Mở rộng một bài toán hình học trên THTT

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên báo toán học và tuổi trẻ với phép chứng minh thông qua tính chất chùm điều hòa và ứng dụng bổ đề E.R.I.Q, thêm vào đó là một vài ứng dụng của bài tổng quát.

Trên THTT số 402 tháng 12 năm 2010 mục đề ra kỳ này có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

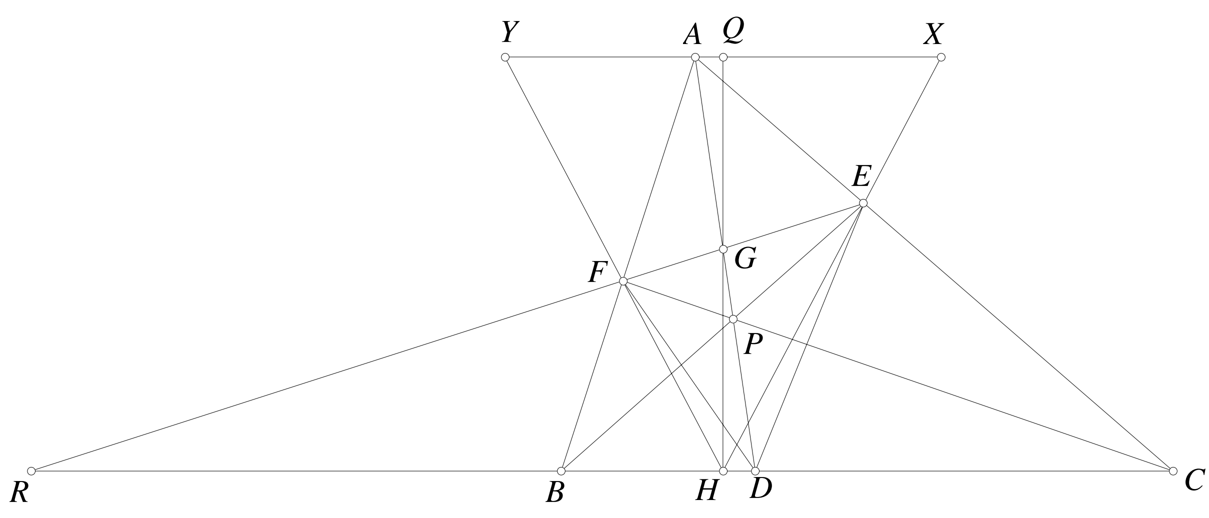
Bài toán 1. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. M là một điểm thuộc đoạn AD. Các đường thẳng BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. DE, DF theo thứ tự cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của EF, KL đi qua A.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên đã có trên THTT số 406 năm 2011. Ngoài việc tính toán các tỷ số để sử dụng bổ đề E.R.I.Q như trong đáp án, ta còn có thể giải bài toán bằng cách sử dụng hai cặp tam giác đồng dạng XKA và YAF, XEA và YAL. Tuy nhiên, việc tính toán các tỷ số nhờ việc sử dụng phương tích kết hợp với định lý Thales giúp ta có một góc nhìn khác trong việc khai thác giả thiết các điểm đồng viên. Với ý tưởng sử dụng bổ đề E.R.I.Q như vậy, chúng ta có cách nhìn tổng quát như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G lên BC. HE, HF lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HAC tại M, N khác H. HG cắt đường thẳng qua A song song BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm MN, EF đi qua Q.

Để giải bài toán ta sử dụng hai bổ đề sau

Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G lên BC. HE, HF, HG lần lượt cắt đường thẳng qua A song song BC tại X, Y, Q thì Q là trung điểm XY và $HX = HY$.

