1 Câu V - Đề thi Đại học khối A năm 2011

Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y$, $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$. [1]

2 Nhiều cách giải câu Bất đẳng thức đề thi ĐH khối A năm 2011

2.1 Đáp án của Bộ Giáo dục: Dồn biến

Trước hết, ta chứng minh với a, b dương và $ab \geq 1$ ta luôn có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức đã cho tương đương với $(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ luôn đúng với a, b dương và $ab \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức trên với x và y thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y$, ta có

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{1}{2+\frac{3y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1 \quad (1)$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$, $t \in [1; 2]$. Khi đó $P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1}$, $t \in [1; 2]$[2].

Ta có $f'(t) = \frac{-2[t^3(4t-3)+3t(2t-1)+9]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0$.

Suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $\frac{x}{y} = 4 \quad (2)$.

Do đó $P \geq \frac{34}{33}$. Từ (1) và (2) suy ra dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 4, y = 1, z = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$ khi $x = 4, y = 1, z = 2$.

2.2 Cách 1:

Xét hàm số

$f(x) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3y}{(2x+3y)^2} - \frac{z}{(z+x)^2}$

[1] Ý tưởng của đề này giống với câu 14, trang 7 trong cuốn Algebraic Inequalities của Vasile Cirtoaje: Cho $a, b, c \in [\frac{1}{3}; 3]$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$. Đáp án của Bộ cùng ý tưởng với cách giải trong cuốn sách này. Xem thêm phần phụ lục.

[2] Để tránh việc khảo sát cồng kềnh này ta có thể xét hiệu $f(t) - f(2) = \frac{(2-t)(35t^2-27t+48)}{33(3+2t^2)(t+1)} \geq 0, \forall t \in [1; 2]$.

Ta sẽ chứng minh

$3y(x+z)^2 \leq z(2x+3y)^2$

$\Leftrightarrow z(4x^2+9y^2)+6xyz \geq 3yx^2+3yz^2$

$\Leftrightarrow z(2x-3y)^2+3y(4z-x)+3yz(2x-z) \geq 0$ luôn đúng vì $z \leq x \leq 4z$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng [1;4]

$\Rightarrow f(x) \geq f(4) = \frac{4}{3y+8} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+4} = f(y)$

$\Rightarrow f'(y) = \frac{z}{(y+z)^2} - \frac{12}{(3y+8)^2}$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh

$z(3y+8)^2 \geq 12(y+z)^2$

$\Leftrightarrow z(48-12z)+9y^2(z-1)+3y(8z-y) \geq 0$ bởi vì $4 \geq z \geq 1; y \leq 4z$

$\Rightarrow f(y)$ đồng biến trên khoảng [1;4]

$\Rightarrow f(y) \geq f(1) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+z} + \frac{z}{z+4} \geq \frac{34}{33}$

2.3 Cách 2

Ta chứng minh $\frac{t}{2t+3} \geq \frac{3}{121}t - \frac{32}{121}$

Thay t bởi $\frac{x}{y}$ ta có: $\frac{x}{2x+3y} \geq \frac{3x}{121y} - \frac{32}{121}$

Ta chứng minh $\frac{t}{t+1} \geq \frac{4t}{9} + \frac{5}{18}$

Thay t bởi $t = \frac{y}{z}; t = \frac{z}{x}$ ta có:

$\frac{y}{y+z} \geq \frac{4y}{9z} + \frac{5}{18}$

và $\frac{z}{z+x} \geq \frac{4z}{9x} + \frac{5}{18}$

Do đó $F \geq \frac{3x}{121y} + \frac{4y}{9z} + \frac{4z}{9x} + \frac{634}{2178}$.

Kết hợp với $\frac{x}{8y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{3}{2}$ và $\frac{x}{y} \leq 4$

Tiếp tục khảo sát ta có giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$.

2.4 Cách 3

Đặt $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{x}{z}$. Ta có $a, b \in [1;4]$ và $P = \frac{a}{2a+3} + \frac{b}{a+b} + \frac{1}{1+b}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{a}{2a+3} + \frac{b}{a+b} \geq \frac{4}{11} + \frac{b}{4+b}$ với mọi $a, b \in [1;4]$.

Sau đó ta sẽ chứng minh $\frac{b}{b+4} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{3}$. Từ đó ta có giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$ khi $x = 4; y = 1; z = 2$.

2.5 Cách 4

Xét $P(z) == \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Nếu $x = y \in [1;4]$ thì $P(z) = \frac{6}{5}$ với mọi $z \in [1;x]$.

Nếu $x > y$ ta có $P'(z) = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2(x+z)^2}$.

Vì $x > y$ nên $x - y > 0$ và $P'(z) = 0$ khi $z = \sqrt{xy} < x$nên $P(z) \geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$, $t \in [1;2]$ và xét $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-2(4t^4-3t^2+6t^2+6)}{(t+1)^2(2t^2+3)^2} < 0$ với mọi $t \geq 1$.

Suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 4; y = 1; z = 2$.

2.6 Cách 5

Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Ta có $abc = 1$, $a \in [1;4]$, $b, c \in [\frac{1}{4};4]$.

Ta có $P = \frac{a}{2a+3} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = \frac{a}{2a+3} + \frac{1}{ac+1} + \frac{c}{c+1}$.

Nếu $a = 1$ thì $P = \frac{6}{5}$.

Nếu $a \in (1;4]$ thì $P'(c) = \frac{(a-1)(ac^2-1)}{(ac+1)^2(c+1)^2}$. Từ đó suy ra $P(c) \geq P(\frac{1}{\sqrt{a}})$. Việc còn lại là chứng minh $P(\frac{1}{\sqrt{a}}) \geq \frac{34}{33}$.

3 Phụ lục: Chứng minh câu Bất đẳng thức của Vasile Cirtoaje

Đây là lời giải được VNMATH chụp từ cuốn Algebraic Inequalities của Vasile Cirtoaje.

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

Solution. Denote

$$E(a,b,c) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a},$$

and assume, without loss of generality, that $a = \max\{a,b,c\}$. We will show that

$$E(a,b,c) \geq E\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \geq \frac{7}{5}.$$

Hình 1:

We have

$$E(a,b,c) - E\left(a,b,\sqrt{ab}\right) = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} - \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = $$
$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{ab}-c\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(b+c)(c+a)} \geq 0.$$

Let now $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$. From $a,b,c \in \left[\frac{1}{3},3\right]$, we get $x \leq 3$. Hence,

$$E\left(a,b,\sqrt{ab}\right) - \frac{7}{5} = \frac{a}{a+b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{7}{5} = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{2}{x+1} - \frac{7}{5} =$$
$$= \frac{3-7x+8x^2-2x^3}{5(x+1)(x^2+1)} = \frac{(3-x)\left[x^2+(1-x)^2\right]}{5(x+1)(x^2+1)} \geq 0$$

Equality occurs for $(a,b,c) = \left(3,\frac{1}{3},1\right)$ or any cyclic permutation.

Hình 2: