SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET trong chứng minh bất đẳng thức

HUỲNH TẤN CHÂU - NGUYỄN ĐÌNH THI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Nguyên lí Dirichlet được phát biểu như sau:
Nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một chú thỏ.

Từ nguyên lí Dirichlet ta có mệnh đề

Mệnh đề. *Trong ba số thực bất kì x, y, z luôn tìm được hai số có tích không âm.*

Đây là một mệnh đề rất quan trọng trong việc chứng minh bất đẳng thức; bởi khi ta đã chọn được *"điểm rơi"* (tức là đẳng thức của bài toán), chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=k$ thì ta có thể giả sử hai số $(a-k)$, $(b-k)$ có tích $(a-k)(b-k)\geq 0$; từ kết quả này để suy ra BĐT cần chứng minh.

Chúng ta sẽ cùng điểm qua một số thí dụ để thấy được ứng dụng của mệnh đề này trong các bài toán chứng minh BĐT.

★ **Thí dụ 1.** *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải. *Dự đoán "điểm rơi" tại* $a=b=c=1$. Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1$, $b-1$, $c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0$ thì ta có

$$2c(a-1)(b-1)\geq 0 \Leftrightarrow 2abc\geq 2bc+2ca-2c.$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+1\geq 2c+2ab \Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2\geq 0.$$

BĐT trên luôn đúng. Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\geq 2(ab+bc+ca).$$

Thật vậy, theo Mệnh đề thì hai trong ba số a^2-1, b^2-1, c^2-1 có tích không âm. Giả sử $(a^2-1)(b^2-1)\geq 0$ thì có

$$c^2(a^2-1)(b^2-1)\geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2+c^2\geq b^2c^2+c^2a^2.$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+2+b^2c^2+c^2a^2\geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\geq 0.$$

BĐT này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1$.

★ **Thí dụ 2.** *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq (a+1)(b+1)(c+1).$$

Lời giải. Sau khi nhân cả hai vế với 2 và biến đổi thì BĐT trên tương đương với

$$2(a^2+b^2+c^2)+2abc+4\geq 2(ab+bc+ca)+2(a+b+c).$$

Theo thí dụ 1, chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0 \text{ (BĐT này đúng)}.$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

★ **Thí dụ 3.** *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2.$$

Lời giải. BĐT trên tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+2abc+7$$

$$\geq 9(ab+bc+ca).$$ Theo BĐT Cauchy thì

$$2a^2b^2+2+2b^2c^2+2+2c^2a^2+2\geq 4ab+4bc+4ca$$

và $3a^2+3b^2+3c^2\geq 3ab+3bc+3ca$.

Kết hợp với kết quả thí dụ 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

★ **Thí dụ 4.** *Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 3(a+b+c)^2.$$

Lời giải. BĐT đã cho tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+8 \ge 6(ab+bc+ca).$$

Từ nhận xét ở Thí dụ 1, chỉ cần chứng minh

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6 \ge 4\left(ab+bc+ca\right)$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2 \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm1$. ❐

Nhận xét. Các kết quả Thí dụ 3 và Thí dụ 4 là những BĐT làm chặt cho kết quả sau:

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca).$$

(APMO 2004)

★ **Thí dụ 5. (USA 2001)** *Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca-abc \le 2$.*

Lời giải. Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \ge 0$ thì

$$c(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow abc \ge bc+ca-c.$$

Nên $ab+bc+ca-abc \le ab+c$.

Mà $4=a^2+b^2+c^2+abc \ge 2ab+c^2+abc$

$$\Rightarrow 4-c^2 \ge ab(c+2) \Rightarrow 2-c \ge ab \Rightarrow ab+c \le 2.$$

Từ hai BĐT trên suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

★ **Thí dụ 6.** *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1) \ge 1.$$

Lời giải. Theo Mệnh đề, hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát giả sử $(b-1)(c-1) \ge 0$. Khi đó

$$(b^2-b+1)(c^2-c+1)$$
$$=bc(b-1)(c-1)+b^2+c^2-b-c+1$$
$$\ge b^2+c^2-b-c+1 \ge \frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1>0.$$

Do đó $(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)$

$$\ge (a^2-a+1)\left(\frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-a+1)(a^2-4a+5).$$

Nên chỉ cần chứng minh

$$(a^2-a+1)(a^2-4a+5) \ge 2.$$

Sử dụng phương pháp đạo hàm ta thấy BĐT này luôn đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

Nhận xét. Bất đẳng thức trên vẫn đúng với nhiều biến. Các bạn hãy thử chứng minh hai mở rộng sau:

Mở rộng 1. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=r \ge 1$. Chứng minh rằng* với $n \le 13$ thì

$$(x_1^2-x_1+1)(x_2^2-x_2+1)\ldots(x_n^2-x_n+1) \ge (r^2-r+1)^2.$$

Mở rộng 2. *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$(a^p-a+1)(b^p-b+1)(c^p-c+1) \ge 1, \text{ với mọi } p>1.$$

★ **Thí dụ 7. (UK TST 2005).** *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh*

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2} \ge 3.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh hai BĐT sau:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \ge \frac{2}{1+a+b+c}+1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1} \ge 1 \quad (2)$$

Thật vậy

$$\text{BĐT (1)} \Leftrightarrow \frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}$$
$$\ge \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 3.$$

Theo BĐT Cauchy và $abc=1$ thì

$$a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh.

Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1,$ $c-1$ có tích không âm, không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow \frac{c+1}{c}=ab+1\ge a+b.$$

Ta có $(ab-1)^2+(a-b)^2\ge 0$ (đúng).

Từ đó $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}.$

Do đó $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}$

$$\ge\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1.$$

BĐT (2) được chứng minh. *Trở lại bài toán.* BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}\ge 3.$$

Theo (1) và (2) ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}$$

$$\ge\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1$$

$\ge 2+1=3.$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$ □

★ Thí dụ 8. *Cho các số thực không âm bất kì a, b, c. Chứng minh rằng*

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\ge a+b+c.$$

Lời giải. Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1.$$

Vậy để hoàn tất bài toán chỉ cần chứng minh

$$c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\ge a+b+c$$

hay $\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\ge(a+b-2)(1-c).$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge\frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2$$

$$\ge\sqrt{2}\left|(a+b-2)(1-c)\right|\ge\sqrt{2}(a+b-2)(1-c).\ \square$$

BÀI TẬP

1. (IRAN 2002) *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c\le 3.$$

2. (MOSKVA 2000) *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca).$$

3. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{ab+bc+ca+1}\ge 1.$$

4. (VMO 2006) *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(a+b+c).$$

5. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6abc}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge 5.$$

6. *Cho các số thực dương x,y,z sao cho $x+y+z+1=4xyz$. Chứng minh rằng $xy+yz+zx\ge x+y+z.$*

7. (VMO 1996). *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.*

Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca.$

8. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2.$$

9. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c+\frac{1}{4}\min\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}\le 3.$$

10. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{2a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{2b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{2c+a}\right)^3\ge\frac{1}{9}.$$

11. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)$$

$$+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge 3.$$