

CHUYÊN ĐỀ QUY NẠP TRONG HÌNH HỌC

PHẦN THỨ NHẤT

MỞ ĐẦU

1) Lý do cho đề tài:

Quy nạp toán học là một trong những phương pháp chứng minh rất mạnh và có nhiều ứng dụng. Học sinh được làm quen với quy nạp toán học ngay từ cấp trung học cơ sở. Tuy nhiên học quy nạp toán học và ứng dụng rộng rãi nó phải bắt đầu từ lớp 10 đối với học sinh chuyên Toán và lớp 11 đối với học sinh không chuyên. Ta có thể tìm thấy ứng dụng của phương pháp quy nạp vào chứng minh bất đẳng thức, vào chứng minh tính chia hết, vào tính tổng của các tổng hữu hạn. Quy nạp còn được ứng dụng rộng rãi vào trong nghiên cứu dãy số và dãy đa thức. Xét cho cùng ở đâu có sự phụ thuộc theo chỉ số $n \in \mathbb{N}$ thì ở đó ý tưởng quy nạp được hiện hữu.

Ứng dụng của phương pháp quy nạp vào trong hình học thì theo cá nhân tôi có lẽ là một ứng dụng rất tốt. Nó không chỉ được ứng dụng để tính toán hình học đơn thuần mà còn áp dụng trong chứng minh định lý hình học , trong giải các bài toán dựng hình, quỹ tích, trong hình học tổ hợp .Tuy nhiên mức độ quan tâm chưa nhiều đối với học sinh và kể cả giáo viên Toán. Điều đó được minh chứng bằng sự xuất hiện rất ít của các tài liệu, các bài toán viết về phạm trù này. Và nếu xuất hiện thì thường là những bài toán hình học có độ khó nhất định. Theo tôi thì cái khó của quy nạp hình học có nhiều lý do. Có thể do nguyên nhân là mức độ va chạm với vấn đề ít hơn so với các mảng khác. Thêm nữa để dùng phương pháp quy nạp hình học một cách có hiệu quả, đòi hỏi phải có sự tư duy về mặt hình học, bên cạnh các kỹ năng đọc hình, phân chia, lắp ghép các hình cũng rất quan trọng. Chính những điều này đã tạo ra tâm lý e ngại cho học sinh khi tiếp xúc chúng. Sau một năm về công tác tại trường Trung học phổ thông chuyên Hùng Vương , có điều kiện tiếp xúc với học sinh chuyên Toán, tôi mạnh dạn viết đề tài này nhằm cung cấp cho học sinh một phương pháp hiệu quả trong nghiên cứu các bài toán hình học. Bên cạnh đó cũng trang bị

cho cá nhân một tài liệu riêng trong quá trình giảng dạy , bồi dưỡng. Đó chính là những lý do căn bản nhất để tôi quyết định viết chuyên đề *Quy nạp trong hình học*.

2) Nội dung nghiên cứu.

Đề tài nghiên cứu về nội dung hình học phẳng dưới góc độ quy nạp. Đây là sự kết hợp giữa đại số và hình học, cho thấy tính thống nhất hữu cơ giữa hai phân môn toán.

2.1) Khách thể nghiên cứu.

Đề tài nghiên cứu trên khách thể là học sinh trung học phổ chuyên, đối tượng chủ yếu là lớp luyện thi đại học và lớp bồi dưỡng học sinh giỏi. Quá trình giảng dạy các lớp bồi dưỡng học sinh giỏi nên khi viết đề tài này, muốn giới thiệu các em một ứng dụng rất tốt của phương pháp quy nạp mà các em chưa để ý nhiều.

2.2) Tác động được thực hiện.

+ Hiện trạng :

Học sinh đã được học về phương pháp quy nạp toán học, tuy nhiên các ví dụ minh họa và các bài toán các em gặp thường dưới góc độ đại số và số học. Còn ở góc độ hình học thì đây là một vấn đề mới mẻ. Chính vì thế khi gặp những bài toán hình học mà phát biểu theo kiểu đệ quy như thế này thì các em thường rất lúng túng. Tuy nhiên theo tham khảo của tác giả thì các bài toán dùng quy nạp hình học lại xuất hiện khá nhiều trong các kỳ thi học sinh giỏi.

+ Cơ sở khoa học:

Cơ sở khoa học là các kiến thức về hình học phẳng, về lượng giác và về phương pháp quy nạp toán học mà các em đã được học trong chương trình THCS, THPT .

Các kiến thức nền tảng của những lĩnh vực mà đề tài nghiên cứu .

+ Cơ sở thực tiễn:

Cơ sở thực tiễn là những nội dung kiến thức học sinh gặp phải cần giải quyết trong các lớp luyện thi và lớp bồi dưỡng học sinh giỏi.

2.3) Những thuận lợi và khó khăn khi thực hiện đề tài.

+ Thuận lợi:

Được sự quan tâm chỉ đạo của ban giám hiệu nhà trường. Được sự động viên giúp đỡ, đóng góp ý kiến của thầy tổ trưởng và thầy cô khác trong bộ môn Toán, nhất là sự giới thiệu về các tài liệu tham khảo để có thể chọn lọc những ví dụ hay làm minh họa.

Được tạo điều kiện trong việc giảng dạy các lớp luyện thi và lớp bồi dưỡng học sinh giỏi, qua đó học sinh có điều kiện tiếp xúc với những kiến thức trong đề tài thường xuyên, do đó đề tài có điều kiện áp dụng thực tế giảng dạy nhiều hơn.

Mặt bằng chung của học sinh trường chuyên là học sinh khá , giỏi nên việc các em nắm bắt vấn đề tương đối nhanh chóng.

+ Khó khăn:

Các em hầu như chỉ để ý tới quy nạp trong đại số và số học, còn trong hình học thì chưa tiếp xúc được nhiều. Vì thế khi triển khai các em thường ái ngại.

Kiến thức nền tảng về hình học phẳng của các em thường không được tốt bằng các phân môn khác, do tính trực quan sinh động lẫn tư duy trừu tượng cao của bộ môn.

Thời gian dành cho nội dung quy nạp trong chương trình hạn chế nên việc triển khai gặp phải nhiều khó khăn về mặt thời gian.

Các tài liệu trước đó viết về ứng dụng của quy nạp trong hình học rất ít, kể cả nguồn internet nên việc sưu tầm, chọn lọc các ví dụ minh họa điển hình gặp phải nhiều khó khăn, bế tắc, thậm chí đôi khi tưởng như không thực hiện được.

3) Phương pháp nghiên cứu đề tài.

Để nghiên cứu đề tài này , tác giả đã phối hợp các phương pháp:

- Phương pháp tiếp cận vấn đề.
- Phương pháp phân tích , bình luận
- Phương pháp tổng hợp, hệ thống hóa
- Phương pháp chọn lọc .

3.1) Phương pháp tiếp cận vấn đề .

Đề tài này được tác giả ấp ủ từ trước đó khá lâu, khi tác giả còn tham gia giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi ở các trường phổ thông không chuyên. Từ đó đến nay, tác giả đã tiếp

cận với nhiều khóa học trò, tiếp cận với nhiều đề thi học sinh giỏi , từ đó rút ra được nhiều nội dung hơn, có sự đánh giá ngày càng toàn diện hơn. Đặc biệt năm nay được tham gia giảng dạy và bồi dưỡng ở trường chuyên, là môi trường bồi dưỡng học sinh giỏi chuyên nghiệp nhất tỉnh, tác giả đã cố gắng hiện thực hóa ý tưởng của nhiều năm trước thành một chuyên đề. Qua phân tích và giải đề thi, giúp tác giả có được nhiều ví dụ dẫn chứng cho dạng bài tập mà mình đưa ra. Từ đó đề tài có nội dung phong phú và đa dạng hơn.

Các nội dung ứng dụng khác nhau được trình bày theo dạng các bài học § , nhằm tránh sự nặng nề không cần thiết cho học sinh. Cuối mỗi bài có phần bài tập đề nghị để học sinh có thể tự rèn luyện kiến thức và kỹ năng cho mình.

3.2) Phương pháp phân tích , bình luận.

Trước khi đi vào mỗi dạng , tác giả thường đưa ra những **phân tích** của mình về các vấn đề thường gặp của dạng đó. Khái quát phương pháp giải cũng như chỉ ra các việc cần làm khi giải. Học sinh sẽ bước đầu hình dung được nội dung phương pháp giải tổng quát của vấn đề mình đang gặp.

Qua các ví dụ , tác giả thường có các **bình luận** về dạng bài tập đó, từ đó học sinh có thể thấy rõ bản chất của vấn đề mình đang gặp phải. Thấy được tính cụ thể cũng như tổng quát trong mỗi bài toán.

Qua mỗi **bình luận** tác giả muốn trao đổi với người đọc về phương pháp giải, cách suy nghĩ nào đi tới lời giải như thế. Thấy được tính tương tự hóa trong các bài toán khác nhau. Một khi nắm được bản chất, học sinh có thể làm được các bài tập tương tự , cũng như có thể sáng tạo ra các bài toán khác từ bài toán gốc.

3.3) Phương pháp tổng hợp, hệ thống hóa.

Đây là phương pháp chủ đạo của đề tài. Nội dung đề tài được phân chia thành nhiều dạng Toán, đó là quá trình tổng hợp những kiến thức từ nhiều nguồn tài liệu và từ bản thân rút ra. Các dạng bài tập đưa ra cũng ở mức độ khá trở lên, nên đòi hỏi nhiều quá trình suy luận và tổng hợp lời giải . Vì nội dung đề tài xuyên suốt cả một vấn đề Toán học khá rộng , nên đòi

hỏi người viết phải có sự chuẩn bị khá lâu dài về mặt thời gian (ý tưởng hình thành), và khi viết ra cần phải tổng hợp các kiến thức lại thành chủ đề thống nhất.

Các chủ đề khác nhau được hệ thống hóa theo một bố cục chặt chẽ , nhằm làm toát lên tính ứng dụng của phương pháp quy nạp vào trong hình học.

Đọc qua đề tài ta thấy các vấn đề toán học đề cập tới ở đây đều được giải quyết dưới góc độ của quy nạp toán học. Tác giả đã cố gắng tổng hợp các vấn đề toán học có cùng bản chất đó.

3.4) Phương pháp chọn lọc.

Ứng dụng của quy nạp còn rất nhiều nhưng ở đây tác giả chọn lọc ra những ứng dụng mang tính rộng rãi hơn, phù hợp với trình độ của học sinh, với nội dung chương trình mà các em thường gặp hằng ngày. Các ứng dụng mang tính chuyên sâu và mang nặng lý thuyết hàn lâm như ứng dụng vào bài toán tô màu , ứng dụng vào xây dựng định nghĩa, quy nạp theo số chiều không gian không được trình bày ở đây. Các ví dụ đưa ra làm minh họa cho phương pháp cũng được chọn lọc rất kỹ, vừa cố gắng đảm bảo tính điển hình, vừa có mức kiến thức vừa phải, phù hợp với chương trình phổ thông.

