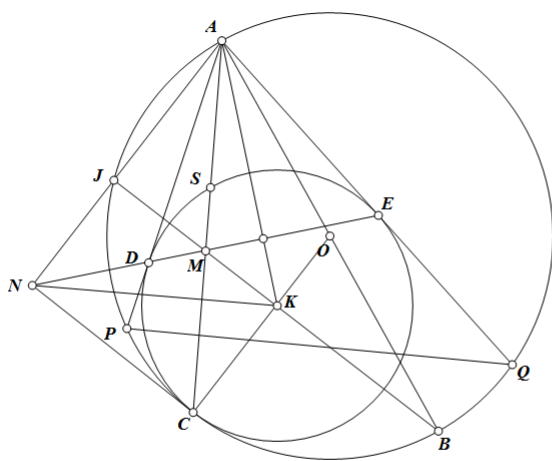


Một số bài toán hình học hay trong các đề chọn tuyển thi VMO 2 năm gần đây

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Tóm tắt nội dung: Ở bài viết này tôi sẽ đưa ra lời giải cho một số bài hình học phẳng hay trong một số đề chọn đội tuyển thi VMO các tỉnh thành phố. Qua đó mong rằng các bạn có thể tự định hướng cho mình một số dạng bài hình học phẳng trong các kì thi chọn đội tuyển.

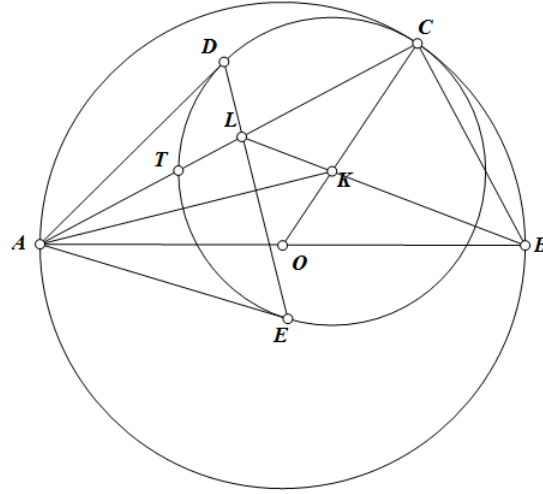
Bài toán 1(Chọn tuyển VMO Hà Nội 2015-2016): Cho đường tròn đường kính AB . Lấy điểm C trên nửa đường tròn này sao cho $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Lấy K là 1 điểm thay đổi trên đoạn OC . Vẽ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn $(K; KC)$. Chứng minh rằng DE, AC, BK đồng quy tại 1 điểm.



Lời giải 1(Nguyễn Duy Khương): Gọi BK cắt lại (O) tại điểm thứ hai J . Gọi JA cắt DE tại điểm N . Do $\angle KJA = \angle KDA = 90^\circ$ do đó tứ giác $JADE$ nội tiếp. Do (O) tiếp xúc (K) nên áp dụng tính chất trục đẳng phương thì tiếp tuyến chung tại C của $(O), (K), DE$ và JA đồng quy tại 1 điểm N . Gọi DE cắt BK tại điểm M .

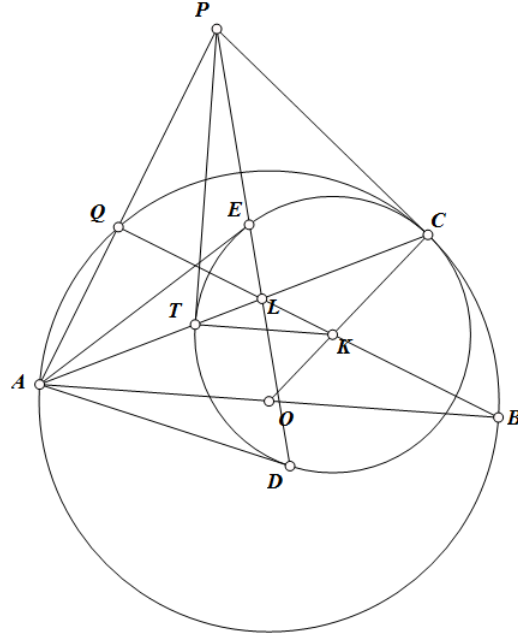
Kẻ tiếp tuyến thứ hai NS tới (K) thế thì do NC đã là tiếp tuyến tới (K) nên ta có: $DSCE$ là 1 tứ giác điều hoà do đó hiển nhiên là ta có: A, S, C thẳng hàng. Gọi M là giao điểm của BK và DE . Gọi I là trung điểm DE .

