a+b+c$

Bất đẳng thức này đúng do $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=a+b+c$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

■

BÀI ST 10. *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=ab+bc+ca$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}\leq\frac{3}{19}$$

dragon1

LỜI GIẢI (NGUYỄN VIỆT HƯNG).

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$, từ điều kiện đề bài ta có $x+y+z=1$ và bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}}\leq\frac{3}{19}$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}}\leq\frac{1}{1+\frac{2}{xy}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2yz}}+\frac{1}{1+\frac{2}{zx}}$$
$$=\frac{xy}{xy+2}+\frac{yz}{yz+2}+\frac{zx}{zx+2}$$

Chú ý rằng với mọi số dương t thì

$$\frac{t}{t+2}-\frac{162}{361}t+\frac{1}{361}=-\frac{2(9t-1)^2}{361(t+2)}\leq 0$$

Nên $\frac{t}{t+2}\leq\frac{162}{361}t+\frac{1}{361}$

Áp dụng bất đẳng thức này với xy,yz,zx thì ta được

$$\frac{xy}{xy+2}+\frac{yz}{yz+2}+\frac{zx}{zx+2}\leq\frac{162}{361}(xy+yz+zx)+\frac{3}{361}\leq\frac{64}{361}(x+y+z)^2+\frac{3}{361}=\frac{3}{19}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$

■

BÀI ST 11. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

LỜI GIẢI 1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xét $f(x) = x(1-x^2)$ với $x \in (0;1)$

Ta có $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0;1)$

Từ đó lập bảng biến thiên ta thấy $f(x) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}, \forall x \in (0;1)$, khi đó ta có

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2 (NGUYỄN ĐỨC TOÀN). Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Ta sẽ chứng minh đại diện cho một bất đẳng thức và tương tự cho 2 bất đẳng thức còn lại

$$\frac{a}{1-a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\Leftrightarrow a(1-a^2)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$a^2(1-a^2)^2=\frac{1}{2}.2a^2.(1-a^2)(1-a^2)\le\frac{1}{2}.\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

Hay

$$a(1-a^2)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Phép chứng minh của ta hoàn tất.

LỜI GIẢI 3 (VIMF). Ta có

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$$

Từ bất đẳng thức đúng $\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\ge 0$, ta được $1-a^2\le-\frac{2}{\sqrt{3}}a+\frac{4}{3}$, tương tự đối với $1-b^2$ và $1-c^2$ ta thu được

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{a}{-\frac{2}{\sqrt{3}}a+\frac{4}{3}}+\frac{b}{-\frac{2}{\sqrt{3}}b+\frac{4}{3}}+\frac{c}{-\frac{2}{\sqrt{3}}c+\frac{4}{3}}$$

Theo bất đẳng thức $Schwarz$ thì

$$\frac{a}{-\frac{2}{\sqrt{3}}a+\frac{4}{3}}+\frac{b}{-\frac{2}{\sqrt{3}}b+\frac{4}{3}}+\frac{c}{-\frac{2}{\sqrt{3}}c+\frac{4}{3}}=\frac{a^2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}a^2+\frac{4}{3}a}+\frac{b^2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}b^2+\frac{4}{3}b}+\frac{c^2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}c^2+\frac{4}{3}c}$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)+\frac{4}{3}(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}(a+b+c)}$$

Và ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}(a+b+c)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức hiển nhiên đúng $\left(a+b+c-\sqrt{3}\right)^2\ge 0$.

Phép chứng minh của ta hoàn tất.

■

Giải Toán Như Thế Nào?

ĐẾN ... BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

VIMF

LTG. *Trong kì thi Toán Quốc tế (IMO) năm 2008 có câu 2 là một bài toán bất đẳng thức khá hay. Bài toán này có rất nhiều cách giải nhưng tư tưởng chính vẫn là đưa về bình phương của một tổng* $\left(x^2 \geq 0\right)$. *Trong bài này, tôi xin giới thiệu với các bạn một lời giải như thế và một lời giải khác nữa cũng đẹp mắt bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki – Cauchy – Schwarzt , và phần cuối sẽ là bài toán tổng quát. Chúng ta cùng bắt đầu với*

BÀI TOÁN *. *Cho* x, y, z *là các số thực khác 1 và thoả mãn* $xyz = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