4) Mục đích nghiên cứu đề tài:

Chọn đề Phương pháp quy nạp trong hình học để nghiên cứu với những mục đích như sau:

- Chỉ ra các ứng dụng của quy nạp trong hình học.
- Muốn có sự đầu tư nhiều hơn về nội dung quy nạp và hình học, một nội dung mà bản thân cảm thấy mình còn vấp phải nhiều khó khăn trong quá trình giảng dạy. Bằng việc nghiên cứu tìm tòi để viết về nó, tôi hi vọng mình sẽ trau dồi thêm kiến thức và kỹ năng về phương pháp quy nạp cũng như về lĩnh vực hình học.
- Tạo cho mình một tài liệu riêng theo cách hiểu của mình, bằng ngôn ngữ của mình, phục vụ cho quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, luyện thi đại học.
- Có điều kiện để trao đổi, học hỏi kinh nghiệm từ đồng nghiệp gần xa.
- Đưa tới cho học sinh một tài liệu tham khảo đã được bản thân nghiên cứu, trình bày theo ngôn ngữ của mình, giúp các em trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi Đại học.

5) Nhiệm vụ của việc nghiên cứu đề tài:

- Thể hiện được những ứng dụng của phương pháp quy nạp trong hình học.
- Xây dựng được hệ thống bài tập ứng dụng.
- Quá trình nghiên cứu đề tài để bản thân trau dồi thêm kiến thức chuyên môn và nghiệp vụ. Cách thức thực hiện một đề tài khoa học là như thế nào. Có điều kiện để trao đổi nhiều hơn với thầy cô trong tổ Toán về các vấn đề Toán. Quan trọng hơn nữa là đưa tới cho học sinh một số dạng bài tập mà các em thường ít có điều kiện để va chạm
- Đề tài mà tác giả thực hiện với nhiệm vụ là giúp học sinh cải tiến phương pháp học tập. Biết quan tâm tới bản chất Toán học trong mỗi phát biểu. Các em thấy được mối liên quan chặt chẽ giữa quy nạp và hình học.
- Đề tài khi được công bố, nó phải giúp học sinh nắm vững hơn về phương pháp quy nạp. Thấy được bản chất của quy nạp chính là đi lên từ những điều tương tự đã có trước đó. Đây cũng là một kĩ năng quan trọng của cuộc sống.

6) Phạm vi nghiên cứu:

- Đề tài nghiên cứu hoàn toàn về lĩnh vực hình học nhưng được khám phá bằng tư tưởng quy nạp. Các kỹ thuật chứng minh được phân tích kỹ càng và trình bày dưới dạng các bài học. Thiết nghĩ cách trình bày như vậy sẽ tách bạch được các phương pháp, tránh sự nặng nề không cần thiết đối với học sinh.
- Công cụ nghiên cứu hoàn toàn dùng hình học sơ cấp, chủ yếu nghiên cứu về hình học phẳng.

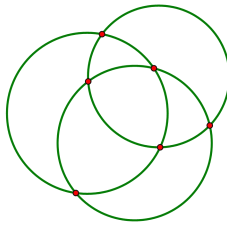
PHẦN THỨ HAI
NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Trong phần này ta sẽ cùng đi nghiên cứu các ứng dụng mang tính phổ biến của quy nạp trong hình học. Những ứng dụng này theo chủ quan của cá nhân là rất quan trọng, đặc biệt là dành cho đối tượng học sinh giỏi. Do phạm vi đối hướng tới của đề tài tượng nghiên cứu là học sinh phổ thông nên các ứng dụng cao hơn như dùng quy nạp để xây dựng các định nghĩa, các khái niệm, quy nạp theo số chiều không gian không được xét đến.

§1. QUY NAP TRONG ĐẾM SỐ MIỀN CỦA MẶT PHẪNG

Ví dụ 1:

Cho n đường tròn trong mặt phẳng, hai đường tròn nào cũng cắt nhau tại hai điểm phân biệt, không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm. Chứng minh rằng n đường tròn đó chia mặt phẳng thành $2 + n(n-1)$ miền.



Chứng minh:

Đặt $M_n = 2 + n(n-1)$ là số miền của mặt phẳng được chia bởi n đường tròn thỏa mãn các điều kiện trên.

Với $n=1$ ta có $M_1 = 2$ nên khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng tới $n=k \geq 1$. Ta có k đường tròn chia mặt phẳng thành

$M_k = 2 + k(k-1)$ miền. ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, nghĩa là với $k+1$

đường tròn sẽ chia mặt phẳng thành $M_{k+1} = 2 + (k+1)k$ miền. Thật vậy, đường tròn thứ

$k+1$ bị k đường tròn kia cắt tại $2k$ điểm và bị chia thành $2k$ cung. Mỗi cung này chia mỗi miền chứa nó thành hai miền. Vì thế số miền của mặt phẳng tăng lên là $2k$ miền. Nghĩa là ta có $M_{k+1} = M_k + 2k$. Do đó $M_{k+1} = 2 + k(k-1) + 2k = 2 + k(k+1)$.

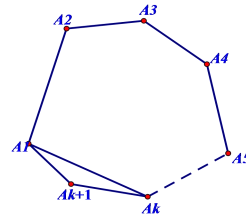
Ta có khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng tổng các góc trong của một đa giác lồi n cạnh ($n \geq 3$) bằng

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Chứng minh:



Với $n = 3$ thì khẳng định hiển nhiên đúng.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 3$, tức là ta có $S_k = (k-2) \cdot 180^\circ$ (1). Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k+1$. Tức là phải chứng minh $S_{k+1} = (k-1) \cdot 180^\circ$ (2).

Thật vậy:

Từ đa giác n đỉnh là $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ ta vẽ thêm đỉnh A_{n+1}

Nên ta tạo thêm tam giác mới $A_n A_{n+1} A_1$, nên tổng số góc

trong được cộng thêm 180° . Điều đó có nghĩa là

$$S_{n+1} = S_n + 180^\circ = (n-2)180^\circ + 180^\circ = (n-1)180^\circ.$$

Khẳng định được chứng minh.

Ví dụ 3:

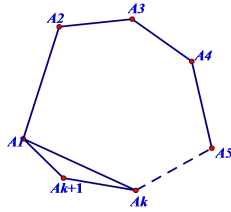
Chứng minh rằng số đường chéo trong một đa giác lồi bằng $C_n = \frac{n(n-3)}{2}$, $n \geq 4$.

Chứng minh: Khẳng định đúng với $n = 4$ vì tứ giác có hai đường chéo.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 4$, tức là $C_k = \frac{k(k-3)}{2}$.

Ta cần chứng minh khẳng định đúng khi $n = k+1$, có nghĩa là phải chứng minh

$$C_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$



Thật vậy. Khi ta vẽ thêm đỉnh A_{k+1} thì cạnh $A_k A_1$ bây giờ trở thành đường chéo. Ngoài ra từ đỉnh A_{k+1} ta kẻ được tới $k-2$ đỉnh còn lại để có thể tạo thành đường chéo. Nên số đường chéo mới tạo thành khi ta thêm đỉnh A_{k+1} là $k-2+1=k-1$.

Vậy ta có $C_{k+1} = C_k + k - 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Khẳng định được chứng minh.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng n đường thẳng trong mặt phẳng sẽ chia mặt phẳng thành

$$M_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, n \geq 1 \text{ miền.}$$

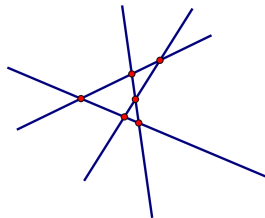
Chứng minh:

Hiển nhiên khẳng định đúng với $n=1$.

Ta giả sử khẳng định đúng với $n=k \geq 1$, tức là $M_k = \frac{k(k+1)}{2} + 1$. Ta cần chứng minh khẳng

định đúng với $n=k+1$. Điều đó có nghĩa là $k+1$ đường thẳng sẽ chia mặt phẳng tối đa

$$\text{thành } M_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$



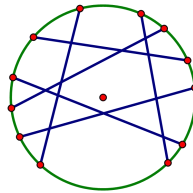
Thật vậy, để chia mặt phẳng thành nhiều miền nhất thì đường thẳng thứ $k+1$ phải cắt cả k đường thẳng kia tại k điểm phân biệt. Khi đó cứ mỗi đoạn thẳng tạo bởi hai điểm phân biệt sẽ chia mặt phẳng ra làm hai miền. với k điểm phân biệt sẽ cắt đường thẳng đó làm $k+1$ phần. Vậy số miền mặt phẳng mới được tạo ra là $k+1$.

Do đó ta có $M_{k+1} = M_k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$.

Ví dụ 5:

Trong một đường tròn ta vẽ n dây cung, số giao điểm nằm trong đường tròn của các dây đó là m (ta quy định nếu có p dây cùng đi qua một điểm thì số giao điểm là $p-1$). Chứng minh rằng hình tròn bị chia thành $n+m+1$ miền.

Chứng minh:



Đặt $S_n = n + m + 1$ (1)

Khẳng định đúng với $n=1$ với một đường thì số giao điểm là $m=0$ nên $S_1 = 2$.

Giả sử khẳng định đúng với $n=k \geq 1$, tức là với k đường và có m giao điểm thì số miền là $S_k = k + m + 1$.

Ta cần chứng minh với $k+1$ dây thì số miền là $S_{k+1} = k + m' + 2$, trong đó m' là số giao điểm ứng với $k+1$ đường.

Thật vậy. Dây thứ $k+1$ cắt k dây kia nên số giao điểm tăng thêm là $m' - m$. Các giao điểm này chia dây thứ $k+1$ thành $m' - m + 1$ phần, nên số miền tăng lên là $m' - m + 1$.

Do đó $S_{k+1} = S_k + m' - m + 1 = k + m + 1 + (m' - m + 1) = k + m' + 2$.

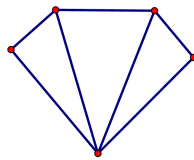
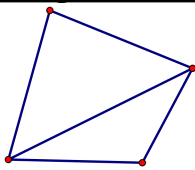
Vậy khẳng định được chứng minh.

Ví dụ 6:

Cho đa giác lồi n cạnh. Hỏi có thể chia đa giác đó thành bao nhiêu tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau.

Giải: Với $n=4$ thì số tam giác là $S(4) = 2$. Với $n=5$ thì số tam giác là $S(5) = 3$

Ta dự đoán $S(n) = n - 2, n \geq 4$.

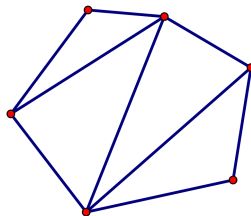


Ta giả sử khẳng định đúng với $n = k$. Tức là $S(k) = k - 2, k \geq 4$. Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là $S(k + 1) = k - 1$.