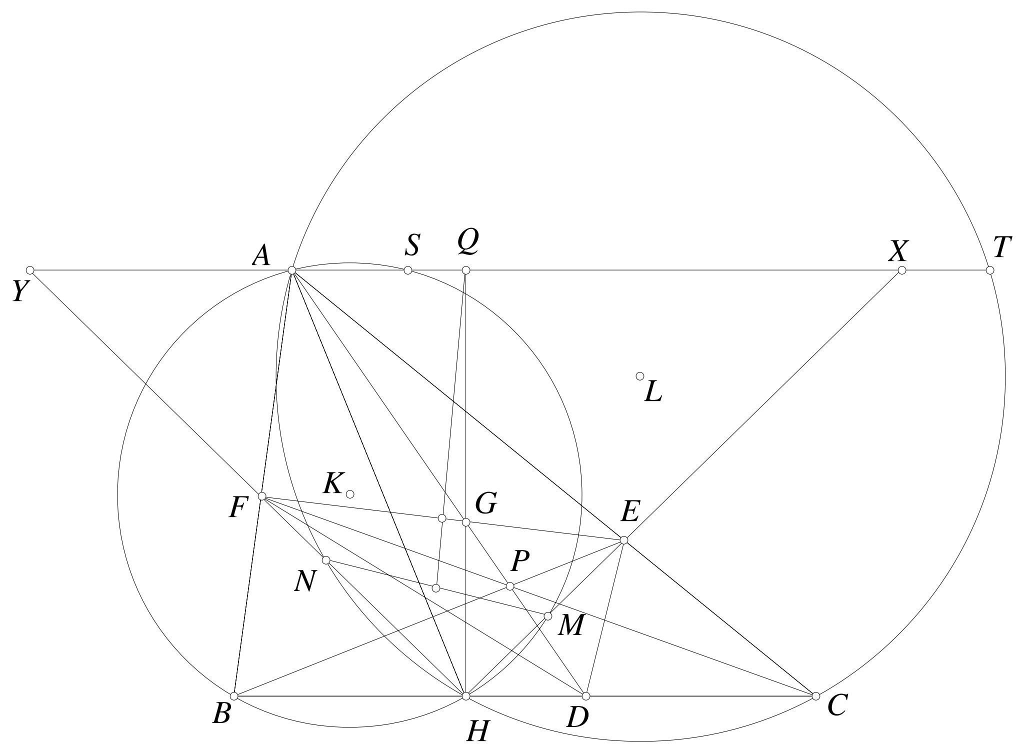


Chứng minh. Gọi EF giao BC tại R ta có hàng điều hòa cơ bản $(BC, DR) = -1$ chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng EF ta có hàng $(EF, GR) = -1$ do đó chùm $H(EF, GR) = -1$ lại có $HG \perp HR$ do đó từ tính chất chùm phân giác dễ suy ra HG là phân giác $\angle EHF$. Vậy trong tam giác HXY có $HG \equiv HQ$ là đường cao và phân giác do đó tam giác HXY cân tại H, suy ra Q là trung điểm XY và $HX = HY$. □

Bổ đề sau được đặt tên là E.R.I.Q là viết tắt các chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh "Equal Ratio In Quadrilateral" bởi kiến trúc sư Hy Lạp Kostas Vittas, chúng tôi tạm dịch là "tỷ số bằng nhau trong tứ giác".

Bổ đề 2.2. Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N thuộc AB, CD sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{ND}}{\overline{NC}}$ thì các điểm chia AD, BC và MN cùng một tỷ số sẽ thẳng hàng.

Bổ đề là kết quả cơ bản có thể tham khảo nhiều cách chứng minh trong nhiều tài liệu khác nhau. Trở lại bài toán



Lời giải. Gọi AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HAC lần lượt tại S, T. HE, HF lần lượt cắt AQ tại X, Y. Ta thấy A, S, H, M thuộc đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AHB và A, T, H, N thuộc đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác AHC nên $\overline{XS}.\overline{XA} = \overline{XM}.\overline{XH}$ và $\overline{YT}.\overline{YA} = \overline{YN}.\overline{YH}$, suy ra $\dfrac{\overline{XS}.\overline{XA}}{\overline{YT}.\overline{YA}} = \dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}}$ (1).

Ta lại chú ý tứ giác $ATCH$ là hình thang cân và có AQ là đường cao nên $\overline{TA} - \overline{CH} = 2\overline{QA}$. Từ đó ta có $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{CH}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{TA} - 2\overline{QA}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{QX} + \overline{QT}} = \dfrac{\overline{XA}}{-\overline{QY} + \overline{QT}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{YT}}$ (2).

Tương tự $\dfrac{\overline{YF}}{\overline{YH}} = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{XS}}$ (3).

Từ (2),(3) suy ra $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}}.\dfrac{\overline{YH}}{\overline{YF}} = \dfrac{\overline{XA}.\overline{XS}}{\overline{YT}.\overline{YA}}$ (4).