Do M là trực tâm tam giác ANK nên: $MN.MI = MJ.MK = MD.ME$ (do A, J, K, D, E đồng viên). Vậy ta thu được: $(NM, DE) = -1$ (theo hệ thức *Maclaurin*) suy ra: $C(NM, DE) = -1$ mà ở trên ta đã chỉ ra được: $C(NS, DE) = -1$. Do đó: S, C, M thẳng hàng. Vậy AC, BK, DE đồng quy tại điểm M (đpcm).



Lời giải 2 (Ngô Thế Anh Khoa-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):
Gọi AC cắt đường tròn (K) tại điểm T , giao BK tại điểm L . Do C là tâm vị tự trong của (O) và (K) nên ta có: $\frac{AT}{TC} = \frac{OK}{KC}$. do đó ta có: $TK \parallel AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác LAB với cát tuyến $\overline{OKC}$ ta có:

$\frac{CL}{CA} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \frac{KB}{KL} = 1$. Do $TK \parallel AB$ nên ta có: $\frac{CL}{CA} = \frac{TL}{TA}$ do đó: $(AL, TC) = -1$. Mặt khác nếu gọi DE cắt AC tại điểm L' thế thì $(AL', TC) = -1$ do đó $L \equiv L'$ do đó ta có: DE, BK, AC đồng quy (đpcm).



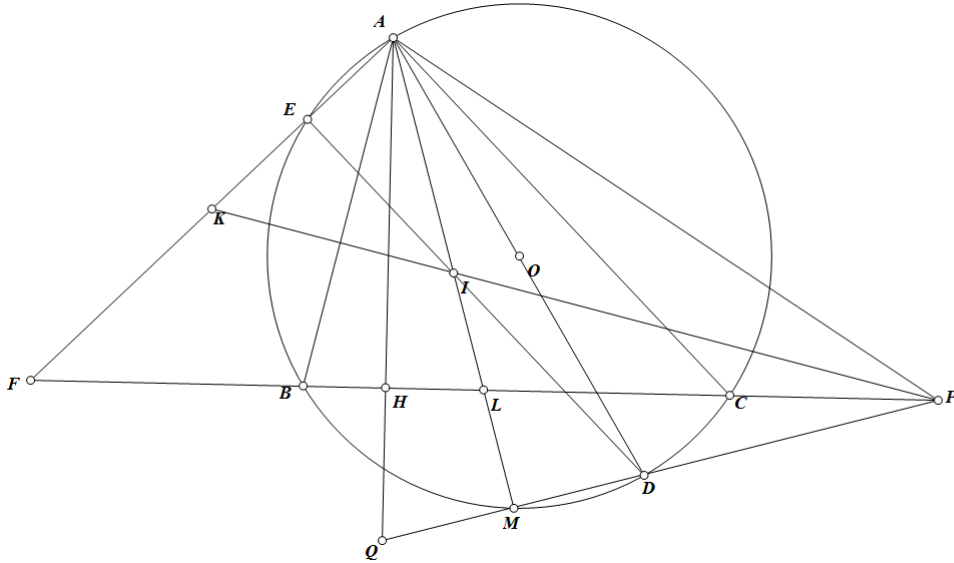
Lời giải 3(Nguyễn Trần Trung Hiếu-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam): Gọi T là giao điểm của AC và (K) . Gọi L là giao điểm ED và TC . Từ giả thiết ta có được: $EDTC$ là một tứ giác điều hoà. Do đó ta có: ED , tiếp tuyến tại T, C đồng quy tại 1 điểm gọi là điểm P . Vậy ta có: $PK \perp AC$. Lại có: $AK \perp ED$ nên L là trực tâm tam giác PKA . Gọi BK cắt AP tại điểm Q vậy ta thu được: $KQ \perp PA$ vậy ta có: $PQ \cdot PA = PR \cdot PK = PC^2$, hay là Q thuộc (O) . Do đó có: $\angle BQA = 90^\circ$ mà $\angle KQA = 90^\circ$ nên thu được: $\overline{BLK}$ hay là DE, BK, AC đồng quy(đpcm).

Nhận xét: Ở lời giải thứ nhất, thứ ba khai thác triệt để vấn đề tiếp tuyến cắt nhau dẫn tới các hàng điều hoà và tính chất phụ từ đó thu được đpcm, riêng về lời giải thứ hai thì điểm đặc biệt chính là việc sử dụng phép vị tự ở đây rất hay và tự nhiên tận dụng được giả thiết tiếp xúc. Có thể nói bài toán này rất đặc sắc dù không quá khó vì giúp học sinh khi làm bài vận dụng được các kiến thức rất đa dạng.

Bài toán 2(Trích đề chọn đội tuyển Hà Tĩnh 2015-2016): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có AH là đường cao và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC . D đối xứng A qua O . MD cắt BC, AH lần lượt tại các điểm P, Q .

a) Chứng minh rằng tam giác IPQ vuông.

b) DI cắt (O) tại điểm thứ hai là E . AE, BC cắt nhau tại F . Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm tam giác APF .

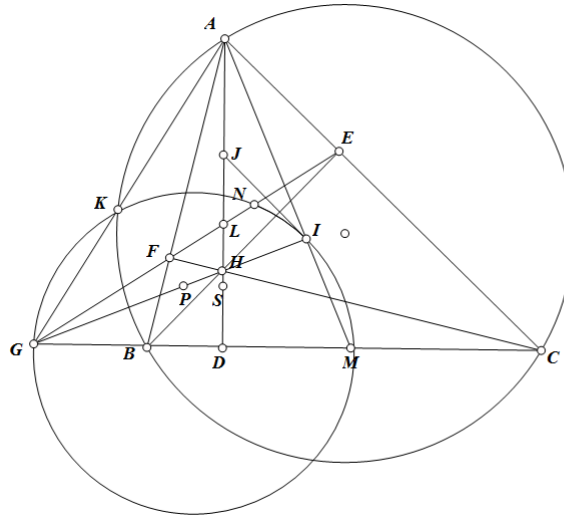


Lời giải(Nguyễn Duy Khương): a) Ta thấy rằng: $\angle AHC = \angle AMP = 90^\circ$ do đó $\angle HAM = \angle HPM$. Chú ý rằng ta dễ chứng minh được AH, AO đẳng giác trong tam giác ABC do đó AI là phân giác góc QAD hay $\angle MAD = \angle MCD = \angle MPC$ do đó $\triangle MCD \sim \triangle MPC(g.g) \Rightarrow MC^2 = MD.MP = MB^2 = MI^2$ (do M là trung điểm cung nhỏ BC). Do $A, I, M \perp QD$ nên tam giác QAD cân hay là $MQ = MD$ do đó $MI^2 = MQ.MD$ hay theo hệ thức lượng trong tam giác vuông thì tam giác IPQ vuông tại I (đpcm).

b) Trước tiên ta để ý rằng: $\angle IAE = \angle IDM = \angle IQD = \angle IHP$ hay là tứ giác $AIHF$ nội tiếp. Gọi K là trung điểm AF . Ta có: $\angle KIA = \angle KAI = \angle IHL = \angle IQP = \angle MIP$ hay là P, I, K thẳng hàng. Gọi $AM \cap BC = L$, ta có: $\frac{LI}{IA} = \frac{LC}{CA} = \frac{LB}{AB} = \frac{BC}{CA+AB} = \frac{1}{2}$. Áp dụng định lí *Menelaus* cho tam giác ALF với cát tuyến PIK thì $\frac{PF}{PL} \cdot \frac{IL}{IA} \cdot \frac{KA}{KF} = 1$ suy ra $\frac{PF}{PL} = 2$ do đó L là trung điểm PF . Vậy hiển nhiên thu được I là trọng tâm tam giác APF (đpcm).

Nhận xét: Bài toán này khá hay bởi sử dụng được khá nhiều kiến thức tinh tế, xong lại rất biết khái thác điểm mới với cấu hình tam giác $AB + AC = 2BC$. Theo tôi thì bài toán ra như thế này rất hay và có ý nghĩa.