Thật vậy, khi ta thêm đỉnh thứ $k + 1$ thì cạnh $A_1 A_k$ trở thành đường chéo và không cắt các đường chéo trước, nó cũng tạo ra một tam giác mới là $A_1 A_k A_{k+1}$. Đó đó $S(k + 1) = S(k) + 1 = k - 1$.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét:



Từ bài toán trên ta suy ra tổng số đường chéo N ta cần để chia đa giác n cạnh thành các tam giác ($n - 2$ tam giác) là

$$2N + n = 3(n - 2) \Leftrightarrow N = n - 3.$$

Ví dụ 7:

Trong mặt phẳng cho $n(n > 3)$ đa giác lồi. Biết rằng ba đa giác bất kỳ luôn có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại một điểm là điểm chung của tất cả các đa giác đó.

Chứng minh:

Ta kiểm tra với $n = 4$. Ta gọi các đa giác lần lượt là D_1, D_2, D_3, D_4 . Ta ký hiệu

$$A_i = \bigcap (D_j), i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4 \text{ và } C = \bigcap_{l=1}^4 D_l.$$

Nếu A_4 nằm trong tam giác $A_1 A_2 A_3$ thì, vì $A_1 A_2 A_3 \subset D_4$ nên $A_4 \in D_4 \Rightarrow A_4 \in C$.

Nếu A_4 nằm ngoài tam giác thì $A_1 A_2 A_3 A_4$ là tứ giác lồi thì giao điểm của hai đường chéo sẽ thuộc C .

Nên với $n = 4$ luôn tồn tại một điểm thuộc C .

Bây giờ ta giả sử khẳng định đúng với $n = k - 1$. Ta xét k đa giác $D_1, D_2, D_3, \dots, D_k$. Gọi

$$D = D_{k-1} \cap D_k.$$

Xét dãy $D_1, D_2, D_3, \dots, D_k, D$. Bằng kĩ thuật quy nạp ta dễ dàng thu được điều khẳng định.

Bài tập đề nghị

- 1) Cho đa giác lồi n cạnh, trong đó không có ba đường chéo nào đồng quy. Tính số miền của đa giác được chia bởi các đường chéo đó.
- 2) Xây dựng quy tắc tính $P(n)$ là hàm tính số cách chia một đa giác n cạnh thành các tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau.

§2 QUY NẠP TRONG TÍNH TOÁN CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Để dùng quy nạp vào trong tính toán các đại lượng, trước hết ta cần chỉ ra quy luật biến đổi của các đại lượng và xây dựng các hàm có tính đệ quy theo n .

Ví dụ 1:

Một người cắt một tờ giấy A_4 thành 5 mảnh, sau đó chọn một mảnh trong 5 mảnh đó và tiếp tục cắt nó thành 5 mảnh khác. Quá trình cứ lặp lại với các mảnh giấy nhỏ hơn. Sau một số bước thực hiện người đó đếm được tổng số các mảnh giấy đã cắt là 153. Hỏi người đó đếm đúng hay sai.

Giải:

Phân tích

Trước hết ta cần thấy quy luật biến đổi của số mảnh giấy. Mỗi lần người đó cắt mảnh giấy thành 5 mảnh nên số mảnh giấy tăng lên sau mỗi lần cắt là 4. Tính cả mảnh ban đầu thì sau n bước ta được số mảnh giấy được tạo thành là $G(n) = 4n + 1, n \geq 1$ (1).

Với $n = 1$ thì sau lần cắt thứ nhất ta có số mảnh giấy là $G(1) = 5$. Khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng tới $n = k \geq 1$, có nghĩa là $G(k) = 4k + 1$. Sang bước thứ $k + 1$ thì số mảnh giấy được tăng thêm là 4, do đó ta có $G(k + 1) = G(k) + 4 = 4k + 1 + 4 = 4(k + 1) + 1$.

Như vậy khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bây giờ người đó đếm được số mảnh giấy là 153 nên $4n+1=153 \Leftrightarrow n=38$.

Như vậy sau 38 lần cắt thì người đó có số mảnh giấy là 153 nên người đó đã đếm đúng.

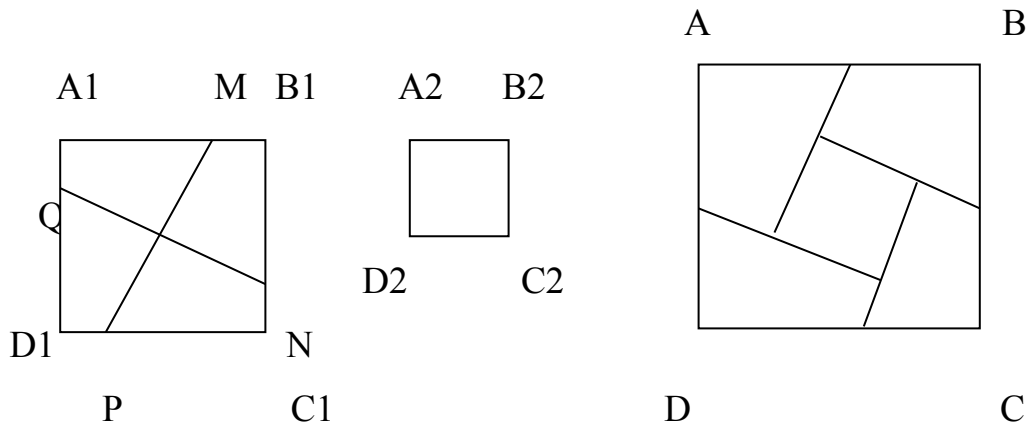
Ví dụ 2:

Cho n hình vuông bất kỳ. Chứng minh rằng ta có thể cắt chúng bởi các nhát cắt thẳng để tạo thành một số phần mà từ các phần đó ta có thể ghép lại thành một hình vuông mới.

Chứng minh:

Với $n=1$ hiển nhiên ta cắt và ghép lại được hình vuông ban đầu.

Với $n=2$, ta giả sử các hình vuông là $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$, chúng có độ dài cạnh lần lượt là a_1, a_2 . Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 > a_2$.



Trên các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ ta lấy các điểm M,N,P,Q thỏa mãn

$$A_1M = B_1N = C_1P = D_1Q = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Các đường đó chia hình vuông thành bốn phần bằng nhau. Với cách chia như vậy thì ta có QN vuông góc với PM tại tâm O của hình vuông. Ta đem ghép chúng ra ngoài hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ ta được hình thu được cũng là hình vuông.

Giả sử ta làm được điều đó với k hình vuông. Bây giờ nếu có $k+1$ hình vuông thì ta xét hai hình vuông nào đó chẳng hạn là V_k và V_{k+1} . Bằng cách làm như lúc này ta thu được hình vuông V' . Bây giờ ta có n hình vuông là $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, V'$.

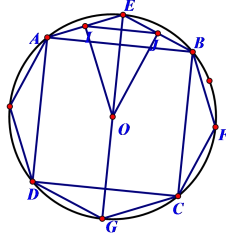
Vậy khẳng định đúng với mọi n .

Ví dụ 3:

Giả sử R_n, r_n lần lượt là bán kính của các đường tròn nội và ngoại tiếp đa giác đều 2^n cạnh có chu vi p cho trước. Chứng minh rằng khi đó ta có công thức sau

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}; R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1} \cdot R_n}$$

Giải:



Áp dụng công thức tính diện tích ta tính được $r_2 = \frac{p}{8}; R_2 = \frac{p\sqrt{2}}{8}$.

Gọi AB là một cạnh của đa giác đều 2^n - cạnh tâm O có chu vi p .

Giả sử ta đã biết bán kính nội tiếp ngoại tiếp của đa giác đều 2^n - cạnh lần lượt là $r_n; R_n$.

Gọi E là trung điểm của cung AB . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các dây AE, EB .

Ta dễ thấy rằng góc $\widehat{IOJ} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

Ta có IJ chính là cạnh của đa giác đều 2^{n+1} - cạnh nội tiếp trong đường tròn bán kính OI .

Chu vi của đa giác đều này là $2^{n+1} IJ = 2^n \cdot AB$.

Ta cũng có $OE - OH = OH - OK$ hay $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n \Rightarrow r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$.

Trong tam giác vuông OIE ta có $OI^2 = OE \cdot OH$ hay là $R_{n+1}^2 = R_n \cdot r_{n+1} \Rightarrow R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}$.

Đến đây bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4 :

Cho tam giác ABC với diện tích S và chu vi $2p$ nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Kéo dài đường phân giác trong của tam giác ABC cắt đường tròn tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho S_1 là diện tích của tam giác $A_1B_1C_1$. Kéo dài những đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$ cắt các đường tròn tương ứng tại các điểm A_2, B_2, C_2 và S_2 là diện tích

tam giác $A_2B_2C_2$. Tiếp tục như vậy ta dựng được dãy tam giác $(A_nB_nC_n)$ với diện tích tương ứng là dãy (S_n) .

Chứng minh rằng

a) Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

b) $S \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

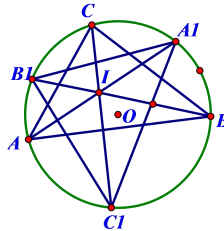
c) Nếu $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ là nửa chu vi của các tam giác tương ứng thì

$$p \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2}.$$

Chứng minh :

a) Gọi O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại và nội tiếp của tam giác ABC.

Theo tính chất phân giác trong ta có $A_1 = \frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$.



Nhưng $\widehat{A_1B_1B} = \frac{A}{2} \Rightarrow A_1 + \widehat{A_1B_1B} = 90^\circ$. Từ đó ta có $BB_1 \perp A_1C_1$. Lập luận tương tự ta có

$$A_1A \perp B_1C_1,$$

$C_1C \perp A_1B_1$. Như vậy các đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$ trùng với các phân giác của tam giác ABC. Do đó ta có khẳng định ở câu a).

b) áp dụng công thức diện tích $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ mà $\sin A_1 = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$.

Ta suy ra $S_1 = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

$$\text{Nên} \quad \frac{S}{S_1} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad . \quad \text{Vì} \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{nên}$$

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{8 \frac{S^2}{p}}{4RS} = \frac{2S}{Rp} = \frac{2pr}{Rp} = \frac{2r}{R} \leq 1 . \text{ Tuy nhiên dấu đẳng thức}$$

chỉ xảy ra khi tam giác ABC đều.

Như vậy ta luôn có $S \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

c) Tiếp theo ta áp dụng định lý sin ta có

$$2p = a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) = 8R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 8R \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1$$

$$2p_1 = 8R \left(\cos \frac{A_1}{2} \cos \frac{B_1}{2} \cos \frac{C_1}{2} \right).$$

Vậy nên $\frac{p}{p_1} = 8 \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{B_1}{2} \sin \frac{C_1}{2} \leq 1$. Tuy nhiên dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi tam giác đều.