Từ (1),(4) suy ra $\dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}} = \dfrac{\overline{XE}.\overline{YH}}{\overline{XH}.\overline{YF}}$ hay $\dfrac{\overline{XM}}{\overline{XE}} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}.\dfrac{YH^2}{XH^2} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}$. Chú ý $YH = XH$ theo bổ đề 2.1.

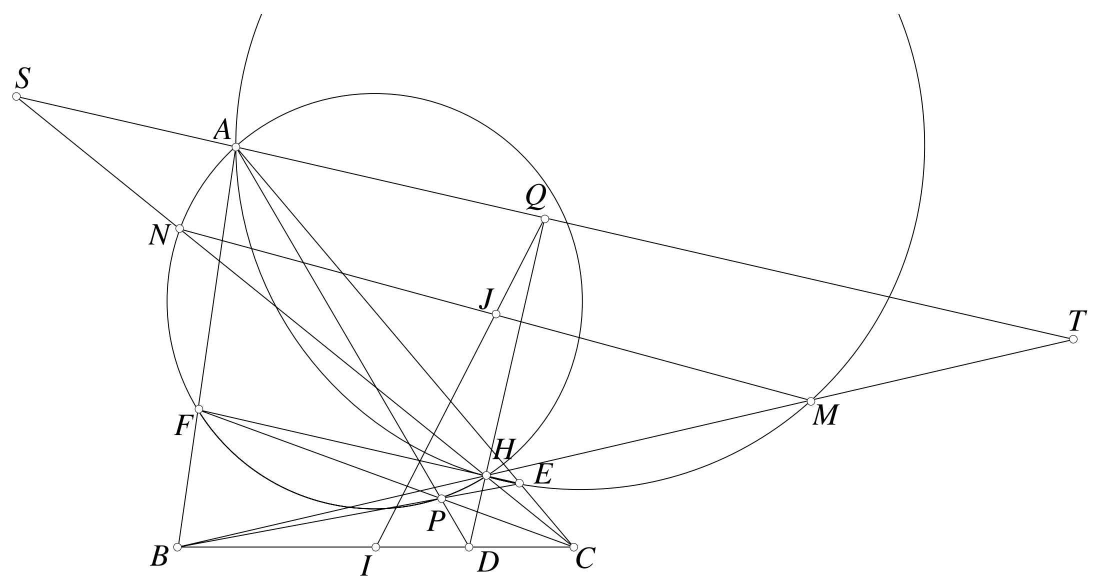
Từ đó cũng theo bổ đề 2.1 và bổ đề 2.2 trung điểm Q của XY và trung điểm của MN, EF thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi AD là đường cao của tam giác ABC ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán phát biểu với P là điểm bất kỳ sẽ có giá trị ứng dụng lớn trong nhiều trường hợp đặc biệt khác nhau. Sau đây tôi xin dẫn ra một vài ví dụ ứng dụng bài toán này

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Gọi PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE, AHF tại M, N. Q là hình chiếu của A lên HD. Chứng minh rằng đường nối trung điểm BC, MN đi qua Q.

Lời giải thứ nhất. Áp dụng trực tiếp bài toán 2 cho tam giác AEF với các đường BE, CF và AD đồng quy, ta thu được điều phải chứng minh. □

