

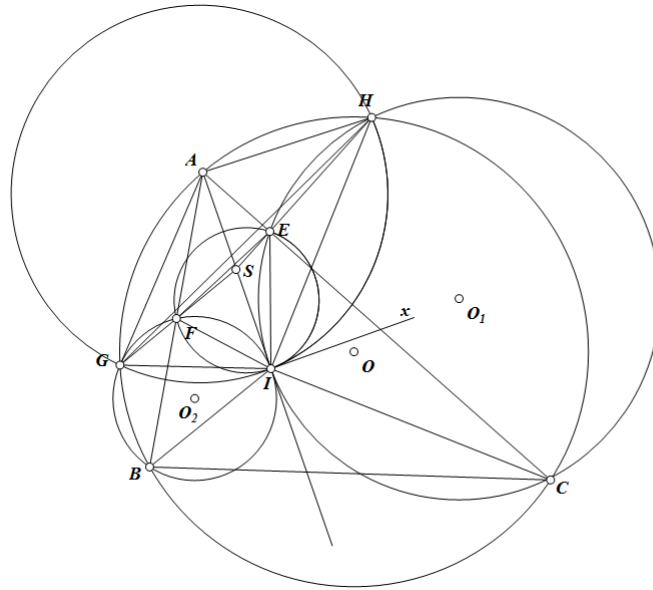
Từ bài hình ngày 1 trong đề Lạng Sơn *TST 2016-2017 tới một lớp bài chứng* *minh tiếp xúc*

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Bài toán 1(Trích đề Lạng Sơn TST 2016-2017): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm nội tiếp tam giác. (O_1) qua C tiếp xúc AI tại I cắt $AC, (O)$ lần lượt tại các điểm E, H .

a) Chứng minh rằng: HE chia đôi AI .

b) (O_2) qua B tiếp xúc AI tại I cắt $AB, (O)$ lần lượt tại các điểm F, G . Chứng minh rằng: (EIF) tiếp xúc (GIH) .

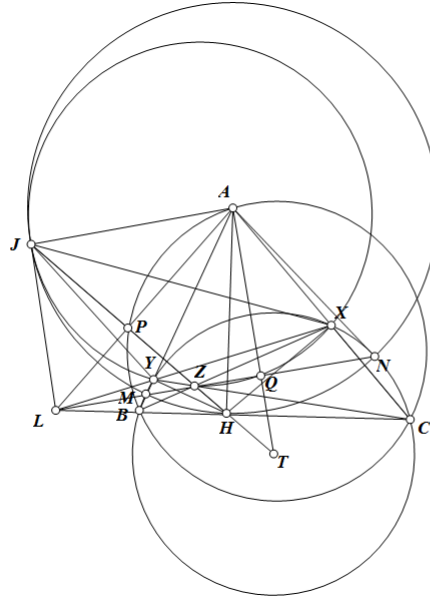


Lời giải(Nguyễn Duy Khương):a) Ta có: $\angle EHI = \angle ECI = \angle AIE$. Lại có: $\angle AEH = 180^\circ - \angle HEC = \angle ACH + \angle IAC = \angle IAH$ do đó nếu gọi S là giao điểm của HE và AI thì dễ thấy $\triangle AES \sim \triangle HAS(g.g)$ và $\triangle SIE \sim \triangle SHI(g.g)$ do đó thu được: $SI^2 = SA^2 = SE.SH$ hay là S là trung điểm AI (đpcm).

b) Hoàn toàn tương tự phần a) chúng ta chứng minh được: GF đi qua trung điểm AI . Vậy là dễ thấy rằng: $SF.SG = SE.SH(= AS^2)$. Do đó $FGHE$ nội tiếp, gọi I_x

là tiếp tuyến (IGH). Ta thấy rằng: $\angle xIE = \angle xIH + \angle HIE = \angle ACH + \angle HGI = \angle IGF + \angle FGA - \angle AGH + \angle ACH = \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Lại có: $\angle EFI = \angle GHE + \angle SIG = \frac{\angle B}{2} + \angle GBA + \frac{\angle A}{2} - \angle AHG = \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Do đó $\angle xIE = \angle EIF$ hay là Ix cũng tiếp xúc (EIF). Vậy (EIF) tiếp xúc (GIH) (đpcm).

Bài toán 2 (Trịnh Huy Vũ): Cho tam giác ABC có đường cao AH . Gọi X, Y lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H xuống AC, AB . Z là giao điểm của BX và CY . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc $(A; AH)$.



Lời giải (Nguyễn Duy Khương): Quay trở lại bài toán: Gọi XY cắt BC tại điểm L . Gọi LA cắt (ABC) tại điểm P . Lấy J đối xứng H qua LA . Ta có: tứ giác $AYHX$ nội tiếp nên $\angle YXH = \angle HAB = \angle YHL$ do đó ta có: $LH^2 = \overline{LX} \cdot \overline{LY} = \overline{LB} \cdot \overline{LC} = \overline{LP} \cdot \overline{LA}$ do đó P thuộc (AH) . Do J đối xứng H qua LA nên theo phép vị tự tỉ số 2 tâm H thì J thuộc $(A; AH)$. Lại có: J đối xứng H qua AL nên $\angle LJA = 90^\circ$ suy ra LJ là tiếp tuyến đến $(A; AH)$.