Bằng cách tương tự ta thu được dãy $p \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài tập đề nghị

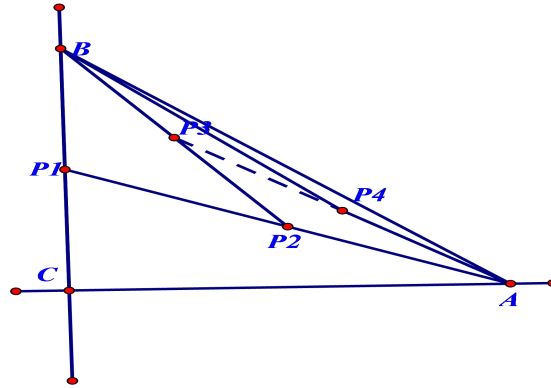
1) Trong một hình tròn bán kính r nội tiếp một hình vuông. Trong hình vuông này ta lại nội tiếp một hình tròn khác, trong hình tròn mới này ta lại nội tiếp thêm một hình vuông nữa...Hãy tính tổng diện tích của vô hạn các đường tròn nói trên.

§3. QUY NẠP TRONG XÂY DỰNG DÃY

Ví dụ 1:

Cho tam giác ABC vuông cân tại C . Ta dựng các điểm $P_0 \equiv A$, P_1 là trung điểm BC , P_{2k} là trung điểm của AP_{2k-1} và P_{2k+1} là trung điểm của BP_{2k} với $k=1,2,3,\dots$ Chứng minh rằng điểm giới hạn của dãy $\{P_{2k}\}$ và $\{P_{2k+1}\}$, $k=1,2,3,\dots$, nằm trên cạnh huyền của tam giác.

Chứng minh:



Ta chọn hệ trục Oxy sao cho $C(0;0)$; $A(1;0)$; $B(0;1)$. Ta ký hiệu $(x_n; y_n)$ là tọa độ các điểm

P_n với $n=0,1,2,\dots$. Từ công thức tọa độ trung điểm ta có $x_0=1, y_0=0, x_1=0, y_1=\frac{1}{2}$,

$$x_{2k} = \frac{1+x_{2k-1}}{2}, y_{2k} = \frac{y_{2k-1}}{2}, x_{2k+1} = \frac{x_{2k}}{2}, y_{2k+1} = \frac{1+y_{2k}}{2}, \text{ với } k=1,2,3,\dots,$$

Từ đó ta tính được tọa độ $(x_n; y_n)$ như sau :

$$x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right), x_5 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right), x_6 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right), x_7 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right).$$

Bằng kỹ thuật quy nạp ta thu được

$$x_{2k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right); x_{2k+1} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right), k=1,2,3,\dots$$

Ta chứng minh khẳng định trên đúng.

Thật vậy giả sử khẳng định trên đúng tới $n=k \geq 1$.

$$\text{Khi đó } x_{2(k+1)} = \frac{1+x_{2k+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k}\right)$$

$$x_{2(k+1)+1} = \frac{x_{2(k+1)}}{2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k}\right).$$

Khẳng định đúng với $n=k+1$.

Tương tự ta cũng xây dựng được

$$y_{2k} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \right) ; y_{2k+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \right), k = 1, 2, 3, \dots,$$

Bằng kỹ thuật giới hạn ta thu được $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{2k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$, suy ra $M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

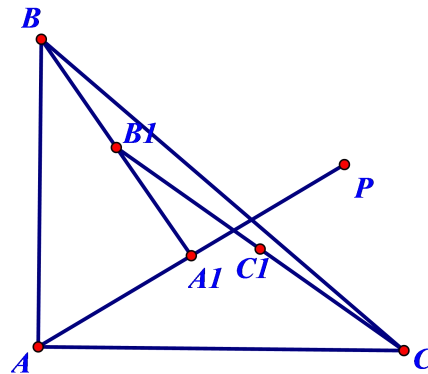
Tương tự ta có $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{1}{3}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{2k+1} = \frac{2}{3}$, suy ra $N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ta có $M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ lần lượt là giới hạn của các dãy $\{P_{2k}\}$, $\{P_{2k+1}\}$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ M, N thỏa mãn phương trình cạnh huyền.

Ví dụ 2 :

Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm P bất kỳ. Dựng điểm A_1 là trung điểm PA, B_1 là trung điểm A_1B , C_1 là trung điểm B_1C . Ta nhận được tam giác $A_1B_1C_1$. Tiếp tục quá trình bằng cách thay A_1 vào vai trò của P, ta nhận được tam giác $A_2B_2C_2$, ở đây A_2, B_2, C_2 là các trung điểm của A_1A, A_1B, B_1C vv. Chứng minh rằng dãy A_n, B_n, C_n có giới hạn là A_0, B_0, C_0 mà vị trí của chúng không phụ thuộc vào vị trí điểm P và diện tích tam giác $A_0B_0C_0$ bằng một phần tư diện tích tam giác ABC.

Chứng minh :



Chọn hệ trục Oxy có đỉnh $A \equiv O$, $B \in Oy$, $C \in Ox$ như hình vẽ.

Đặt $a = AB, b = AC$. Khi đó ta có tọa độ các điểm như sau $A(0;0); B(0;a); C(b;0)$ và $P(x;y)$.

Theo cách dựng trên ta xây dựng được dãy tọa độ các điểm như sau

$$A_1\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right); B_1\left(\frac{x}{4}; \frac{y}{4} + \frac{a}{2}\right); C_1\left(\frac{b}{2} + \frac{x}{8}; \frac{y}{8} + \frac{a}{4}\right); A_2\left(\frac{x}{4}; \frac{y}{4}\right); B_2\left(\frac{x}{8}; \frac{y}{8} + \frac{a}{2}\right); C_2\left(\frac{b}{2} + \frac{x}{16}; \frac{y}{16} + \frac{a}{4}\right) \dots$$

tiếp tục một cách tương tự ta thu được dãy với số hạng tổng quát

$$A_n\left(\frac{x}{2^n}; \frac{y}{2^n}\right); B_n\left(\frac{x}{2^{n+1}}; \frac{y}{2^{n+1}} + \frac{a}{2}\right); C_n\left(\frac{b}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}; \frac{y}{2^{n+2}} + \frac{a}{4}\right).$$

Bằng kĩ thuật tính giới hạn ta thu được dãy A_n, B_n, C_n có giới hạn là A_0, B_0, C_0 với

$$A_0(0;0); B_0\left(0; \frac{a}{2}\right); C_0\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{4}\right) \text{ không phụ thuộc } (x;y), \text{ tức là không phụ thuộc vị trí điểm } P.$$

Ta cũng dễ dàng chứng minh được là $S_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

Ví dụ 3 :

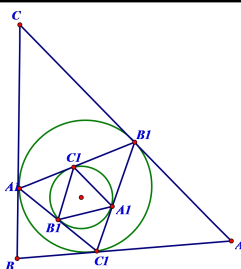
Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại $C_1; A_1; B_1$. Nối lại ta được tam giác mới $A_1B_1C_1$. Lại dựng đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$, tiếp xúc các cạnh $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$ lần lượt tại $A_2; B_2; C_2$. Tiếp tục quá trình ta được dãy vô hạn các tam giác. Chứng minh rằng tổng chu vi của các tam giác của dãy không vượt quá chu vi tam giác ABC .

Chứng minh :

Gọi $r, 2p$ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và chu vi của tam giác ABC . Ta ký hiệu

$$2p_1 \text{ là chu vi tam giác } A_1B_1C_1. \text{ Ta có } 2p_1 = 2r \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } p = AB_1 + B_1C + CA_1 = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) = r \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \right).$$



Vì $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$ nên $r = p \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.

Thay vào (1) ta thu được $2p_1 = 2p \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right)$.

Ta chứng minh $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Thật vậy ta có $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p} = \frac{S}{p^2}$.

Vì $\frac{S}{\sqrt{p}} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3} = \left(\frac{p}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{S}{p^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Khẳng định được chứng minh xong.

Hơn nữa ta cũng có $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Từ đó suy ra $2p_1 \leq 2p \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = p$.

Bằng phương pháp tương tự ta cũng thu được $2p_2 \leq p_1 \leq \frac{p}{2}$.

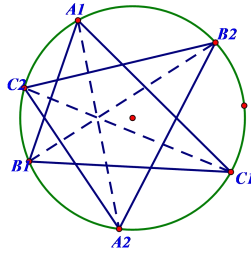
Từ đó bằng kĩ thuật quy nạp ta thu được kết quả :

$$2p_1 + 2p_2 + \dots + 2p_n + \dots \leq p + \frac{p}{2} + \dots + \frac{p}{2^{n-1}} + \dots = p \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2p.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4 : Cho đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường phân giác của các góc trong của tam giác $A_1B_1C_1$ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tại các điểm A_2, B_2, C_2 . Những đường phân giác góc trong của tam giác $A_2B_2C_2$ lại cắt đường tròn lần lượt tại $A_3, B_3, C_3 \dots$. Quá trình cứ thế tiếp tục. Chứng minh rằng tam giác $A_nB_nC_n$ tiến tới một tam giác đều khi n tiến ra vô tận.

Chứng minh :



Chứng minh :

Trong kết luận của bài toán ta cần phải chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \frac{\pi}{3}$.

Ta có $A_{n+1} = \widehat{B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}} = \widehat{B_{n+1}A_{n+1}A_n} + \widehat{A_nA_{n+1}C_{n+1}} = \widehat{B_{n+1}B_nA_n} + \widehat{A_nC_nC_{n+1}} = \frac{B_n}{2} + \frac{C_n}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A_n}{2}$.

Như vậy ta có $A_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{A_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó ta suy ra các đẳng thức sau $A_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}, A_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}, \dots, A_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{A_k}{2} (*)$

Ta nhân lần lượt các đẳng thức trong hệ (*) với $\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}; \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-2}; \dots; \left(\frac{-1}{2}\right)$ rồi cộng vế

theo vế ta được $A_{n+1} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \right) + A_1 \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^k}{1 + \frac{1}{2}} + A_1 \left(\frac{-1}{2}\right)^k$.

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta thu được $A_{n+1} \rightarrow \frac{\pi}{3}$. Lập luận tương tự ta có $B_{n+1} \rightarrow \frac{\pi}{3}; C_{n+1} \rightarrow \frac{\pi}{3}$.

Bài tập đề nghị :

1) Cho tam giác $A_0B_0C_0$. Chọn điểm P bất kỳ trong tam giác và hạ từ P những đường vuông góc xuống các cạnh của tam giác $A_0B_0C_0$ như sau $PA_1 \perp B_0C_0; PB_1 \perp A_0C_0; PC_1 \perp A_0B_0$. Nối các điểm $A_1; B_1; C_1$ tạo ra tam giác $A_1B_1C_1$. Từ P tiếp tục hạ $PA_2 \perp B_1C_1; PB_2 \perp A_1C_1; PC_2 \perp A_1B_1$. Quá trình cứ thế được tiếp tục. Hỏi trong dãy các tam giác $\{A_nB_nC_n\}_n$ có tồn tại tam giác đồng dạng với tam giác ban đầu không?