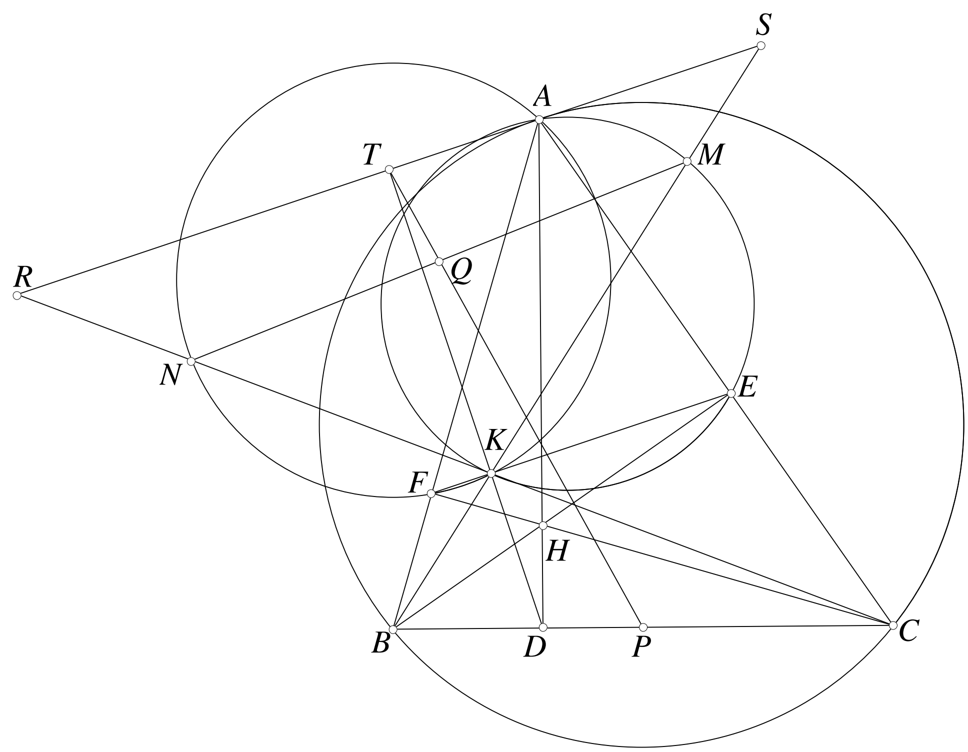
Chúng ta có thể trình bày một cách khác chứng minh bài toán này trực tiếp, đó cũng thể coi là một cách khác chứng minh bài toán 2.



Lời giải thứ hai. Gọi T, S lần lượt là giao điểm của HM, HN với AQ. Áp dụng tính chất chùm điều hòa như trong bổ đề 1 bài toán 2 thì ta suy ra được HQ là phân giác góc $\angle SHT$ mà $HQ \perp ST$ suy ra tam giác HST cân tại H. Suy ra Q là trung điểm ST và $\angle HST = \angle HTS$. Lại có $\angle ANS = 180° - \angle ANH = 180° - \angle AFH = \angle BAT$. Do đó $\triangle SAN \sim \triangle TBA$ suy ra $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{TB}} = \dfrac{\overline{SN}}{\overline{TA}}$, hay $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{SN}.\overline{TB}$. Chứng minh tương tự suy ra $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{TM}.\overline{SC}$ suy ra $\overline{TM}.\overline{SC} = \overline{SN}.\overline{TB}$ hay $\dfrac{\overline{SN}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{TM}}{\overline{TB}}$. Từ đây áp dụng bổ đề E.R.I.Q ta thu được điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Hai bài toán này cũng có thể coi là một. Trong lời giải bài toán 2 chúng ta tính toán các tỷ số nhờ định lý Thales và phương tích rồi dùng E.R.I.Q. Nhưng trong lời giải thứ hai bài toán 3 ta sử dụng hai cặp tam giác đồng dạng. Mỗi phương pháp đều có ưu và nhược điểm. Cách làm tính toán thì hơi dài nhưng logic vì chúng ta biến đổi độ dài đại số trong các bước là đều chính xác. Cách làm sử dụng tam giác đồng dạng ngắn hơn nhưng việc dùng độ dài đại số trên các trục không song song là chưa đảm bảo logic. Việc đưa ra hai lời giải qua hai dạng phát biểu như trong bài viết là hợp lý vì tránh được sự trùng lặp, đồng thời cách phát biểu như đề bài toán 3 đã làm cho vấn đề được "ẩn đi" một chút. Việc áp dụng bài toán 2 và bài toán 3 vào các tam giác khác nhau tạo ra nhiều bài toán mới hoặc bổ đề mới rất thú vị. Ta đến một ví dụ khác áp dụng bài toán 2 và bài toán 3 như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF. K là hình chiếu của D lên EF. Gọi KB, KC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAE, KAF tại M, N khác K. Gọi P, Q là trung điểm MN, BC. Chứng minh rằng PQ và DK cắt nhau trên tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