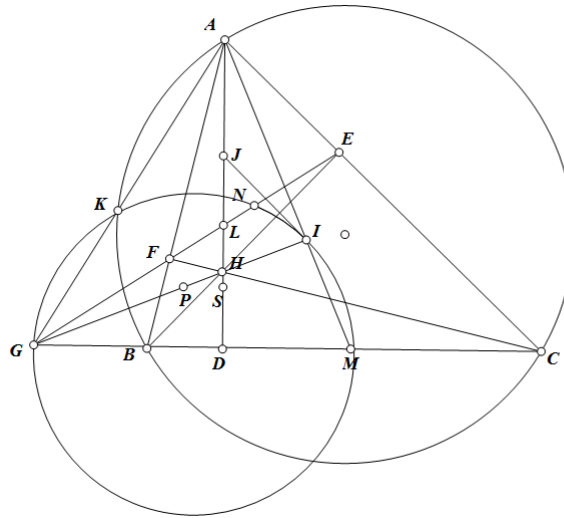
Gọi T là tâm $(BCXY)$ theo định lý Bocard thì Z là trực tâm tam giác ALT . Gọi TZ cắt AL tại điểm P' . Gọi AT cắt LZ tại Q thì $\overline{LP'} \cdot \overline{LA} = \overline{LZ} \cdot \overline{LQ} = \overline{LM} \cdot \overline{LN}$ (hệ thức Maclaurin) $= \overline{LX} \cdot \overline{LY} = \overline{LB} \cdot \overline{LC}$ suy ra P' thuộc (O) do đó P trùng P' . Vậy T, Z, P, H thẳng hàng. Do đó P, J, Z, H thẳng hàng. Ta chỉ cần chứng minh J thuộc (XYZ) khi đó hiển nhiên LJ là tiếp tuyến tới (XYZ) . Tứ giác $LXZY$ nội tiếp khi và chỉ khi $\angle ZJY = \angle ZXY = \angle ZCH$ hay tứ giác $JCHY$ nội tiếp hay Z có cùng

phương tích tới 2 đường tròn $(BCXY)$ và $(A; AH)$. Gọi $(A; AH)$ cắt $(BCXY)$ tại các điểm M, N .

Ta có: $AH^2 = AM^2 = AN^2 = \overline{AX} \cdot \overline{AC} = \overline{AY} \cdot \overline{AB}$ do đó AM, AN lần lượt là tiếp tuyến đến $(BCXY)$. Do đó quen thuộc là ta thấy rằng: BX, CY, MN đồng quy tại 1 điểm chính là Z (Gọi MN cắt YB, CX tại các điểm E, F sử dụng hàng điều hoà cơ bản ta có:

$(AEYB) = (AFXC) = -1$ do đó BX, CY, MN đồng quy). Vậy hiển nhiên: phương tích từ Z tới $(BCXY)$ = phương tích từ Z tới $(A; AH)$ do đó tứ giác $JCHY$ nội tiếp và do đó $JXYZ$ nội tiếp vậy mà dễ thấy LJ là tiếp tuyến tới (XYZ) do đó (XYZ) tiếp xúc $(A; AH)$ tại J (đpcm).

Bài toán 3 (Đề thi trường đông Toán học Miền Nam 2014): Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . EF cắt BC tại điểm G . K là hình chiếu của H lên AG . AH cắt EF tại điểm L . Trung trực LD cắt HG tại điểm P . Gọi N là trung điểm EF . Chứng minh rằng: (KGN) tiếp xúc (DPL) .



Lời giải: Ta dễ thấy K, H, M thẳng hàng (M là trung điểm BC) đồng thời GH vuông góc AM tại điểm I . Gọi S là trung điểm đoạn LD . Chú ý theo hàng điều hoà cơ bản thì $(GD, BC) = -1$ do đó xét phép chiếu xuyên tâm E thì $(AH, LD) = -1$ do đó: $\overline{HL} \cdot \overline{HD} = \overline{SH} \cdot \overline{HA}$ (theo hệ thức Maclaurin) $= \overline{HP} \cdot \overline{HI}$ (do tứ giác APSI nội tiếp đường tròn đường kính AP) vậy L thuộc (PID) . Do N là trung điểm EF nên ta thấy $\angle MNG = \angle GIM = 90^\circ = \angle GKM$ nên ta thấy 5 điểm G, K, N, I, M đồng viên. Đến đây bài toán đơn giản đi nhiều. Gọi J là trung điểm AH .

Ta thấy rằng: $JI^2 = JA^2 = \overline{JL} \cdot \overline{JD}$ (hệ thức Newton cho hàng $(AH, LD) = -1$) nên IJ tiếp xúc (DPL) . Hiển nhiên rằng IJ tiếp xúc với (KGM) hay (KGN) . Vậy IJ là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn này hay ta có đpcm.