2) Cho tam giác ABC không đều ngoại tiếp đường tròn . Những tiếp điểm tạo ra tam giác thứ hai. Trong tam giác thứ hai lại nội tiếp một đường tròn và các tiếp điểm tạo ra tam giác thứ ba. Quá trình cứ thế tiếp tục đến vô hạn lần. Chứng minh rằng trong dãy những tam giác vừa tạo ra không có hai tam giác nào đồng dạng .

§4. QUY NẠP TRONG BÀI TOÁN LẬP

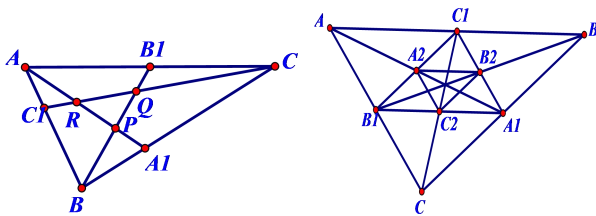
Trong quá trình làm toán , nhiều khi ta cần tạo ra các phép lập để giải quyết một vấn đề đặt ra. Trong những tình huống như thế, ý tưởng quy nạp cũng xuất hiện một cách hoàn toàn tự nhiên. Trước hết ta nhắc lại một định lý rất quen thuộc trong hình học chương trình trung học cơ sở, mà để chứng minh nó ta có thể sử dụng phép lập.

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ba đường trung tuyến luôn đồng quy tại một điểm và điểm đó chia đường trung tuyến theo tỉ lệ 2:1.

Chứng minh:

Ta giả sử các trung tuyến $AA_1; BB_1; CC_1$ không đồng quy. Khi đó chúng sẽ đôi một cắt nhau tại P, Q, R . Tam giác PQR khi đó nằm trong tam giác ABC . Ta lại gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các trung tuyến $AA_1; BB_1; CC_1$ với các đường trung bình $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$. Sử dụng định lý Talet chia tỉ lệ ta cũng chứng minh được A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của các đoạn $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$. Do đó nên $A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2$ lại là các trung tuyến của tam giác $A_1B_1C_1$. Như vậy những đường trung tuyến của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trùng nhau.



Vì vậy tam giác PQR nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$. Ta lặp lại quá trình trên sẽ tạo ra được dãy các tam giác $\{A_nB_nC_n\}_n$ luôn chứa tam giác PQR . Theo tính chất độ dài đường trung

bình của tam giác ta thu được $A_nB_n = \frac{1}{2^n} AB$; $B_nC_n = \frac{1}{2^n} BC$; $C_nA_n = \frac{1}{2^n} CA$.

Theo tính chất tỉ lệ diện tích của hai tam giác đồng dạng (bằng bình phương tỉ lệ độ dài) ta

có $S_{A_n B_n C_n} = \frac{1}{4^n} S_{ABC}$. Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $S_{A_n B_n C_n} \rightarrow 0$. Điều này chứng tỏ từ một chỉ số n nào

đó trở đi thì tam giác $A_n B_n C_n$ nằm trong tam giác PQR . Điều này mâu thuẫn với cách xây dựng dãy $\{A_n B_n C_n\}_n$ ở trên. Do đó ba đường trung tuyến phải đồng quy tại điểm G .

Bây giờ ta chứng minh điểm G chia độ dài đoạn AA_1 theo tỉ lệ 2:1

$$\text{Đặt } AA_1 = m. \text{ Khi đó } AG = AA_2 + A_2A_4 + A_4A_6 + \dots = \frac{m}{2} + \frac{m}{8} + \frac{m}{32} + \dots + \dots = \frac{\frac{m}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}m.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2:

Ta gọi trung tuyến của một n -giác là đoạn thẳng nối các đỉnh của n -giác đến trọng tâm của các $n-1$ giác được tạo bởi $n-1$ đỉnh còn lại. Chứng minh rằng các trung tuyến đó đồng quy tại một điểm và điểm này chia các trung tuyến theo tỉ số $(n-1):n$.

Chứng minh:

Với $n=3$ thì ta hiểu trọng tâm của một đoạn thẳng chính là trung điểm của cạnh đó.

Theo ví dụ trên ta đã chứng minh được các trung tuyến của tam giác đồng quy tại trọng tâm G của nó và điểm G chia các trung tuyến theo tỉ số 2:1.

Với $n=4$, ta xét tứ giác $A_1A_2A_3A_4$. Ta gọi S là trung điểm A_1A_2 . Gọi O_1, O_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A_1A_2A_3; A_1A_2A_4$. Gọi O là giao điểm của hai trung tuyến $A_3O_2; A_4O_1$.

Áp dụng tính chất trọng tâm và định lý Talet ta có $O_1O_2 // A_3A_4$ và $\frac{O_1O_2}{A_3A_4} = \frac{1}{3}$. Tam giác OO_2O_1

đồng dạng với OA_3A_4 nên ta cũng có $\frac{OA_4}{OO_1} = \frac{3}{1}$. Như vậy khẳng định đúng với $n=4$.

Bây giờ ta giả sử khẳng định đúng với $n=k-1$. Nghĩa là các trung tuyến của $(k-1)$ -giác đồng quy tại điểm O và điểm này chia mỗi trung tuyến theo tỉ lệ $(k-2):1$. Ta cần chứng

minh khẳng định đúng với $n = k$, nghĩa là các trung tuyến của k - giác đồng quy tại O và điểm này chia mỗi trung tuyến theo tỉ lệ $(k - 1) : k$.



Thật vậy

Gọi S là trọng tâm của $(k - 2)$ - giác $A_1A_2A_3...A_{k-2}$. Khi đó theo định nghĩa thì SA_{k-1}, SA_k là các trung tuyến của $(k - 1)$ - giác $A_1A_2A_3...A_{k-1}$ và $A_1A_2A_3...A_{k-2}A_k$. Gọi O_{k-1}, O_k theo thứ tự là trọng tâm của hai đa giác trên. Theo giả thiết quy nạp ta có $\frac{SA_{k-1}}{SO_k} = \frac{SA_k}{SO_{k-1}} = \frac{k - 1}{1}$. Theo định lý Talet ta suy ra $O_{k-1}O_k // A_{k-1}A_k$. Gọi O là giao điểm của $A_{k-1}O_{k-1}$ và A_kO_k (đều là các trung tuyến).

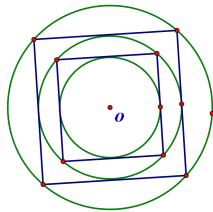
Áp dụng tính chất hai tam giác đồng dạng $OO_{k-1}O_k$ và $OA_{k-1}A_k$ ta có $\frac{OA_{k-1}}{OO_{k-1}} = \frac{OA_k}{OO_k} = \frac{k - 1}{k}$.

Khẳng định được chứng minh.

Ví dụ 3 :

Trong hình cầu ta nội tiếp một hình trụ, trong hình trụ đó ta lại nội tiếp một hình cầu khác, trong hình cầu mới tiếp tục nội tiếp một hình trụ nữa... Quá trình cứ thế tiếp tục. Hãy tìm tỉ số của tổng thể tích các khối trụ với thể tích khối cầu ban đầu.

Giải :



Hình trên đây là mặt cắt ngang theo thiết diện vuông góc của hình trong bài toán.

Ta gọi R là bán kính của mặt cầu đầu tiên.

Thiết diện qua trục của các hình trụ là hình vuông có bán kính là $\frac{R}{(\sqrt{2})^k}$. Từ đó ta suy ra bán

kính của dãy các hình trụ lần lượt sẽ là $\frac{R}{(\sqrt{2})}; \frac{R}{(\sqrt{2})^2}; \dots; \frac{R}{(\sqrt{2})^n}; \dots$

Từ đó ta suy ra thể tích tương ứng của dãy khối trụ sẽ là $\frac{2\pi R^3}{(\sqrt{2})^3}; \frac{2\pi R^3}{(\sqrt{2})^6}; \frac{2\pi R^3}{(\sqrt{2})^9}; \dots; \frac{2\pi R^3}{(\sqrt{2})^{3n}}; \dots$

Theo tính chất tổng của cấp số nhân vô hạn có công bội thỏa mãn $q = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \Rightarrow |q| < 1$, ta có

tổng thể tích của dãy khối trụ là $T = \frac{\frac{2\pi R^3}{(\sqrt{2})^3}}{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^3}} = \frac{2\pi R^3(2\sqrt{2}+1)}{7}$, trong khi đó thể tích khối cầu

là $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Từ đó ta có tỉ số thể tích là $\frac{T}{V} = \frac{3(2\sqrt{2}+1)}{14}$.

Ví dụ 4 :

Trong đường tròn cho trước bán kính đơn vị ta nội tiếp một hình vuông, trong hình vuông mới ta lại nội tiếp một đường tròn, trong đường tròn này ta nội tiếp một bát giác đều, trong bát giác đều ta nội tiếp một đường tròn thứ ba, trong đường tròn này ta nội tiếp một hình 16 cạnh đều. Quá trình được tiếp tục theo quy luật là trong đường tròn thứ n ta nội tiếp một đa giác đều 2^{n+1} cạnh ($n \in N^*, n \geq 2$). Gọi R_n là bán kính của đường tròn thứ n . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$.

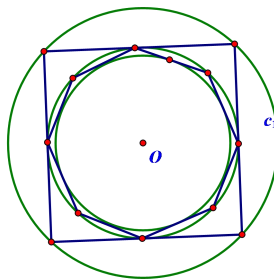
Giải :

Gọi R là bán kính đường tròn ban đầu. Ta có cạnh hình vuông là $\sqrt{2}R$. Hình tròn thứ hai có bán kính là $\frac{R}{\sqrt{2}} = R \cdot \cos \frac{\pi}{4}$.

Tương tự hình tròn thứ ba có bán kính là $R \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3}$.

Ta dự đoán đường tròn thứ n có bán kính là $R_n = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^n}, n \in N^*, n \geq 2$. (1).

Ta chứng minh nhận định (1) bằng phương pháp quy nạp.



+ Với $n = 2$ thì khẳng định đúng vì bán kính đường tròn thứ hai là $\frac{R}{\sqrt{2}} = R \cdot \cos \frac{\pi}{4}$.

+ Giả sử bán kính đường tròn thứ k ($k \geq 2$) là $R_k = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^k}$.

Bán kính đường tròn thứ $k+1$ sẽ ứng với cạnh tam giác vuông cân có góc ở đáy bằng góc ở tâm và có số đo $\frac{\pi}{2^{k+1}}$ và tm giác đó có cạnh huyền là R_k . Thế nên ta có ta tính được cạnh

goc vuông chính là $R_{k+1} = R_k \cdot \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \left(R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^k} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$. Khẳng định (1) được chứng minh.