Bài toán 3(Trích đề chọn đội tuyển Nam Định 2015-2016, ngày 1): Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . EF cắt BC tại điểm G . K là hình chiếu của H lên AG . AH cắt EF tại điểm L . Trung trực LD cắt HG tại điểm P . Gọi N là trung điểm EF . Chứng minh rằng: (KGN) tiếp xúc (DPL) .

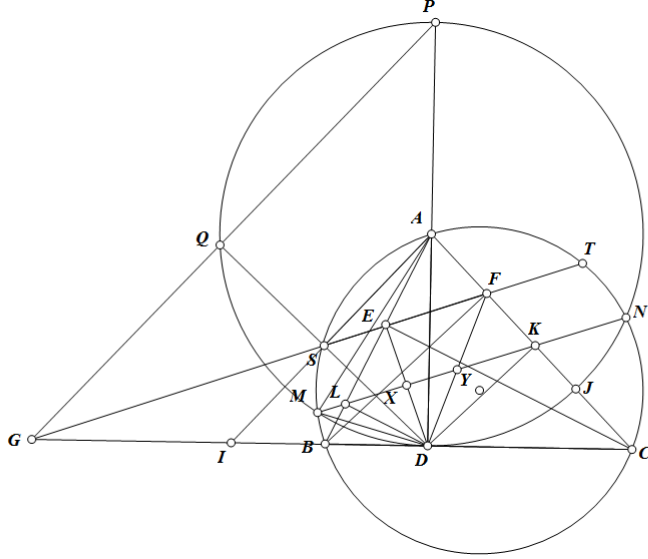


Lời giải: Ta dễ thấy K, H, M thẳng hàng (M là trung điểm BC) đồng thời GH vuông góc AM tại điểm I . Gọi S là trung điểm đoạn LD . Chú ý theo hàng điểm điều hoà cơ bản thì $(GD, BC) = -1$ do đó xét phép chiếu xuyên tâm E thì $(AH, LD) = -1$ do đó: $\overline{HL} \cdot \overline{HD} = \overline{SH} \cdot \overline{HA}$ (theo hệ thức Maclaurin) $= \overline{HP} \cdot \overline{HI}$ (do tứ giác APSI nội tiếp đường tròn đường kính AP) vậy L thuộc (PID) . Do N là trung điểm EF nên ta thấy $\angle MNG = \angle GIM = 90^\circ = \angle GKM$ nên ta thấy 5 điểm G, K, N, I, M đồng viên. Đến đây bài toán đơn giản đi nhiều. Gọi J là trung điểm AH .

Ta thấy rằng: $JI^2 = JA^2 = \overline{JL} \cdot \overline{JD}$ (hệ thức Newton cho hàng $(AH, LD) = -1$) nên IJ tiếp xúc (DPL) . Hiển nhiên rằng IJ tiếp xúc với (KGM) hay (KGN) . Vậy IJ là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn này hay ta có đpcm.

Bài toán 4(Trích đề chọn đội tuyển Nam Định 2015-2016, ngày 2): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF . Đường tròn $(A; AD)$ cắt (O) tại 2 điểm M, N .

- Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm DE, DF .
- Gọi EF cắt BC tại điểm G . DP là đường kính của $(A; AD)$. PG cắt $(A; AD)$ tại điểm Q khác P . Chứng minh rằng trung điểm DQ nằm trên (O) .



