Dạng toán: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC MŨ_ LOGARITH

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

1) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}\ \left(\forall x \geq 0\right)$

2) Hàm số $y = f(x) = 5^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ đồng biến trên R.

Bài giải:

1) Xét hàm số $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ với $x \geq 0$, ta có:

$f^{/}(x) = e^x - 1 - x; f^{//}(x) = e^x - 1 \Rightarrow f^{//}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên suy ra: $f^{//}(x) \geq f^{//}(0) = 0 \Rightarrow f^{/}(x) \geq f^{/}(0) = 0\ \left(\forall x \geq 0\right)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0\ \left(\forall x \geq 0\right)$ (đ.p.c.m)

2) TXĐ: $D = R$.

Ta có:

$$y^{/} = f^{/}(x) = \left(5^x \ln 5\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + 5^x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = 5^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\ln 5 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x \geq 0 \\ \ln 5 > 1 > \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \ln 5 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{cases} \Rightarrow f^{/}(x) > 0\ \left(\forall x \in R\right)$

Vậy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên R (đ.p.c.m)

Bài tập 2: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b} \leq 2\sqrt{\ln\dfrac{a+b}{2}}\ \left(\forall a, b > 1\right)$

2) $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}\ \left(\forall a, b > 1\right)$

3) $\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) > \dfrac{2y}{2x+y}\ \left(\forall x, y > 0\right)$

4) $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a\ \left(\forall a \geq b > 0\right)$

Bài giải:

1) Ta có: $\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b} \leq \sqrt{2\left(\ln a + \ln b\right)} = \sqrt{2\ln ab} \leq \sqrt{2\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\ln\dfrac{a+b}{2}}$

Dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow a = b$.

2) Ta có: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow a^{\log_b c} + c^{\log_a b} = c^{\log_b a} + c^{\log_a b} \geq 2\sqrt{c^{\log_b a}.c^{\log_a b}} \geq 2c$

Tương tự: $a^{\log_b c} + b^{\log_a c} \geq 2a$, $b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 2b$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có:

$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

3) Đặt $t = \dfrac{x+y}{x} > 1 \Rightarrow tx = x + y \Leftrightarrow y = x\left(t - 1\right)$

Do đó: $\frac{2y}{2x+y}=\frac{2x(t-1)}{2x+x(t-1)}=2\frac{t-1}{t+1}$

Bài toán trở thành chứng minh: $\ln t>2\frac{t-1}{t+1}\ \left(\forall t>1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\ln t-2\frac{t-1}{t+1}\ \left(\forall t\geq 1\right)$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0\ \left(\forall t\geq 1\right)\Rightarrow f(t)\geq f(1)=0\ \left(\forall t\geq 1\right)$

hay $\ln t>2\frac{t-1}{t+1}\ \left(\forall t>1\right)$ (đ.p.c.m)

4) Ta có BĐT cần chứng minh tương đương với

$\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^b\leq\left(2^b+\frac{1}{2^b}\right)^a\Leftrightarrow\left(4^a+1\right)^b\leq\left(4^b+1\right)^a\Leftrightarrow b\ln\left(4^a+1\right)\leq a\ln\left(4^b+1\right)$

$\Leftrightarrow\frac{\ln\left(4^a+1\right)}{a}\leq\frac{\ln\left(4^b+1\right)}{b}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\frac{\ln\left(4^t+1\right)}{t}\ \left(t>0\right)$.

Ta có: $f'(t)=\frac{4^t\ln\left(4^t+1\right)-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{t^2\left(4^t+1\right)}<0\ \left(\forall t>0\right)$

nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Vậy: $a\geq b>0\Leftrightarrow f(a)\leq f(b)\Leftrightarrow\frac{\ln\left(4^a+1\right)}{a}\leq\frac{\ln\left(4^b+1\right)}{b}$ (đ.p.c.m)

Bài tập 3: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\frac{1}{x}+\ln x\ \left(\forall x>0\right)$ 2) $\frac{x}{1+x}<\ln\left(1+x\right)<x\ \left(\forall x>0\right)$

3) $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+b}>\left(\frac{a}{b}\right)^{\mathrm{b}}\ \left(\forall x,a,b>0,\ a\neq b\right)$ 4) $\left(2^x+3^x\right)^y<\left(2^y+3^y\right)^x\ \left(\forall x>y>0\right)$

5) $x^x\geq\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\ \left(\forall x>1\right)$

Bài giải:

1) Xét hàm số $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{x}-\ln x\ \left(\forall x>0\right)$

Ta có: $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}x^2}>0\ \left(\forall x>0\right)\Rightarrow f(x)$ là hàm tăng trên $\left(0;+\infty\right)$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f(x)<0\ \forall x>0.$

2) Xét hai hàm số $f(x)=\ln(1+x)-x$ và $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$ với $x>0$.