Bây giờ ta đi tính R_n theo n như sau :

$$R_n = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^n} \Leftrightarrow R_n \sin \frac{\pi}{2^n} = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^n}.$$

Sử dụng công thức nhân đôi n lần bên vế phải ta thu được $R_n \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Từ đó

ta tính được $R_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \right) \cdot \frac{2}{\pi}$. Đến đây sử dụng giới hạn cơ bản $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ta tính

$$\text{được } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \frac{2}{\pi}.$$

Bài tập đề nghị :

1) Trong đường tròn bán kính R ta nội tiếp một hình vuông, trong hình vuông đó ta nội tiếp đường tròn thứ hai, trong đường tròn này ta lại nội tiếp hình vuông khác. Quá trình được lặp lại vô hạn lần. Hãy tìm tổng diện tích của dãy vô hạn các đường tròn đó.

2) Cho tam giác ABC , gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A qua B , của B qua C , của C qua A . Ta lặp lại quá trình này sau n lần và đạt đến tam giác $A_n B_n C_n$. Nếu diện tích tam giác ABC là S_0 , hãy xác định diện tích tam giác $A_n B_n C_n$.

3) Cho hai điểm A_1, A_2 và điểm A_3 nằm ngoài đường thẳng đường thẳng đi qua A_1, A_2 . Từ điểm A_3 trên tia $A_3 A_1$ lấy một đoạn $A_3 A_4$ bằng đoạn $A_2 A_3$. Từ điểm A_4 trên tia $A_4 A_2$ lấy đoạn $A_4 A_5$ bằng đoạn $A_3 A_4$ và tiếp tục quá trình trên. Chứng minh rằng tam giác $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ tiến tới tam giác đều.

4) Cho M_1 là một điểm bất kỳ trên cạnh AC của tam giác ABC , $M_1 N_1 // BC$ và điểm N_1 nằm trên cạnh AB , $N_1 P_1 // AC$, P_1 nằm trên BC , $P_1 M_2 // BC$. Quá trình cứ thế được tiếp tục. Hỏi có tồn tại giới hạn của các dãy $\{M_n\}; \{N_n\}; \{P_n\}$ hay không? Tức là các điểm $\{M_n\}; \{N_n\}; \{P_n\}$ hội tụ về các điểm $\{M_0\}; \{N_0\}; \{P_0\}$ cố định.

§5. QUY NẠP TRONG NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT HỆ ĐIỂM

Trong chuyên mục này, ta sẽ dùng tư tưởng quy nạp nghiên cứu tính chất của hệ điểm nào đó. Để chứng minh tồn tại một hệ điểm thỏa mãn tính chất nào đó, ta chỉ cần đưa ra một hệ cụ thể. Để chứng minh không tồn tại một hệ điểm nào đó, ta có thể chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

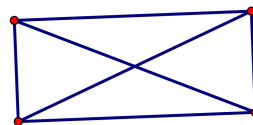
Ví dụ 1 :

Tồn tại hay không hệ bốn điểm trên mặt phẳng mà sao cho cứ 3 điểm bất kỳ của hệ đều là đỉnh của một tam giác vuông.

Kết quả thế nào đối với hệ 5 điểm.

Giải :

Rõ ràng 4 điểm là 4 đỉnh của hình chữ nhật thì thỏa mãn bài toán.



Bây giờ xét hệ 5 điểm A, B, C, D, E . Giả sử tồn tại hệ 5 điểm thỏa mãn bài toán.

Gọi A, B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó AB phải ứng với cạnh huyền. Điểm C, D phải thuộc đường tròn đường kính AB.

Bây giờ chẳng hạn ta xét tới tam giác ACD vuông. Khi đó một trong ba cạnh AC, AD, CD là đường kính. Tuy nhiên AC, AD không thể là đường kính vì như vậy C, D trùng với B.

Do đó đường kính phải là CD. Như vậy C, D đối xứng với nhau qua tâm O là trung điểm AB. Nếu tồn tại điểm thứ năm E của hệ điểm thỏa mãn bài toán thì bằng lập luận ta có E lại đối xứng với C qua O. Suy ra E trùng với D.

Như vậy không tồn tại hệ 5 điểm thỏa mãn bài toán.

Từ đây ta thấy $n = 4$ là số điểm nhiều nhất thỏa mãn tính chất của bài toán.

Nhận xét: Trên đây ta đã dùng phương pháp sử dụng đại lượng cực biên để chứng minh. Đó là bằng cách giả sử AB là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất. Đây là một phương pháp rất hay dùng trong hình học tổ hợp.

Từ bài toán trên, ta có các bài toán tương tự như sau:

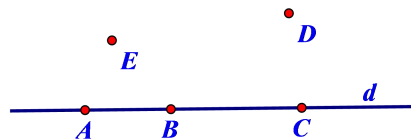
Tồn tại hay không bốn điểm trong mặt phẳng sao cho bất cứ ba điểm nào cũng là ba đỉnh của một tam giác cân.

Câu hỏi tương tự với tam giác tù, tam giác nhọn.

Ví dụ 2 :

Cho hệ 10 điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho trong 4 điểm bất kỳ thì luôn có 3 điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi một điểm trong đó để 9 điểm còn lại cùng thuộc một đường thẳng.

Chứng minh :



Nếu cả 10 điểm cùng nằm trên một đường thẳng thì bài toán được chứng minh.

Giả sử không phải 10 điểm cùng thẳng hàng. Ta chọn ra 4 điểm A,B,C,D không phải cùng thẳng hàng. Khi đó sẽ tồn tại 3 điểm chẳng hạn là A,B,C thẳng hàng theo giả thiết. Ta giả sử A, B,C đều nằm trên đường thẳng d . Ta sẽ chứng minh 6 điểm còn lại cũng thuộc d .

Thật vậy. Giả sử trong 6 điểm còn lại tồn tại một điểm không thuộc d , chẳng hạn đó là điểm E. Khi đó thì 4 điểm A,B,D,E không thẳng hàng nên tồn tại 3 điểm thẳng hàng. Do A,B,D và A,B,E không thẳng hàng nên A,D,E hoặc B,D,E thẳng hàng. Nếu A,D,E thẳng hàng thì B,D,E không thẳng hàng và C,D,E không thẳng hàng. Do đó suy ra trong 4 điểm B,C,D,E không có 3 điểm nào thẳng hàng là vô lý.

Trường hợp B,D,E thẳng hàng lập luận tương tự.

Như vậy ngoài 3 điểm A,B,C thuộc d thì sáu điểm kia cũng thuộc d .

Ví dụ 3:

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ và một điểm O tùy ý nằm bên trong đa giác đó. Mỗi cạnh của đa giác được đánh số tùy ý từ 1 đến n , mỗi số viết một lần. Nối O với các đỉnh của đa giác bởi các đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng này ta cũng đánh số từ 1 đến n , mỗi số viết một lần. Có tồn tại hay không cách đánh số để tổng các số viết trên ba cạnh của tam giác

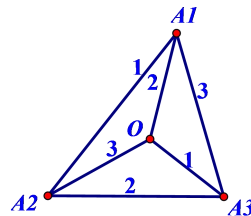
$OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1$ đều bằng nhau với

a) $n = 3$

b) $n = 20$.

Giải:

a) Với $n = 3$ tồn tại cách đánh số như thế. Minh họa bởi hình vẽ sau:



b) Với $n = 20$

Ta giả sử tổng ba số trên mỗi tam giác bằng nhau và bằng $a, a \in \mathbb{N}$. Ta có tất cả 20 tam giác nên tổng tất cả các số trên các cạnh là $20a$. Tổng này gồm tổng các số ghi trên cạnh đa giác là $(1+2+...+20)$ cộng với hai lần tổng các số ghi trên các đoạn có chung điểm O.

Ta đi đến phương trình $20a = 3(1+2+...+20) \Leftrightarrow 20a = 3 \frac{20 \cdot 21}{2} \Leftrightarrow a = \frac{63}{2}$ (vô lý).

Bài toán mở là với n thỏa mãn điều kiện gì thì tồn tại cách đánh số như thế.!

Bài tập đề nghị:

- 1) Cho tập hợp M gồm 10 điểm , trong đó có một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong 10 điểm ấy tồn tại hai điểm được nối đến các điểm khác bởi cùng số đoạn thẳng như nhau.
- 2) Chứng minh rằng tồn tại bộ sáu điểm trong đó có một điểm nằm ngoài đường thẳng d , năm điểm kia nằm trên đường thẳng d sao cho mọi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong 6 điểm đó đều là các số tự nhiên.
- 3) Cho đa giác lồi 100 cạnh. Tại mỗi đỉnh của đa giác viết một trong các số $1, 2, \dots, 49$. Chứng minh rằng tồn tại 4 đỉnh A, B, C, D của đa giác mà $AB=CD$ và $a+b=c+d$.
- 4) Có thể chia được hay không tất cả các điểm nằm trên đường tròn thành hai tập M, N sao cho mọi tam giác vuông bất kì nội tiếp đường tròn đó đều có một đầu của cạnh huyền thuộc tập M , còn đầu kia thuộc tập N .

§6. QUY NẠP TRONG BÀI TOÁN CẮT, GHÉP HÌNH

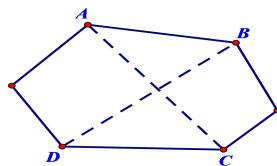
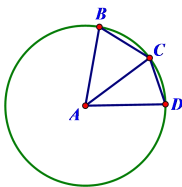
Bài toán cắt, ghép các hình từ một hình ban đầu là một trong những bài toán phổ biến của hình học, đặc biệt là hình học phẳng. Bài toán này mấu chốt để xây dựng các đẳng thức về độ dài các đường, về diện tích, về góc vốn là những bài toán khó. Trong chuyên mục này ta xem xét bài toán này dưới góc độ quy nạp hình học.

VÍ DỤ 1:

Trong một đa giác lồi n cạnh ($n > 3$). Có nhiều nhất bao nhiêu cạnh bằng đường chéo lớn nhất.

Giải:

Trước hết ta chỉ ra một đa giác lồi có hai cạnh AB, AD bằng đường chéo lớn nhất AC .



Phần tiếp theo ta chứng minh với mọi đa giác lồi, số cạnh bằng đường chéo lớn nhất không vượt quá hai.

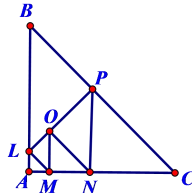
Giả sử tồn tại một đa giác lồi có đường chéo lớn nhất độ dài là a và số cạnh bằng a có nhiều hơn hai cạnh. Ta chọn từ đó hai cạnh không có đỉnh chung chẳng hạn là AB và CD (vì các cạnh này không phải là ba cạnh của một tam giác). Ta sẽ chứng minh tồn tại một đường chéo có độ dài lớn hơn a .

Thật vậy ta có $AC + BD > AB + CD = a + a$, nên tồn tại ít nhất một trong hai đường chéo có độ dài lớn hơn a .

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng có thể chia một tam giác vuông cân thành các tam giác vuông cân đôi một không bằng nhau.

Giải:



Xét tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = AC = a$. Ta dựng các tam giác như sau.

Dựng $ML \parallel BC$, $LP \perp BC$, $MO \perp AC$, $ON \perp PL$ ____.

