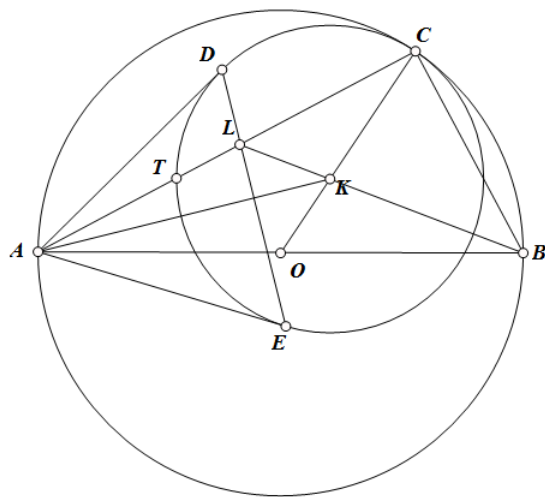


Các lời giải khác nhau cho bài toán hình học hay chọn đội tuyển Hà Nội 2015-2016

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Lời nói đầu: Bài viết này lấy cảm hứng từ nhiều lời giải khác nhau mà anh **Ngô Thế Anh Khoa-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam** đã gửi về cho tôi. Bài viết vẫn sẽ cập nhật thêm các lời giải mà tôi chọn lọc khi các bạn gửi cho tôi qua *facebook(MG Khương Nguyễn)* hoặc email:*nguyenduykhuong696@gmail.com*

Bài toán (Hà Nội TST 2015-2016): Cho đường tròn đường kính AB . Lấy điểm C trên nửa đường tròn này sao cho $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Lấy K là 1 điểm thay đổi trên đoạn OC . Vẽ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn $(K; KC)$. Chứng minh rằng DE, AC, BK đồng quy tại 1 điểm.



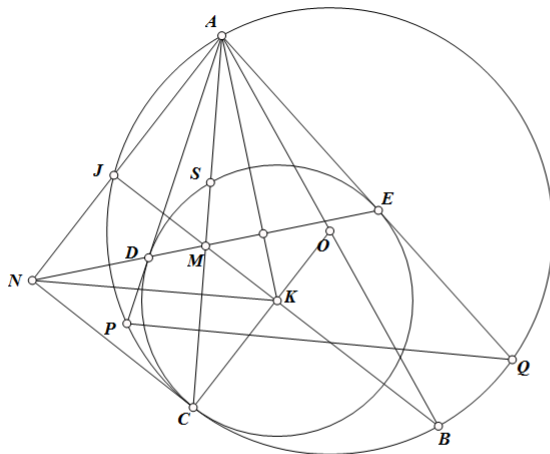
Lời giải 1(Ngô Thế Anh Khoa-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):
Gọi AC cắt đường tròn (K) tại điểm T , giao BK tại điểm L . Do C là tâm vị tự

trong của (O) và (K) nên ta có: $\frac{AT}{TC} = \frac{OK}{KC}$. do đó ta có: $TK \parallel AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác LAB với cát tuyến $\overline{OKC}$ ta có:

$\frac{CL}{CA} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \frac{KB}{KL} = 1$. Do $TK \parallel AB$ nên ta có: $\frac{CL}{CA} = \frac{TL}{TA}$ do đó: $(AL, TC) = -1$. Mặt khác nếu gọi DE cắt AC tại điểm L' thì $(AL' TC) = -1$ do đó $L \equiv L'$ do đó ta có: DE, BK, AC đồng quy (đpcm).

Nhận xét: Lời giải thứ nhất rất hay bởi tôi thực sự rất ấn tượng với cách sử dụng vị tự ở đây.