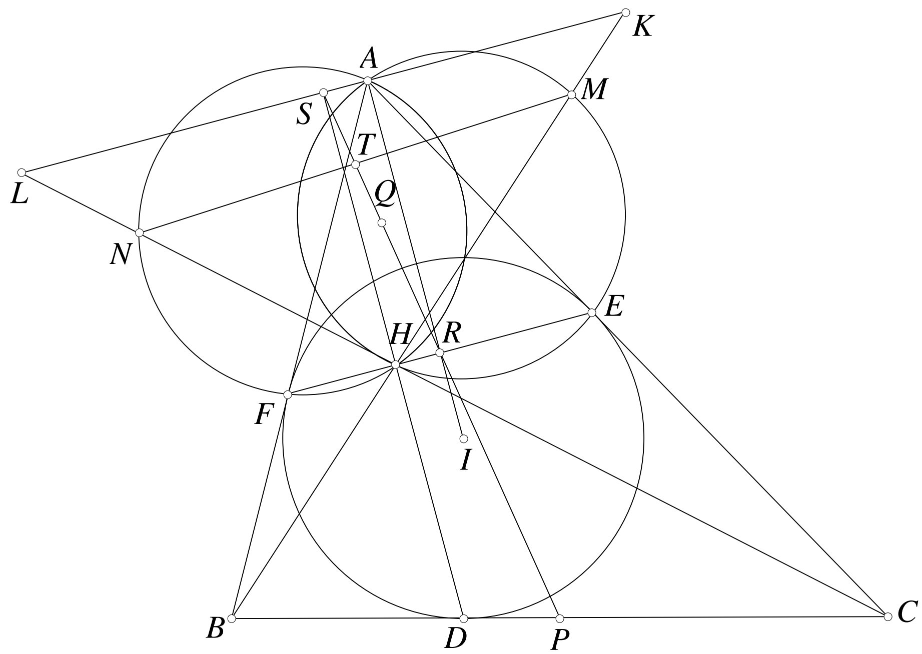


Hình 1.

Lời giải. Gọi S, R lần lượt là giao điểm KM, KN với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Áp dụng bổ đề chứng minh trên ta suy ra DK là phân giác góc BKC. Lại có kết quả quen thuộc là $EF \parallel RS$ nên DK vuông góc với RS mà DK lại là phân giác $\angle RKS$ suy ra tam giác KRS cân tại K. Gọi T là giao điểm DK, RS, suy ra T là trung điểm RS. Đến đây ta thấy ngay mô hình của bài toán 3 là trung điểm các đoạn thẳng MN, BC và T thẳng hàng. Ta được điều phải chứng minh. □

Sau đây là một ứng dụng đẹp khác

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.

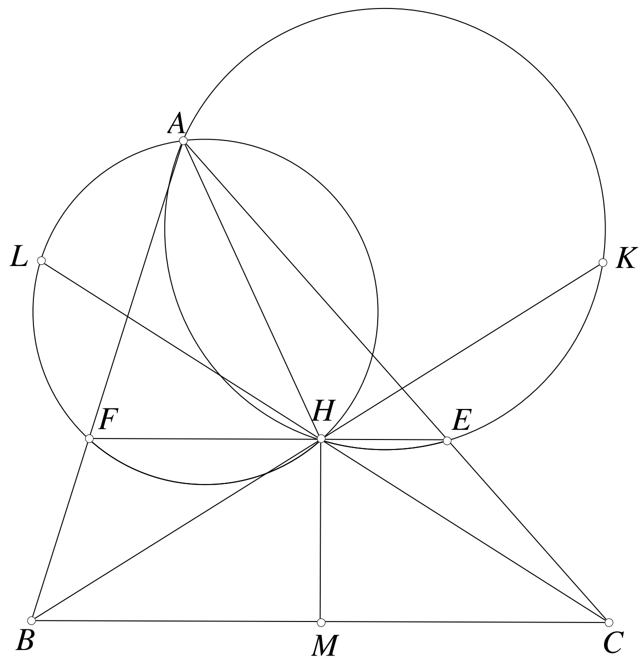


Hình 2.

Lời giải. Gọi P, R, Q, T lần lượt là trung điểm BC, EF, AH, MN. Gọi S là giao điểm QR, DH. Dễ dàng chứng minh được $ASHR$ là hình chữ nhật, suy ra AS là phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC. Gọi K, L lần lượt là giao điểm AS với HM, HN. Vẫn với tính chất hàng điều hòa như bổ đề 1 bài toán 2, ta suy ra được HS là phân giác $\angle KHL$, mà $DH \perp KL$ suy ra tam giác HKL cân tại H. Suy ra S là trung điểm KL. Áp dụng toán số 3, suy ra S, T, P thẳng hàng. Áp dụng một nhận xét quen thuộc là với điểm H nằm trong tam giác sao cho $\angle HBA = \angle HCA$ thì đường nối chân hình chiếu của H trên phân giác ngoài và phân giác trong góc A đi qua trung điểm BC, ta thu được S, R, P thẳng hàng. Từ đó suy ra P, R, Q thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta có thể không dùng nhận xét trên mà chứng minh trực tiếp P, R, S thẳng hàng như sau. Gọi ID cắt EF tại X và cắt (I) tại Y khác D. AY cắt BC tại Z. Dễ thấy AX đi qua trung điểm P của BC và P cũng là trung điểm của DZ, mặt khác $IP \parallel AY$ và $\dfrac{XR}{AS} = \dfrac{RX}{RH} = \dfrac{IX}{ID} = \dfrac{IX}{IY} = \dfrac{PX}{PA}$ nên P, R, S thẳng hàng.