Nhận xét: Bài toán trên thể hiện tư duy chứng minh tiếp xúc qua việc tìm ra tiếp điểm rất rõ ràng. Từ đó chứng minh trực tiếp vấn đề bằng các biến đổi xoay quanh nó.

Bài toán 4(Trần Quang Hùng): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . AD là đường kính (O) . E, F là hình chiếu điểm P lên CA, AB . PD cắt trung trực EF tại điểm K . (K) qua E, F cắt CA, AB tại các điểm M, N khác E, F . Chứng minh rằng các đường thẳng EF, MN, BC cắt nhau tạo thành tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc (O) .

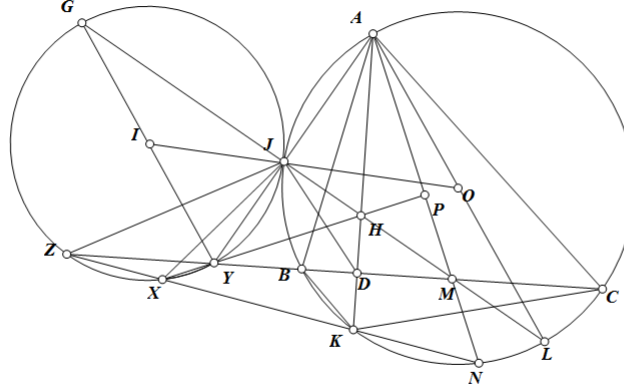
Lời giải(Trương Mạnh Tuấn-11 Toán 1-THPT chuyên KHTN): Đây là lời giải của bạn Tuấn đăng trên mục "*Mỗi tuần một bài toán*" trên blog của thầy **Trần Quang Hùng**.

Trước tiên xin phát biểu một bổ đề(để dành chứng minh cho bạn đọc).

Bổ đề: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có AP là đường kính của (O) . Một đường tròn (K) qua B, C cắt AC, AB tại E, F . Gọi (AEF) cắt (O) tại điểm thứ hai L khác A . Khi đó: L, P, K thẳng hàng.

Quay trở lại bài toán áp dụng bổ đề trên ta thu được $(ABC), (AEF), (AMN)$ đồng quy tại 1 điểm khác A là L . Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của MN với $EF; EF$ với $BC; MN$ với BC . Áp dụng tính chất trục đẳng phương đôi một giao nhau của 3 đường tròn: $(AMN), (AEF), (EFMN)$ ta có: AL, MN, EF đồng quy tại X . Do đó chú ý L là điểm *Miquel* của Y, M, N ứng với (ABC) và của X, M, N với (AEF) nên ta có: $(LX, ZX) \equiv (LM, EM) \equiv (LY, ZY)(mod \pi)$. Vậy tứ giác $LXYZ$ nội tiếp. Gọi d là tiếp tuyến tại L của (O) . Thế thì: $(d, LX) \equiv (d, LA) \equiv (LB, AB) \equiv (LY, XY)(mod \pi)$. Vậy d cũng là tiếp tuyến của (XYZ) . Hay là thu được đpcm.

Bài toán 5(Kiểm tra Titan School 8/2016): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có: H là trực tâm và AM là trung tuyến tam giác ABC . AM cắt lại (O) tại điểm N . Ba đường thẳng: qua H vuông góc AN, BC, KN cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng: (XYZ) tiếp xúc (O) .



Lời giải(Nguyễn Duy Khương):

Gọi tia MH cắt (O) tại điểm J , gọi AD là đường cao của tam giác ABC . Hiển nhiên ta có: AJ, HP, MD là các đường cao của tam giác AHM suy ra AJ, HP, BC đồng quy tại điểm Y . Hay là A, J, Y thẳng hàng.

Ta đi chứng minh rằng J thuộc (XYZ) . Ta có: $HDYJ$ nội tiếp do đó $XYJZ$ nội tiếp khi và chỉ khi:

$(JX, KX) \equiv (AH, JH)(mod\pi)$ hay là tứ giác $JHKK$ nội tiếp.

Lại có: $(JK, XK) \equiv (JA, NA) \equiv (JD, YD) \equiv (JH, YH)(mod\pi)$ vậy ta có: $JHKK$ nội tiếp hay là J thuộc (XYZ) . Vậy tức là J thuộc (XYZ) và (O) . Vì J thuộc (O) và (XYZ) mà A, J, Y thẳng hàng nên khi gọi YG, AL là các đường kính (XYZ) và (O) thì $\overline{GJL} \perp YA$, ta có: $\angle JGY = \angle JXY = \angle JKA = \angle JLA$ do đó $GY \parallel AL$ vậy hiển nhiên $\triangle GJY \sim \triangle AJL$ do I, O lần lượt là trung điểm GY và AL nên $\angle IJY = \angle OJA$ hay là thu được I, J, O thẳng hàng hay (XYZ) tiếp xúc (O) (đpcm).

Nhận xét: Bài toán này không khó và cách làm trên cũng chưa hẳn là ngắn nhất xong tôi rất thích ý tưởng vị tự ở phần cuối. Các bạn hãy thử tìm một vài lời giải khác xem sao.