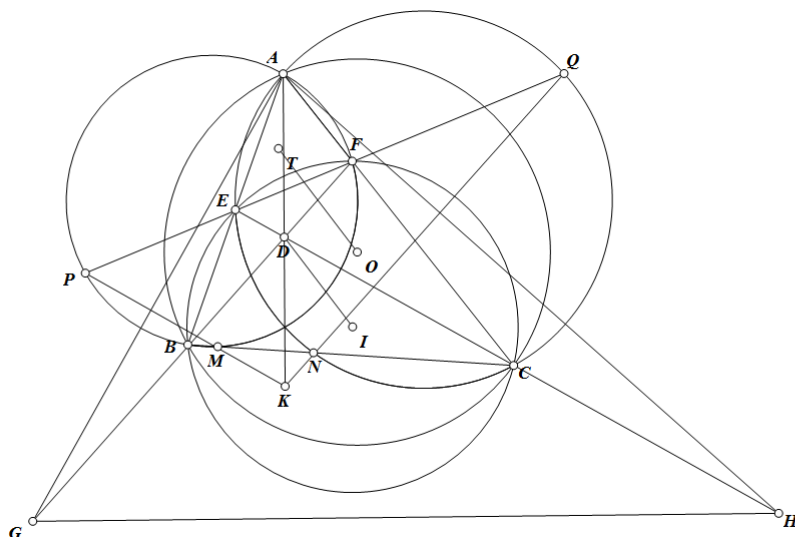
Lời giải: a) Trước tiên ta thấy trục đẳng phương của (O) và $(A; AD)$ là MN do đó $MN \perp OA$. Ta có: $EF \perp OA$ (quen thuộc). Do đó $MN \parallel EF$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm DE và DF . Kẻ DL, DK vuông góc với AB, AC tại L, K . Ta có: X là trung điểm DE là cạnh huyền của tam giác vuông ELD thế thì ta có: L, X, Y thẳng hàng. Tương tự ta thu được: K, L, X, Y thẳng hàng. Lại có: $AD^2 = (AN^2) = AK.AC = AL.AB$ do đó tứ giác $LKCB$ nội tiếp nên: $\angle AKN = \angle ANC = 180^\circ - \angle B = \angle LKC$. Do đó L, K, N thẳng hàng tương tự thì K, L, M thẳng hàng do đó M, L, K, X, Y, N thẳng hàng hay đpcm.

b) Xét phép vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{2}$: $Q \rightarrow S$ (trung điểm QD); $P \rightarrow A$; $(A; AD) \rightarrow (AD = 2R)$. Do đó vì $Q \in (A; AD)$ nên $S \in (AD = 2R)$. Cũng phép vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{2}$: $G \rightarrow I$ (trung điểm GD). Do đó ta thấy: $\overline{ISA} \perp SD$ vậy theo hệ thức lượng thì tam giác vuông $IS.IA = ID^2$. Theo hàng điểm điều hoà cơ bản thì $(GDBC) = -1$ nên theo hệ thức Newton thì $ID^2 = IG^2 = IB.IC$. Do đó $IS.IA = IB.IC$ hay là $S \in (O)$. Vậy ta thu được S là trung điểm QD nằm trên (O) (đpcm).

Nhận xét: Câu a) và câu b) không liên quan tới nhau lắm nên khá khó cho những người có tư tưởng liên hệ. Bài toán khá lệ thuộc vào việc có hàng điểm $(GDBC) = -1$. Ta có thể tổng quát thành bài toán sau: "Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD . Lấy 1 điểm S trên đoạn AD . Gọi $BS \cap AC = F$, $CS \cap AB = E$. Gọi $(A; AD)$ cắt AD tại điểm thứ hai là P . Giả sử $EF \cap BC = G$. GP cắt lại $(A; AD)$ tại điểm Q . Chứng minh rằng trung điểm QD nằm trên (O) ". Các bạn có thể giải bài này tương tự bài toán gốc.

Bài toán 5(Trích đề chọn đội tuyển PTNK 2015-2016, ngày 2): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (I) qua B, C cắt BA, CA tại các điểm E, F .

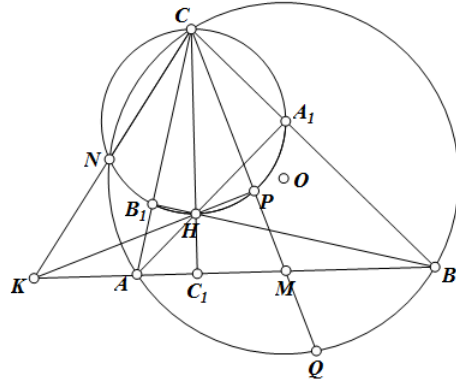
- a) Giả sử BF, CE nhau ở D và T là tâm của (AEF) . Chứng minh rằng: $OT \parallel ID$.
- b) Trên BF, CE lấy các điểm G, H sao cho $AG \perp CE$ và $AH \perp BF$. Các đường tròn $(ABF), (ACE)$ cắt BC tại các điểm $M, N (\neq B, C)$ và cắt EF tại $P, Q (\neq E, F)$. Gọi $K = MP \cap NQ$. Chứng minh rằng: $DK \perp GH$.