3) Xét hàm số $f(x)=\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+b}\Rightarrow \ln f(x)=(x+b)\ln\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{b-a}{x+a}\Rightarrow f'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{b-a}{x+a}\right]f(x)$$

Đặt $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)+\dfrac{b-a}{x+a}\Rightarrow g'(x)=-\dfrac{(b-a)^2}{(x+a)^2(x+b)}<0$, suy ra $g(x)$ nghịch biến,

mà $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0.$

$\Rightarrow g(x)>0\ (\forall x>0)\Rightarrow f'(x)>0\ (\forall x>0)$ suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x)>f(0)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^b\ (\forall x>0)$ (đ.p.c.m)

4) Ta có: $\left(2^x+3^x\right)^y<\left(2^y+3^y\right)^x\Leftrightarrow 2^{xy}\left[1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]^y<2^{xy}\left[1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^y\right]^x$

$$\Leftrightarrow\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^y<\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]^x\Leftrightarrow\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}<\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]^{\frac{1}{y}}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\ln\left(1+a^x\right)<\frac{1}{y}\ln\left(1+a^y\right)\ (1)$$

với $a=\dfrac{3}{2}$.

Đặt $f(t)=\dfrac{1}{t}\ln\left(1+a^t\right)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{a^t\ln\left(1+a^t\right)-\left(1+a^t\right)\ln\left(1+a^t\right)}{t^2}<0\ (\forall t>0)$

Vậy $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ mà $x>y>0\Rightarrow f(x)<f(y)$ vậy (1) đúng nên BĐT được chứng minh.

5) Ta có

$$x^x\geq\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\Leftrightarrow x\ln x-(x+1)\ln\frac{x+1}{2}>0\Leftrightarrow x\ln x-(x+1)\ln(x+1)+(x+1)\ln 2>0$$

Khảo sát hàm số $f(x)=x\ln x-(x+1)\ln(x+1)+(x+1)\ln 2\ (\forall x\geq 1)$ ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 4: Chứng minh với $a,\ b,\ c>0$ ta có: $a^a.b^b.c^c\geq(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$

Bài giải:

Vì hàm số $y=\lg x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Ta lấy logarith với cơ số 10 hai vế của BĐT trên ta được BĐT tương đương cần được chứng minh:

$3(a\lg a+b\lg b+c\lg c)\geq(a+b+c)(\lg a+\lg b+\lg c)$.

Ta có:

$$\left(a-b\right)\left(\lg a-\lg b\right)\geq 0 \Leftrightarrow a\lg a+b\lg b\geq a\lg b+b\lg a \quad (1)$$

$$\left(b-c\right)\left(\lg b-\lg c\right)\geq 0 \Leftrightarrow b\lg b+c\lg c\geq b\lg c+c\lg b \quad (2)$$

$$\left(c-a\right)\left(\lg c-\lg a\right)\geq 0 \Leftrightarrow c\lg c+a\lg a\geq c\lg a+a\lg c \quad (3)$$

$$a\lg a+b\lg b+c\lg c=a\lg a+b\lg b+c\lg c \quad (4)$$

Cộng (1), (2), (3) và (4) vế theo vế ta được đ.p.c.m.

Bài tập 5:

a) Chứng minh với $a,\ b>1$ thì với mọi $c\geq 0$ ta có $\log_a b\geq \log_{a+c} b$ và dấu đẳng thức xãy ra khi $c=0$.

b) Chứng minh rằng với $b\geq a>1$ thì với mọi $c\geq 0$ ta có $\log_a b\geq \log_{a+c}\left(b+c\right)$ và dấu đẳng thức xãy ra khi $c=0$ hoặc $a=b$.

c) Không dùng bảng số và máy tính, chứng tỏ rằng $\frac{3}{2}\log_3 29<2+\log_2 7$.

d) Tìm x thỏa mãn phương trình $\log_{2x^2-4x+4}\left(3x^2-6x+5\right)=\log_{3x^2-6x+5}\left(4x^2-8x+6\right)$

Bài giải:

a) Vì $a,\ b>1$ và $c\geq 0$ nên $\log_b\left(a+c\right)\geq \log_b a$. Dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow c=0$.

Do đó: $\dfrac{1}{\log_b\left(a+c\right)}\leq \dfrac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b\geq \log_{a+c} b$ (đ.p.c.m)

b) Ta có: $\log_a b\geq \log_{a+c}\left(b+c\right)\Leftrightarrow \log_a b-1\geq \log_{a+c}\left(b+c\right)-1\Leftrightarrow \log_a \dfrac{b}{a}\geq \log_{a+c}\dfrac{b+c}{a+c}$

Vì $b\geq a>1,\ c\geq 0$ suy ra $\dfrac{b+c}{a+c}\geq 1$ và $\dfrac{b}{a}\geq \dfrac{b+c}{a+c}$, do đó:

$$\log_a \frac{b}{a}\geq \log_a \frac{b+c}{a+c}\geq \log_{a+c}\frac{b+c}{a+c} \text{ (theo câu a)}$$

Rõ ràng dấu đẳng thức xãy ra khi chỉ khi $c=0$ hoặc $a=b$.