Nếu quá trình đó dẫn đến tam giác NOP vuông cân thì những tam giác còn lại cũng vuông cân. Đặt $AM = x (x > 0)$. Ta cần tìm x để cho tam giác NOP vuông cân.

Ta có $ML = LO = x\sqrt{2}$, $MO = 2x$, $ON = 2x\sqrt{2}$. Ta cần phải có $ON = OP$.

$$\text{Mà } BL = a - x, LP = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{2}, OP = LP - OL = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{2} - x\sqrt{2} = \frac{(a-3x)\sqrt{2}}{2}.$$

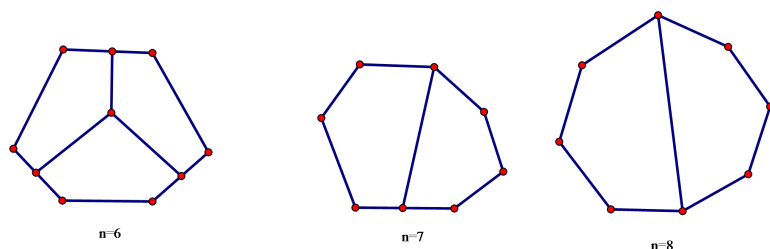
Như vậy ta cần có $\frac{(a-3x)\sqrt{2}}{2} = 2x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{7}$. Như vậy ta chỉ cần chọn điểm M trên cạnh

AC sao cho $AM = \frac{1}{7} AC$ thì ta có được kết quả cần tìm.

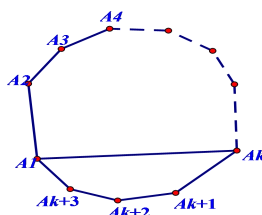
Ví dụ 3:

Chứng minh ta có thể chia đa giác lồi n cạnh bất kỳ ($n \geq 6$) thành các ngũ giác lồi.

Chứng minh:



Với $n = 6, n = 7, n = 8$ ta chia được như trên. Bây giờ ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp.



Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 6$. Ta chứng minh khẳng định cũng đúng với $n = k + 3$.

Xét đa giác $A_1A_2A_3...A_{k+3}$. Ta chia đa giác này thành hai miền bởi đường chéo A_1A_k .

Theo giả thiết quy nạp thì đa giác $A_1A_2A_3...A_k$ chia được. Còn đa giác $A_kA_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}A_1$ là một ngũ giác lồi.

Theo nguyên lý quy nạp thì bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4:

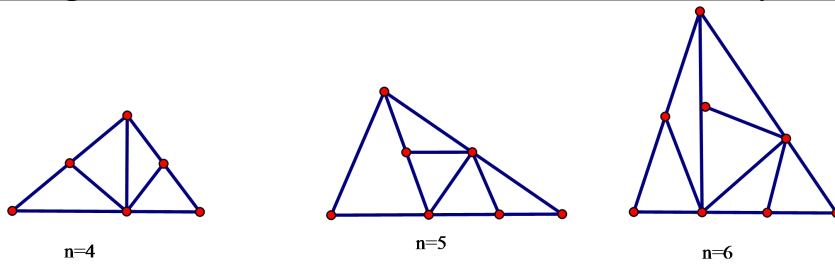
Chứng minh ta có thể chia tam giác bất kỳ thành n tam giác cân với n là số tự nhiên lớn hơn 3.

Chứng minh:

Ta sẽ dùng tư tưởng quy nạp để chứng minh điều khẳng định.

Trước hết ta dùng hình vẽ chỉ ra các trường hợp $n = 4, n = 5, n = 6$ đều đúng. Ta giả sử khẳng định đúng với $n \geq 4$. Ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 3$.

Điều này được thực hiện bằng cách chia tam giác ban đầu thành n tam giác cân. Bây giờ một trong n tam giác cân đó ta thực hiện chia ra làm 4 tam giác cân mới thì số tam giác cân được tăng lên là 3.



Chính vì thế tổng số tam giác cân ta có được là $n + 3$.

Bài tập đề nghị

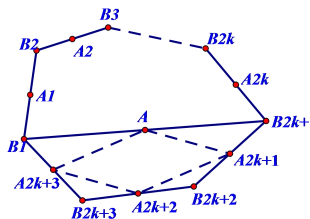
- 1) Chứng minh rằng có thể chia một tam giác bất kỳ thành $2n$ tam giác cân với n là số tự nhiên bất kỳ lớn hơn 1.
- 2) Chứng minh rằng có thể chia tam giác bất kỳ thành n tam giác vuông với n là số tự nhiên lớn hơn 1.
- 3) Chứng minh rằng luôn có thể chia một tam giác bất kỳ thành các tam giác nhọn.
- 4) Chứng minh rằng không tồn tại hai điểm nằm trong hình vuông sao cho sau khi kẻ các đoạn thẳng nối mỗi điểm đó với các đỉnh hình vuông thì hình vuông được chia làm 9 phần có diện tích bằng nhau. _____

§7. QUY NẠP TRONG BÀI TOÁN DỰNG HÌNH VÀ QUỸ TÍCH

Ví dụ 1:

Trong mặt phẳng cho $2n+1$ điểm . Hãy dựng một $(2n+1)$ - giác nhận $2n+1$ điểm làm các trung điểm của các cạnh.

Giải:



Với $n=1$ ta có bài toán cấp 2 quen thuộc :” dựng một tam giác khi biết ba trung điểm của ba cạnh”. Với $n=k \geq 1$. Giả sử với $2k+1$ điểm cho trước không có 3 điểm nào thẳng hàng , ta đã dựng được $2k+1$ - giác thỏa mãn nhận $2k+1$ điểm đó làm trung điểm.

Tiếp theo ta xét $(2k+1)+1$ điểm tùy ý và không có ba điểm nào thẳng hàng là

$A_1, A_2, \dots, A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+3}$. Giả sử các điểm này là trung điểm các cạnh $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{2k+2}B_{2k+3}$.

Khi đó ta có các điểm $A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+3}$ là trung điểm các cạnh $B_{2k+1}B_{2k+2}, B_{2k+2}B_{2k+3}, \dots, B_{2k+3}B_1$.

Ta gọi A là trung điểm B_1B_{2k+1} . Rõ ràng tứ giác $AA_{2k+1}A_{2k+2}A_{2k+3}$ là một hình bình hành.

Theo giả thiết ta đã dựng được đa giác $B_1B_2 \dots B_{2k+1}$ nhận $2k$ điểm $A_i (1 \leq i \leq 2k)$ làm trung điểm và A là trung điểm B_1B_{2k+1} .

Bây giờ từ điểm B_1 ta kẻ đường song song với cạnh AA_{2k+1} cắt cạnh $B_{2k+1}A_{2k+1}$ kéo dài tại

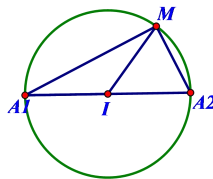
B_{2k+2} . Từ B_{2k+1} ta kẻ đường song song với đoạn AA_{2k+3} cắt đoạn thẳng B_1A_{2k+3} tại điểm B_{2k+3} .

Ta dễ dàng chứng minh được các điểm B_{2k+2}, B_{2k+3} thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Ví dụ2:

Cho trước n điểm phân biệt. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện tổng bình phương các khoảng cách từ điểm đó tới n điểm đã cho luôn bằng bình phương một hằng số cho trước.

Giải:



Bài toán có thể khái quát lại thành “ Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn đẳng thức $MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = k^2$.

Với $n=2$ thì đây là một bài toán hết sức quen thuộc , tập hợp ta đã biết là một đường tròn.

Bằng cách lấy điểm I là trung điểm của đoạn thẳng A_1A_2 . Sử dụng công thức đường tứng

tuyến ta tính được $MA_1^2 + MA_2^2 = 2MI^2 + \frac{A_1A_2^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{2k^2 - A_1A_2^2}}{2}$.

Với n điểm đã cho giả sử ta đã tìm được tập hợp là một đường tròn. Xét hệ $(n+1)$ điểm là

$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$. Theo giả thiết quy nạp thì ta đã tìm được điểm I thuộc đoạn A_nA_{n+1} sao cho

$MA_n^2 + MA_{n+1}^2 = 2MI^2 + \frac{A_n A_{n+1}^2}{2}$. Kết hợp với giả thiết quy nạp ta cần tìm điểm sao cho

$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_{n-1}^2 + 2MI^2 = \text{const}$. Hệ này có n điểm nên tập hợp điểm M cũng là một đường tròn.

Cái điểm lưu ý của bài này là ở bước quy nạp ta giả sử tập hợp là một đường tròn.

Bài tập đề nghị

Cho n đoạn thẳng $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$ mỗi đoạn thẳng nằm trên mỗi cạnh của n -giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong đa giác sao cho tổng diện tích của các tam giác $MB_1C_1, MB_2C_2, \dots, MB_nC_n$ là các hằng số.

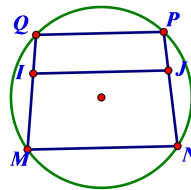
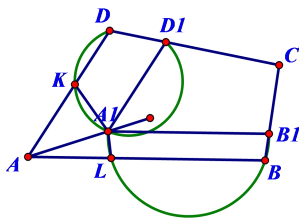
§8. QUY NẠP TRONG HÌNH HỌC TỔ HỢP

Ý tưởng quy nạp cũng được tìm thấy trong các bài toán hình học tổ hợp xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi. Đó là những bài toán được phát biểu thông qua việc cho n -điểm hoặc n -cạnh. Lúc đó ta cần dùng các kiến thức quy nạp để chứng minh tính dẫn của các phát biểu theo số n .

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$, khẳng định sau đây đúng: Mỗi tứ giác nội tiếp có thể chia ra thành n tứ giác mà mỗi tứ giác này lại là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn.

Chứng minh:



Ta chứng minh khẳng định đúng với $n = 4$.

Giả sử A là góc nhỏ nhất của tứ giác $ABCD$. Từ A ta dựng một tia hướng vào bên trong góc BAD . Ta lấy trên tia đó một điểm A_1 . Từ điểm này ta kẻ các đường song song với AB, AD cắt các cạnh BC, CD tương ứng tại B_1, D_1 (ta lấy điểm A_1 đảm bảo những công việc trên

thực hiện được). Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm L, K sao cho

$\widehat{A_1LB} = \widehat{ABC}, \widehat{A_1KD} = \widehat{ADC}$. Lúc đó các hình thang A_1LBB_1, A_1KDD_1 cân nên nội tiếp. Còn hình thang A_1B_1CD có các góc bằng góc của hình thang ABCD nên cũng nội tiếp. Cuối cùng hình thang AKA_1L có $\widehat{ALA_1} + \widehat{KA_1} = (180^\circ - B) + (180^\circ - D) = 180^\circ$ nên nội tiếp.

Khẳng định đúng với $n = 4$.