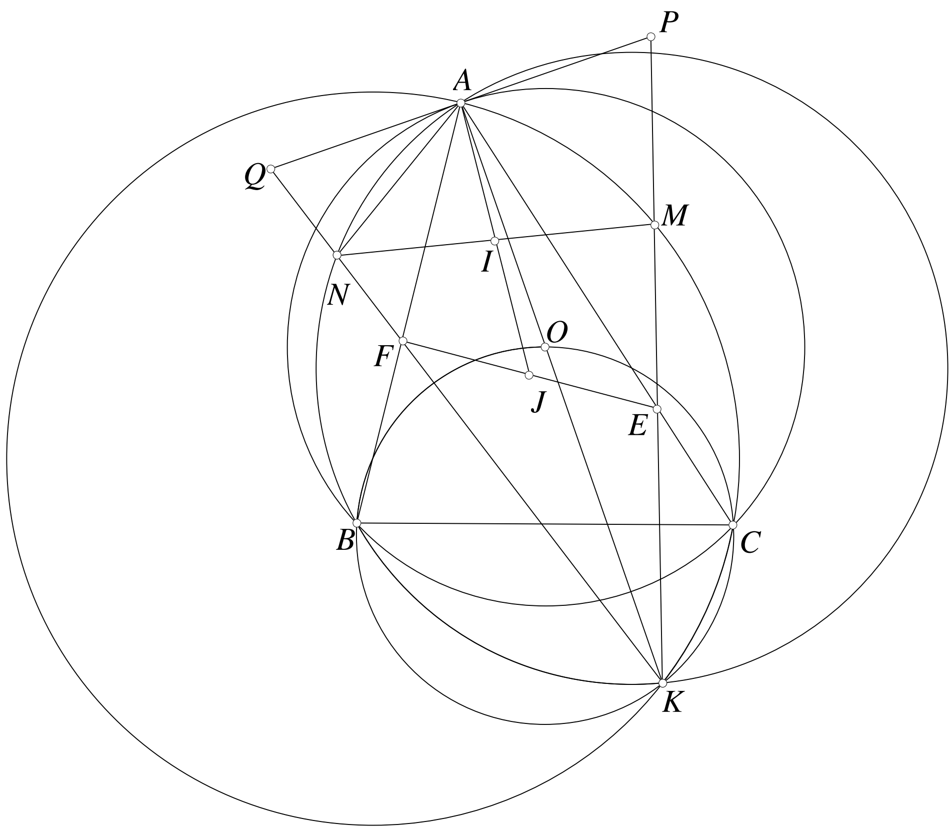
Bài toán 6. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Các điểm E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. H là hình chiếu của M lên EF. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại K, L. Chứng minh rằng $HK = HL$.



Hình 3.

Lời giải. Do $EF \parallel BC$, áp dụng định lý Thales suy ra $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$, lại có M là trung điểm BC suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -1$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với các điểm M, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB, ta có $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ suy ra AM, BE, CF đồng qui. Chứng minh tương tự bài toán 3, dễ có HM là phân giác góc KHL và HM đi qua trung điểm KL, suy ra tam giác HKL cân tại H. Suy ra $HK = HL$. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