Lời giải: a) Câu này khá đơn giản (nếu không đòi hỏi chứng minh lại định lý *Borcard*). Ta gọi $EF \cap BC = S$. Gọi $SA \cap (O) = J (\neq A)$. Dĩ nhiên $SJ \cdot SA = SB \cdot SC = SE \cdot SF$ do đó $J \in (AEF)$. Do đó $OT \perp SA$ (quan hệ trục đẳng phương). Sử dụng định lý *Borcard* cho tứ giác $BEFC$ nội tiếp thì dĩ nhiên $ID \perp SA$. Do đó $OT \parallel ID$ (đpcm).

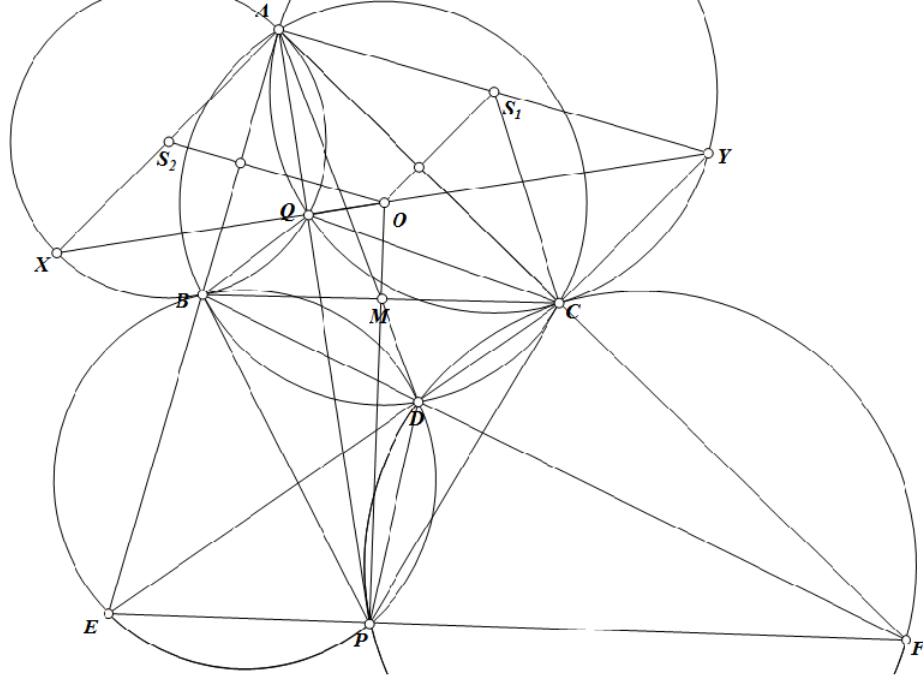
b) Từ giả thiết khá loằng ngoằng thì ta dễ thấy D là trực tâm tam giác AHG . Do đó $AD \perp GH$. Vậy thực ra chỉ cần chứng minh A, D, K thẳng hàng. Ta có: $\angle PMN = 180^\circ - \angle PMB = 180^\circ - \angle PFB = 180^\circ - \angle NCE = 180^\circ - \angle PQN$ do đó $PMNQ$ nội tiếp do đó K nằm trên trục đẳng phương của $(ABF), (ACE)$. Hiển nhiên AD chính là trục đẳng phương của $(ABF), (ACE)$ do đó A, D, K thẳng hàng. Vậy ta thu được $DK \perp GH$ (đpcm).

Bài toán 6(Trích đề chọn đội tuyển Quảng Ninh 2015-2016, ngày 2): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . AA_1, BB_1 là các đường cao của tam giác ABC . Gọi M là trung điểm AB . CM cắt $(CA_1B_1), (O)$ lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng: $MP = MQ$.