LỜI GIẢI 1 (VIMF). Do $xyz = 1$ nên đặt $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}; u=\frac{a+b}{a-b}, v=\frac{b+c}{b-c}, \mathrm{w}=\frac{c+a}{c-a}$

Ta có

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}+1\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}+1\right)^2\right]\geq 1 \Leftrightarrow u^2+v^2+w^2+2(u+v+w)\geq 1$$

Lại có $(u+1)(v+1)(w+1)=(u-1)(v-1)(w-1) \Rightarrow uv+vw+wu=-1$

Do đó

$$u^2+v^2+w^2+2(u+v+w)\geq 1 \Leftrightarrow (u+v+w)^2+2(u+v+w)-2(uv+vw+wu)\geq 1$$

$$\Leftrightarrow (u+v+w)^2+2(u+v+w)+2-1\geq 0 \Leftrightarrow (u+v+w+1)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

LỜI GIẢI 2 (VÕ QUỐC BÁ CẨN).

Cũng như trên ta phải chứng minh $\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\geq 1$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki – Cauchy – Schwarzt thì

$$\left[\sum\left((a-b)^2(a-c)^2\right)\right]\left[\sum\frac{a^2}{(a-b)^2}\right]\geq\left[\sum\left(a(a-c)\right)\right]^2=\left(\sum a^2-\sum ac\right)^2$$

Lại có

$$\sum\left((a-b)^2(c-a)^2\right)=\left[\sum\left((a-b)(c-a)\right)\right]^2-2\sum\left((a-b(c-a)(b-c)(b-c)\right)$$

$$=\left[\sum\left((a-b)(c-a)\right)\right]^2+2(a-b)(b-c)(c-a)(a-b+b-c+c-a)=\left[\sum\left((a-b)(c-a)\right)\right]^2=\left(\sum a^2-\sum ac\right)^2$$

Do đó $\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\geq 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Trên đây là hai lời giải đẹp mắt cho bài toán *. Tuy nhiên chưa dừng lại, ta muốn tìm một bài toán tổng quát hơn. Và như mong đợi, chúng ta có

BÀI TOÁN **. *Cho x, y, z là các số thực khác 1 và thoả mãn $xyz = 1$, và số thực bất kì m. Chứng minh*

$$\left(\frac{x+m}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y+m}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z+m}{z-1}\right)^2 \geq 1$$

LỜI GIẢI (VIMF). Đặt $a = \frac{x+m}{x-1}, b = \frac{y+m}{y-1}, c = \frac{z+m}{z-1}$ thì $x = \frac{a+m}{a-1}, y = \frac{b+m}{b-1}, z = \frac{c+m}{c-1}$

Do $xyz = 1$ nên $\frac{a+m}{a-1}.\frac{b+m}{b-1}.\frac{c+m}{c-1} = 1 \Leftrightarrow (m+1)(ab+bc+ca) + \left(m^2-1\right)(a+b+c) + m^3 + 1 = 0(1)$

+ Nếu $m = -1$ thì BĐT hiển nhiên đúng

+ Nếu $m \neq -1$ thì từ (1) suy ra $-(ab+bc+ca) = \left(m-1\right)(a+b+c) + m^2 - m + 1$

Ta có

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 + 2\left(m-1\right)(a+b+c) + 2m^2 - 2m + 2$$

$$= (a+b+c+m-1)^2 + m^2 + 1 \geq m^2 + 1 \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

NHẬN XÉT. Rõ ràng bài toán ** tổng quát cho bài toán * (với trường hợp riêng $m = 0$, và điều kiện để đẳng thức xảy ra trong bài toán ** cũng là $m = 0$). Việc đánh giá $VT \geq m^2 + 1 \geq 1$là một điều rất hay. Các bạn hãy giải bài toán ** theo hướng của lời giải 1 của bài toán *, xem như bài tập.

Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje. Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities, Vol 1, GLI publishing house, 2004.*

[2] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức , nhà xuất bản Trẻ, 2006.*

[3] Các tài liệu Olympic online:
- www.mathlinks.ro/
- www.vnineqmath.hnsv.com/
- www.vimf.co.cc/
- www.truongtructuyen.vn/