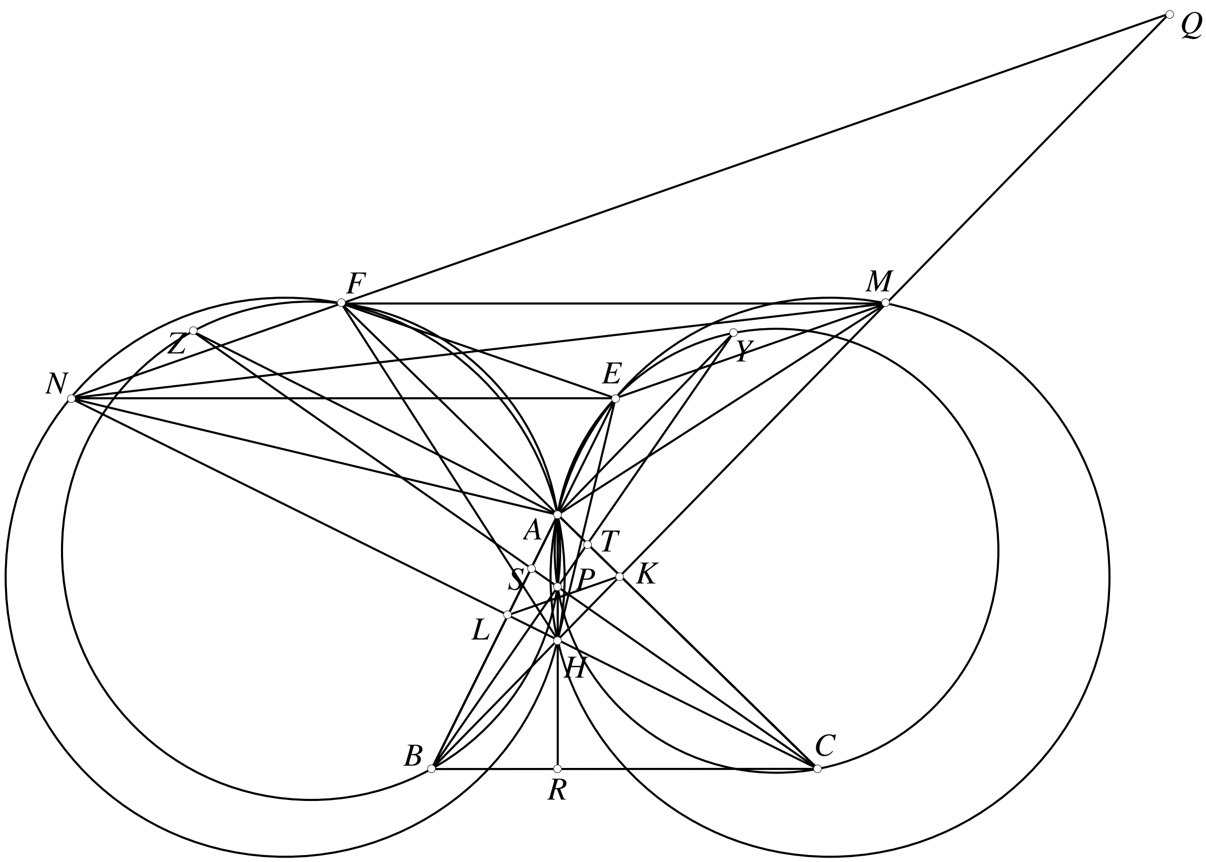
Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt AO tại K khác O. Lấy các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho KA là phân giác $\angle EKF$. KE, KF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAC, KAB tại M, N khác K. Chứng minh rằng đường nối trung điểm của EF, MN đi qua A.



Hình 4.

Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) với KE, KF. Dễ chứng minh được tam giác KPQ cân tại K và A là trung điểm PQ. Ta có $\angle KBC = \angle KOC = 2\angle OAC$ suy ra $\angle KBA = 2\angle OAC + \angle ABC = 180^\circ - \angle ABC = \angle KNA$ suy ra $\angle ANQ = \angle ABC = \angle EAP$, lại có $\angle NQA = \angle APE$ suy ra $\triangle ANQ \sim \triangle APE$. Suy ra $\overline{NQ}.\overline{EP} = \overline{AQ}.\overline{AP}$. Chứng minh tương tự suy ra $\overline{MP}.\overline{FQ} = \overline{AQ}.\overline{AP}$. Từ đây áp dụng bổ đề E.R.I.Q suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 8. Cho tam giác ABC trực tâm H. P là điểm bất kỳ trên AH. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APC, APB lần lượt cắt CA, AB tại E, F. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHF, AHE tại M, N khác H. Chứng minh rằng tam giác AEF và AMN có chung đường đối trung.



Hình 5.