Lời giải: Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khi đó ta thấy các điểm C, B_1, A_1, H đồng viên. Gọi (CH) cắt lại (O) tại điểm thứ hai N khác C . Gọi CN cắt AB tại K . Ta dễ có CN, A_1B_1, AB đồng quy (theo tính chất trục đẳng phương). Gọi CH cắt AB tại C_1 . Áp dụng định lý *Borcard* cho tứ giác ABB_1A_1 nội tiếp ta có $KH \perp CM$ mà từ gt ta có: $HP \perp CM$ nên ta có ngay rằng K, H, P thẳng hàng vậy ta có ngay rằng tứ giác CPC_1K nội tiếp hay là $CM.CP = MC_1.MK$. Theo hàng điểm điều hoà cơ bản ta dễ thấy $(KC_1AB) = -1$ hay là $MC_1.MK = MA^2$ hay là $MC.MP = MA^2 = MQ.MC$. Do đó ta có ngay rằng: $MP = MQ$ (đpcm).

Bài toán 7 (Trích đề Hà Nội TST 2016-2017): Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm BC . AM cắt (O) tại các điểm A, D . Giả sử $BD \cap AC = F, CD \cap AB = E$. $(ABF) \cap (ACE) = A, P$. Gọi (S_1) là đường tròn qua C tiếp xúc AB tại A . Gọi (S_2) là đường tròn tiếp xúc AC tại A và đi B . $A, Q = (S_1) \cap (S_2)$. Chứng minh rằng tam giác OPQ vuông.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Ta thấy ngay được rằng: P là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ACFDBE$ do đó dĩ nhiên P, E, F thẳng hàng. Theo định lý Borcard thì ta có: $\overline{O, M, P} \perp EF$ do đó $EF \parallel BC$ vậy là: $\angle BCD = \angle DEP = \angle DBP$ do đó PB tiếp xúc (O) . Tương tự PC tiếp xúc (O) . Kẻ các đường kính AX, AY lần lượt của $(S_2), (S_1)$. Lại có: $\angle AQB = 180^\circ - \angle AXB = 180^\circ - \angle AS_2O$. Tương tự thì: $\angle AQC = 180^\circ - \angle AS_1O$ do đó $\angle AQB + \angle AQC = 360^\circ - 2\angle AS_1O = 2(180^\circ - \angle A) = 360^\circ - 2\angle A$ do đó hiển nhiên $\angle BQC = 2\angle A$ do đó P, B, Q, O, C nằm trên một đường tròn vậy nên $OQ \perp PQ$ do đó ta thu được ngay đpcm.

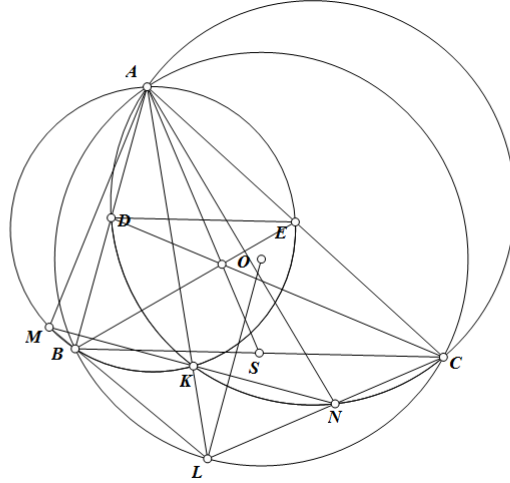
Nhận xét: Nếu bài toán hỏi là chứng minh A, P, Q thẳng hàng thì có vẻ sẽ hay hơn. Điều này cũng không khó để chứng minh. Chú ý việc tứ giác AS_2S_1O là hình bình hành nên S_1S_2 chia đôi AO do đó theo tính chất vị tự dĩ nhiên X, Y, O thẳng hàng. Ta có: $\angle AQX + \angle AQY = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên X, Y, Q, O thẳng hàng. Dĩ nhiên là $AQ \perp OQ$ do đó A, Q, P thẳng hàng.