c) Ta có

$$\frac{3}{2}\log_3 29<2+\log_2 7\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_3 29<\log_2 28\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3 29<\frac{1}{3}\log_2 28\Leftrightarrow \log_9 29<\log_8 28$$

Áp dụng BĐT ở câu b) với $a=8,\ b=28,\ c=1$ ta suy ra đ.p.c.m.

d) Ta có:

$$\log_{2x^2-4x+4}\left(3x^2-6x+5\right)=\log_{3x^2-6x+5}\left(4x^2-8x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x^2-4x+4}\left(3x^2-6x+5\right)=\log_{2x^2-4x+4+\left(x+1\right)^2}\left[\left(3x^2-6x+5\right)+\left(x+1\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x+4=3x^2-6x+5 \\ \left(x+1\right)^2=0 \end{array}\right. \quad \left(\text{Theo kết quả câu b)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Bài tập 6: Chứng minh với $a,\ b,\ c > 1$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)^{\frac{3}{2}}$:

$$\log_{a+b} a + \log_{b+c} b + \log_{c+a} c < \frac{3}{2}$$

Bài giải:

Ta có, *theo bài tập 5*, ta có:

$$\log_a(a+b) > \log_{a+c}(a+b+c) \Rightarrow \log_{a+b} a < \log_{a+b+c}(a+c) \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$\log_{b+c} b < \log_{a+b+c}(a+b) \quad (2)$$

$$\log_{c+a} c < \log_{a+b+c}(b+c) \quad (3)$$

Cộng vế theo vế các BĐT (1), (2) và (3), kết hợp với giả thiết, ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 7: Chứng minh với mọi $\forall x \in (0;1)$ ta có:

$$x^n.\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}$$

Bài giải:

BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow 2n(1-x)x^{2n} < \frac{1}{e}$. Ta có:

Theo BĐT Cauchy:

$$2n(1-x)x^{2n} = (2n-2nx).\underbrace{x.x...x}_{2n} \le \left[\frac{(2n-2nx)+2nx}{2n+1}\right]^{2n+1} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

Ta cần chứng minh: $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} < \frac{1}{e}$ hay $(2n+1)\left[\ln 2n - \ln(2n+1)\right] < -1$

hay $\ln(2n+1) - \ln 2n > \frac{1}{2n+1}$.

Xét hàm số $f(x) = \ln x,\ (2n \le x \le 2n+1)$ có $f'(x) = \frac{1}{x}$

Theo định lí La-gơ-răng thì $\exists c \in (2n;2n+1)$ để: $\frac{\ln(2n+1)-\ln 2n}{(2n+1)-2n} = \frac{1}{c}$

mà $c < 2n+1$ nên $\frac{1}{c} > \frac{1}{2n+1}$ suy ra đ.p.c.m

Bài tập 8: Chứng minh với $x > 0,\ a > 1$ ta có:

$$a^x > 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + ... + \frac{(x\ln a)^n}{n!}$$

Bài giải:

Ta có: $a^x = e^{x\ln a}$ và đặt $t = x\ln a > 0$.

BĐT cần chứng minh trở thành: Với $t > 0$, ta có: $e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^n}{n!}$

Chứng minh bằng quy nạp $f_n(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - ... - \frac{t^n}{n!}$ $\left(\forall t > 0\right)$ (*)

Với $n = 1: f_1(t) = e^t - 1 - t \Rightarrow f_1^/(t) = e^t - 1 > 0$ $\left(\forall t > 0\right)$

Suy ra $f_1(t)$ đồng biến trên $\left[0; +\infty\right) \Rightarrow f_1(t) > f_1(0) = 0$. BĐT (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử (*) đúng đến $n = k \in N^*$, tức là $f_k(t) > 0$ $\left(\forall t > 0\right)$.

Ta cần chứng minh (*) đúng đến $n = k+1 \in N^*$, tức là $f_{k+1}(t) > 0$ $\left(\forall t > 0\right)$.

Thật vậy, ta có: $f_{k+1}(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - ... - \frac{t^k}{k!} - \frac{t^{k+1}}{\left(k+1\right)!}$

$\Rightarrow f_{k+1}^/(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - ... - \frac{t^k}{k!} = f_k(t) > 0$ $\left(\forall t > 0\right)$ (theo giả thiết quy nạp)

Vậy $f_{k+1}(t)$ đồng biến trên $\left[0; +\infty\right) \Rightarrow f_{k+1}(t) > f_{k+1}(0) = 0$ (đ.p.c.m)

<u>Bài tập 9:</u> Chứng minh rằng với $0 < a < b$ ta có:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Bài giải:

BĐT cần chứng minh tương đương với $\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$ (*)

Xét hàm số $f(x) = \ln x,\ x \in \left[a; b\right]$. Rõ ràng $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\left[a; b\right]$ và ta có $f^/(x) = \frac{1}{x}$ $\left(\forall x \in \left(a; b\right)\right)$, vậy tồn tại $c \in \left(a; b\right)$ để $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}$.

Mà $0 < a < c < b$ nên $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$. Từ đây, BĐT (*) được chứng minh.