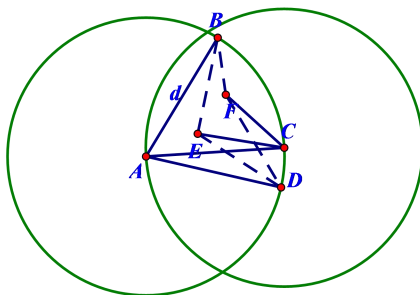
Còn khẳng định $n > 4$ đúng vì sau khi chia ra thành các hình thang cân thì các hình thang cân đó chia ra được thành nhiều hình thang cân khác.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2:

Trong mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$). Ta gọi đường kính của hệ điểm đó là khoảng cách d lớn nhất nối hai điểm bất kì của hệ đó. Chứng minh rằng số lượng các đường kính không vượt quá số n .

Chứng minh:



Giả sử từ điểm A của hệ ta có các đường kính AB, AC, AD. Khi đó rõ ràng B, C, D cùng nằm trên đường tròn $C_1(A, d)$. Tất cả những điểm còn lại của hệ điểm chỉ có thể nằm trên hoặc trong $C_1(A, d)$. Vì các đoạn nối hai trong ba điểm B, C, D không vượt quá d nên chúng phải nằm trong cung có số đo không vượt quá 60° (ta áp dụng tính chất góc đối diện cạnh lớn hơn thì có số đo lớn hơn). Không mất tổng quát ta giả sử rằng C thuộc cung $\widehat{BD}$ mà $sđ\widehat{BD} \leq 60^\circ$.

Bây giờ từ C ta vẽ đường tròn $C_2(C, d)$. Khi đó những điểm cuối của các đường kính kẻ từ C nó đều nằm trên cung MN của (C_2) mà nó nằm bên trong đường tròn (C_1) . Nhưng mọi

điểm trên cung MN (ngoại trừ điểm A) đều cách các điểm B,D một khoảng nhỏ hơn d .

Như vậy CA là đường kính duy nhất xuất phát từ C.

Từ những lập luận trên ta đưa ra khẳng định từ n điểm của hệ tồn tại hai khả năng

Hoặc là tồn tại một điểm trong hệ mà từ nó có không quá một đường kính

(giống như điểm C)

Hoặc từ mọi điểm xuất phát đúng hai đường kính.

Ta chứng minh khẳng định này bằng quy nạp.

Với $n = 3$ thì khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 3$ điểm. Ta sẽ chứng minh nó đúng với cả hệ gồm $n = k + 1$ điểm.

Thật vậy từ $k + 1$ điểm giả sử tồn tại một điểm chẳng hạn là A_1 mà từ đó không xuất phát một đường kính nào hoặc chỉ có một đường kính thì số đường kính của hệ $k + 1$ điểm nhiều hơn hệ gồm $A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$ không quá một đường. Nên thao giả thiết quy nạp thì số đường kính của hệ $k + 1$ điểm này không vượt quá $k + 1$ đường kính.

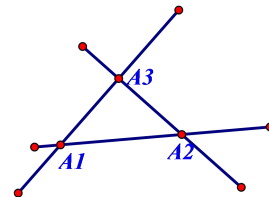
Ngược lại nếu từ mọi điểm của hệ đều tồn tại đúng hai đường kính thì số đường kính của hệ sẽ là $\frac{2(k+1)}{2} = k + 1$.

Từ đây khẳng định được chứng minh theo nguyên lý quy nạp.

Ví dụ 3:

Trong mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm, tất cả không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong n điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n .

Chứng minh:



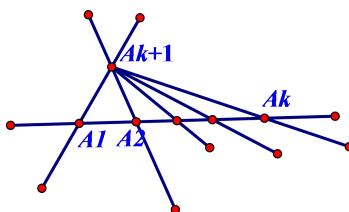
Hiển nhiên khẳng định đúng với $n = 3$

Giả sử khẳng định đúng đến $n = k \geq 3$. Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Ta nhận xét nếu có $k+1$ điểm không cùng nằm trên một đường thẳng thì tồn tại ít nhất một đường thẳng chỉ chứa hai điểm (bài toán Sylvester).

Trở lại với bài toán giả sử ta có $k+1$ điểm và đường thẳng đi qua hai điểm A_k và A_{k+1} chỉ chứa đúng hai điểm đó mà thôi . Khi đó xảy ra chỉ hai khả năng.

- Nếu các điểm $A_1, A_2, \dots, A_k$ nằm trên đường thẳng Δ nào đó thì điểm A_{k+1} không thuộc Δ . Khi đó từ điểm A_{k+1} ta kẻ được k đường thẳng khác nhau tới các điểm $A_1, A_2, \dots, A_k$, cùng với đường thẳng Δ ta có tất cả là $k+1$ đường thẳng.



- Nếu các điểm $A_1, A_2, \dots, A_k$ không cùng nằm trên một đường thẳng , khi đó theo giả thiết quy nạp ta có không ít hơn k đường thẳng đi qua các điểm $A_1, A_2, \dots, A_k$. Theo giả sử ở trên thì tất cả các đường thẳng này đều không có đường nào trùng với đường đi qua A_k và A_{k+1} . Như vậy ta cũng có không ít hơn $k+1$ đường thẳng từ $k+1$ điểm đó.

Bài tập đề nghị

1) Bên trong một hình vuông cạnh 1 cho n điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho và có diện tích S của nó thỏa mãn bất đẳng thức $S < \frac{1}{n-2}$.

2) Bên trong một hình vuông cạnh 1 cho n điểm. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho hoặc là đỉnh của hình vuông sao cho diện tích S của nó thỏa mãn bất đẳng thức $S \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

3) Trong mặt phẳng cho n điểm ($n > 4$), biết rằng không có ba điểm nào thẳng hàng . Chứng minh rằng có ít nhất C_{n-3}^2 tứ giác lồi với những đỉnh trong số những điểm đã cho.

4) Trong mặt phẳng cho 100 điểm , trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Ta xét tất cả những khả năng tạo thành tam giác của những điểm này. Chứng minh rằng có nhiều nhất 70% những tam giác nói trên là tam giác nhọn.

PHẦN III - KẾT QUẢ

Trên đây là nội dung của đề tài ”Quy nạp trong hình học ”. Việc áp dụng đề tài vào thực tiễn giảng dạy được thực hiện theo từng phần. Đề tài được phát huy khá tốt ở các lớp bồi dưỡng học sinh giỏi. Sau đây là phân kết quả .

Sử dụng ở chương trình Bồi dưỡng học sinh giỏi:

Chuyên đề này tác giả hằng năm vẫn sử dụng để dạy đội tuyển học sinh giỏi ở các trường không chuyên và bước đầu cũng cho thấy đã có được một số kết quả. Học sinh được bồi dưỡng đã cảm thấy tự tin hơn trong khi làm bài. Các em đã biết sử dụng quy nạp làm công cụ để giải các bài toán về hình học phẳng, số học, đa thức, lượng giác. Một số em cũng đã đạt được một số giải cấp Tỉnh.

Họ và tên học sinh	Tên giải thưởng
Bùi Văn Thanh Hào	Khuyến khích HSG tỉnh
Nguyễn Thị Mỹ Thu	Lương Thế Vinh(giải II)
Nguyễn Viết Xuân	Lương Thế Vinh(giải II)
Đỗ Thị Trang	Lương Thế Vinh(giải II)
Lại Thị Anh Thư	Lương Thế Vinh(khuyến khích)
Trần Thị Như Xuân	Lương Thế Vinh (giải III)

Sau khi áp dụng chuyên đề này vào giảng dạy và bồi dưỡng, bản thân thấy rằng học sinh đã biết áp dụng phương pháp quy nạp vào giải các bài toán hình học. Các em đã tự tin , linh động hơn trong các tình huống phát biểu rườm rà. Biết nhìn ra bản chất của vấn đề. Dù rất cố gắng triển khai tới học sinh để các em học sinh khá giỏi có điều kiện va chạm, nhưng do nội dung kiến thức tương đối khó và mới lạ nên đối tượng học sinh nắm bắt được chưa nhiều. Tuy vậy , tác giả cũng mạnh dạn viết đề tài này giới thiệu với quý đồng nghiệp gần xa, cũng là một phương thức trau dồi kiến thức, kĩ năng học hỏi kinh nghiệm lẫn nhau. Dù bản thân đã rất cố gắng tìm tòi, chất lọc trong quá trình viết, nhưng do năng lực và kinh

những đề tài còn nhiều hạn chế nên đề tài sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Mong được sự thông cảm và chia sẻ để đề tài được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin được cảm ơn các đồng nghiệp bộ môn Toán , đặc biệt là sự trao đổi thường xuyên từ thầy Nguyễn Văn Phi (tổ trưởng tổ Toán chuyên Hùng Vương), thầy Trần Văn Trí đã có những gợi ý thiết thực để giúp tác giả hoàn thành chuyên đề.

Xin cảm ơn những sự chỉ đạo sát sao từ phía ban giám hiệu trường THPT chuyên Hùng Vương để đề tài hoàn thành đúng thời gian yêu cầu.

Thị xã Dĩ An , tháng 2 năm 2015

Người viết đề tài

NGUYỄN THÀNH NHÂN

ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC NHÀ

TRƯỜNG

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC SỞ GIÁO DỤC .

[illegible]

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Trong chuyên đề này có sử dụng một số tài liệu tham khảo:

1. Sáng tạo trong giải toán THPT
(NGUYỄN HỮU ĐIỀN- NXBGD)
- 2) Phương pháp quy nạp toán học
(NGUYỄN HỮU ĐIỀN- NXBGD)
- 3) Các bài toán hình học tổ hợp dùng cho THCS
(VŨ HỮU BÌNH- NXBGD)
- 4) Chuyên đề BDHSG toán THPT CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP
(PHAN HUY KHẢI- NXBGD)
- 5) Phép quy nạp trong hình học
(L.I LOGOVINA-I.M YAGLOM- KHÔNG XUÂN HIỀN dịch)
- 6) Báo Toán học và tuổi trẻ
(NXBGD)
- 7) Nguồn internet
- 8) Chuyên đề Số phức và ứng dụng
(NGUYỄN THÀNH NHÂN, SKKN năm học 2013-2014)

PHỤ LỤC

STT	NỘI DUNG	TRANG
1	Phần thứ nhất- Phần mở đầu.	1
2	Phần thứ hai - Nội dung đề tài.	7
3	§1. Quy nạp trong đếm số miền của mặt phẳng.	7
	§2 Quy nạp trong tính toán các đại lượng hình học	13
4	§3 Quy nạp trong xây dựng dãy	18
5	§4 Quy nạp trong bài toán lặp	23
6	§5 Quy nạp trong nghiên cứu tính chất hệ điểm	30
7	§6 Quy nạp trong bài toán cắt, ghép hình	34
	§7 Quy nạp trong bài toán dựng hình và quỹ tích	37
8	§8 Quy nạp trong bài toán hình học tổ hợp	39
9	Kết quả.	44
10	Tài liệu tham khảo.	47
11	Phụ lục	48