Bài toán 8 (Trích đề Lạng Sơn TST 2016-2017): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm nội tiếp tam giác. (O_1) qua C tiếp xúc AI tại I cắt $AC, (O)$ lần lượt tại các điểm E, H .

a) Chứng minh rằng: HE chia đôi AI .

b) Hoàn toàn tương tự phần a) chúng ta chứng minh được: GF đi qua trung điểm AI . Vậy là dễ thấy rằng: $SF.SG = SE.SH (= AS^2)$. Do đó $FGHE$ nội tiếp, gọi Ix là tiếp tuyến (IGH). Ta thấy rằng: $\angle xIE = \angle xIH + \angle HIE = \angle ACH + \angle HGI = \angle IGF + \angle FGA - \angle AGH + \angle ACH = \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Lại có: $\angle EFI = \angle GHE + \angle SIG = \frac{\angle B}{2} + \angle GBA + \frac{\angle A}{2} - \angle AHG = \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Do đó $\angle xIE = \angle EIF$ hay là Ix cũng tiếp xúc (EIF). Vậy (EIF) tiếp xúc (GIH) (đpcm).

a) Chứng minh rằng: K, M, N thẳng hàng và $OK \perp MN$.
b) Chứng minh rằng K là trung điểm MN .



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): a) Ta có: $\angle AKM = \angle ABM = 180^\circ - \angle ABL$ mà $\angle AKN = 180^\circ - \angle ACL$ nên $\angle AKM + \angle AKN = 180^\circ$ hay là M, K, N thẳng hàng. Ta có: $LM.LB = LK.LA = LN.LC$ nên tứ giác $MBNC$ nội tiếp suy ra $\angle LNK = 180^\circ - \angle MNC = 180^\circ - \angle MBC = \angle LBC = \angle LAC$. Lại có: $\angle OLC = \frac{180^\circ - \angle LOC}{2} = 90^\circ - \angle LAC$ do đó $\angle OLC + \angle LNK = 90^\circ$ suy ra $OL \perp MN$.

b)Ta dễ thấy được AK là đường đối trung của tam giác ABC . Đến đây ta lại thấy rằng: $\angle AMN = \angle ABC, \angle ANM = \angle ACB$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle AMN$. Gọi S là trung điểm BC , khi đó áp dụng tính chất đồng dạng trung tuyến có được ngay K cũng là trung điểm MN (đpcm).

Trên đây là 9 bài toán khá hay mà tôi đã tự mình giải và gõ cộc cộc lại để dành tặng cho các bạn. Qua các bài toán trên chúng ta có thể thấy rằng kiến thức trong các bài toán này khá đa dạng và cốt lõi là kiểm tra các kĩ năng xử lí, biến đổi của người làm. Xin chân thành cảm ơn thầy **Nguyễn Trung Tuấn** đã tuyển tập lại các đề chọn đội tuyển các năm 2015 – 2016, 2016 – 2017 nhờ đó tôi có nguồn tư liệu để hoàn thiện bài viết này. Cuối cùng, bài viết này ra đời và hoàn thiện vào sát ngày 20 – 10, xin được gửi tặng các bạn nữ như một món quà sớm(về tinh thần). Để củng cố thêm xin đề nghị một số bài tập.

Bài toán 10(Trích đề chọn đội tuyển Phú Thọ 2015-2016): Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (C, B là các tiếp điểm). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC . D là 1 điểm trên cạnh EF . Từ D kẻ các tiếp tuyến DP, DQ đến (O) . Gọi $PQ \cap EF = M$. Chứng minh rằng: $\angle DAM = 90^\circ$.

Bài toán 11(Chọn đội tuyển KHTN Hà Nội, ngày 1, vòng 2, 2015-2016): Cho

tam giác ABC có E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Tiếp tuyến tại E, F của (AEF) cắt BC tại các điểm M, N . BE, CF lần lượt cắt FN, EM tại K, L

a) Chứng minh rằng: $\angle KAB = \angle LAC$.

b) Gọi $BE \cap CF = X, EN \cap FM = Y$. Chứng minh rằng XY đi qua điểm cố định khi E, F di động

Bài toán 12(Trích đề chọn đội tuyển TPHCM 2016-2017, ngày 2): Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi $BE \cap CF = T$. Đường tròn O_1 qua T tiếp xúc AB, AC tại A_1, B_1 . Đường tròn (O_2) qua T tiếp xúc AB, BC tại A_2, B_2 . Đường tròn (O_3) qua T và tiếp xúc CA, BC tại các điểm A_3, B_3 . Chứng minh rằng 6 điểm $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ đồng viên.