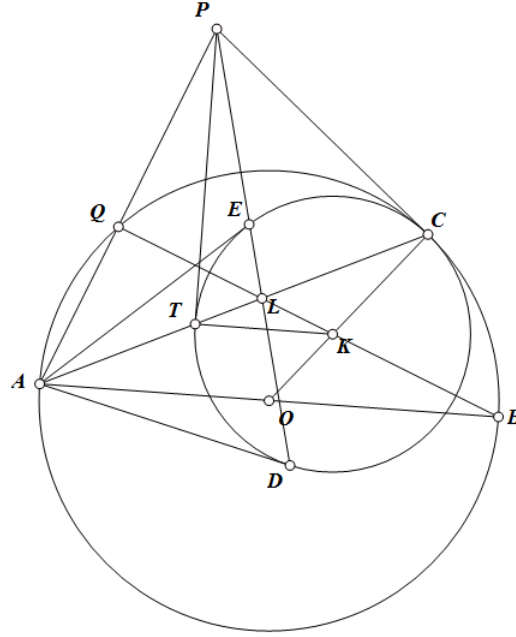
Lời giải 2(Nguyễn Duy Khương-11T2-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):



Gọi BK cắt lại (O) tại điểm thứ hai J . Gọi JA cắt DE tại điểm N . Do $\angle KJA = \angle KDA = 90^\circ$ do đó tứ giác $JADE$ nội tiếp. Do (O) tiếp xúc (K) nên áp dụng tính chất trục đẳng phương thì tiếp tuyến chung tại C của (O) , (K) , DE và JA đồng quy tại 1 điểm N . Gọi DE cắt BK tại điểm M . Kẻ tiếp tuyến thứ hai NS tới (K) thì do NC đã là tiếp tuyến tới (K) nên ta có: $DSCE$ là 1 tứ giác điều hoà do đó hiển nhiên là ta có: A, S, C thẳng hàng. Gọi M là giao điểm của BK và DE . Gọi I là trung điểm DE .

Do M là trực tâm tam giác ANK nên: $MN.MI = MJ.MK = MD.ME$ (do A, J, K, D, E đồng viên). Vậy ta thu được: $(NM, DE) = -1$ (theo hệ thức *Maclaurin*)

suy ra: $C(NM, DE) = -1$ mà ở trên ta đã chỉ ra được: $C(NS, DE) = -1$. Do đó: S, C, M thẳng hàng. Vậy AC, BK, DE đồng quy tại điểm M (đpcm).



Lời giải 3(Nguyễn Trung Hiếu-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):

Gọi T là giao điểm của AC và (K) . Gọi L là giao điểm ED và TC . Từ giả thiết ta có được: $EDTC$ là một tứ giác điều hoà. Do đó ta có: ED , tiếp tuyến tại T, C đồng quy tại 1 điểm gọi là điểm P . Vậy ta có: $PK \perp AC$. Lại có: $AK \perp ED$ nên L là trực tâm tam giác PKA . Gọi BK cắt AP tại điểm Q vậy ta thu được: $KQ \perp PA$ vậy ta có: $PQ \cdot PA = PR \cdot PK = PC^2$, hay là Q thuộc (O) . Do đó có: $\angle BQA = 90^\circ$ mà $\angle KQA = 90^\circ$ nên thu được: B, L, K thẳng hàng hay là DE, BK, AC đồng quy(đpcm).

Nhận xét: Ở lời giải thứ hai và ba đều chú trọng tới giao điểm hai tiếp tuyến của tứ giác điều hoà xong cách tiếp cận cuối khác nhau dẫn tới hai lời giải *lạ mắt*.

Lời giải 4(Nguyễn Lê Phước): Một lời giải ngắn nhất và hay nhất cho bài toán hay này.

Trên AC lấy điểm I sao cho $IK \parallel AO$ thế thì $KI = KC$ do đó $CDIE$ nội tiếp. Gọi BK cắt (O) tại H khác B thì $\angle AHK = 90^\circ$ suy ra $HDKE$ nội tiếp. Mà

$\angle HCI = \angle HBA = \angle HKI$ suy ra $CHKI$ nội tiếp. Áp dụng tính chất trục đẳng phương cho ba đường tròn $(CDIE)$, $(HDKE)$, $(CHKI)$ dĩ nhiên BK, AC, DE đồng quy.