Lời giải. Gọi Q là giao điểm BM, FN. Ta có $\angle CNQ = \angle HAC = \angle CBQ$ suy ra C, B, N, Q cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $\angle NQB = \angle NCB = \angle BAH = \angle EMH$ suy ra $NQ \parallel EM$. Cũng từ tứ giác $BCKL$ nội tiếp nên dễ có $KL \parallel ME \parallel NQ$. Gọi PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại T, S và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PAC, PAB tại Y, Z khác P. Gọi AR, BK, CL là đường cao tam giác ABC. Dễ thấy hai tam giác ABY và AZC đồng dạng. Mặt khác lại có $BA.BE = BP.BY$ và $CA.CF = CP.CZ$ suy ra $\dfrac{BA.BE}{CA.CF} = \dfrac{BP.BY}{CP.CZ} = \dfrac{PB}{PC}.\dfrac{AY}{AC}$. Từ đó $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{PB}{PC}.\dfrac{AY}{AB} = \dfrac{PB}{AB}.\dfrac{AY}{PC} = \dfrac{PB}{AB}.\dfrac{AT}{TP} = \dfrac{CA}{SA}.\dfrac{SB}{CT}.\dfrac{AT}{AB} = \dfrac{ZB}{ZC}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{HB}{HC}$. Ta chú ý các đẳng thức cuối có được do áp dụng Menelaus cho tam giác ABT với S, P, C thẳng hàng và định lý Ceva tam giác ABC với BT, CS và AR đồng quy. Từ đó chú ý $\angle HBE = \angle HCF$ nên hai tam giác HBE và HCF đồng dạng. Suy ra $\angle HFA = \angle HEA = \angle KMA$. Từ đó hai tam giác vuông KFH và KMA đồng dạng. Từ đó $\dfrac{LC}{LN} = \dfrac{KF}{KC} = \dfrac{KF}{KH}.\dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KM}{KA}.\dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KM.KH}{KH.KB} = \dfrac{KM}{KB}$. Vậy từ hai tam giác ACL và ABK đồng dạng suy ra tam giác ABM và ACN đồng dạng. Vậy ta có

$$\frac{LB}{LE} = \frac{KB}{KM} = \frac{LC}{LN} = \frac{KC}{KF}$$

suy ra $NE \parallel MF \parallel BC$. Ta suy ra tứ giác $EMFN$ là hình bình hành hay EF, MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, vậy tam giác AEF, AMN có chung đường trung tuyến kẻ từ A. Ta chứng minh phân giác góc $\angle MAN$ cũng đồng thời là phân giác góc $\angle BAC$ do theo chứng minh trên hai tam giác $\triangle ACN \sim \triangle ABM$ nên $\angle FAN = \angle EAM$ hay phân giác $\angle FAE$ và phân giác $\angle MAN$ trùng nhau. Vậy đường đối trung đỉnh A của tam giác AMN và tam giác AEF trùng nhau. Suy ra điều phải chứng minh. □

Các bạn hãy làm bài tập sau để luyện tập.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC với P, Q đẳng giác trên phân giác góc A. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. D là hình chiếu của Q lên BC. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.

Gợi ý. Gọi K, L là hình chiếu của B, C trên EF. Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\triangle BDQ \sim \triangle BFP, \triangle CDQ \sim CEP, \triangle BKF \sim \triangle CLE$. Chú ý rằng $BK \parallel DH \parallel CL$ nên ta có $\frac{HK}{HL} = \frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DP} . \frac{DP}{DC} = \frac{FB}{FP} . \frac{EP}{EC} = \frac{BF}{CE} = \frac{BK}{CL}$. Từ đó $\triangle KBH \sim \triangle LCH$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Cuối bài viết tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành tới học trò **Nguyễn Ngọc Chi Lan** đã giúp tác giả nhiều trong việc hoàn thiện các lời giải bài toán 3, bài toán 6, 7, 8. Tác giả cũng muốn nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương đã đọc toàn bộ bài viết và cho nhiều góp ý giá trị đồng thời cho các nhận xét xác đáng cho bài toán 1, 2, 3, bạn **Dũng** cũng đưa ra các gợi ý lời giải khác để hoàn thiện cho các bài toán 5, 8, 9.

Tài liệu

[1] Tạp chí THTT số 402 tháng 12 năm 2010.

[2] Tạp chí THTT số 406 tháng 4 năm 2011.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com