Tuyển tập các bài toán hình học trong các đề thi vào lớp 10 chuyên(Số 1)

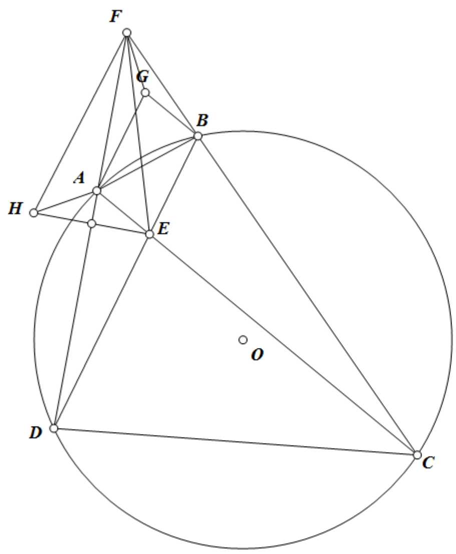
Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Lời nói đầu: Như vậy là cũng đã tới tháng 11 và cũng chẳng lâu nữa lại tới một kì thi vào lớp 10 chuyên rất khắc nghiệt. Để giúp các bạn lớp 9 chuẩn bị, mình viết tuyển tập này nhằm giúp các bạn có định hướng tốt hơn khi đối mặt với những bài toán tương tự cũng như từ đó giúp các bạn có nguồn tư liệu ôn thi. Mỗi tháng mình sẽ đăng lời giải cho 5 bài toán hình học trong các đề thi vào lớp 10 chuyên đồng thời cũng sẽ đề nghị 5 bài toán cho tháng sau như các bài toán để các bạn luyện tập. Mong các bạn tiếp tục ủng hộ mình trong những thời gian sắp tới.

Bài toán 1(Trích đề tuyển sinh vào 10 chuyên THPT TPHCM 2016-2017): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $AC \cap BD = E$. Giả sử tia AD cắt tia BC tại F. Dựng hình bình hành $AEBG$.

a) Chứng minh rằng: $FD.FG = FB.FE$.

b) Gọi H là điểm đối xứng của E qua AD. Chứng minh rằng 4 điểm F, H, A, G đồng viên.

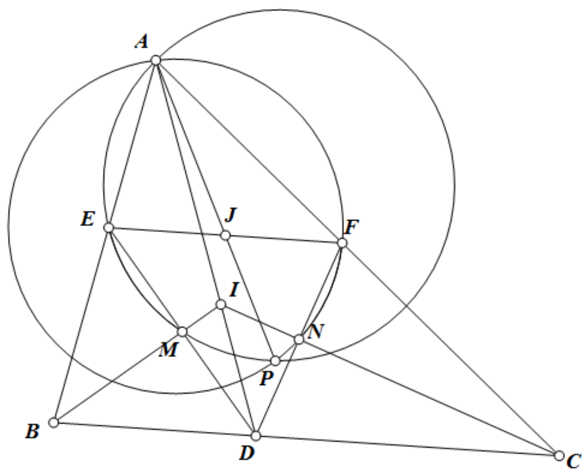


Lời giải: a) Ta thấy rằng: $\angle GBF = \angle FBA - \angle GBA = \angle ADC - \angle BDC = \angle ADE$. Lại để ý rằng: $\dfrac{FB}{GB} = \dfrac{FB}{AE}$. Ta cần chứng minh: $\dfrac{FB}{AE} = \dfrac{FD}{DE} \Leftrightarrow \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{DE}{AE}$. Mà lại thấy $\triangle EAB \sim \triangle EDC(g.g)$ và $\triangle FAB \sim \triangle FCD(g.g)$ nên hiên nhiên $\dfrac{DE}{AE} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{FB}{FD}$. Vậy từ đó thu được $\triangle GBF \sim \triangle EDF(c.g.c)$ từ đây dễ thấy đpcm.

b) Tương tự câu a) ta chứng minh được: $\triangle FGA \sim \triangle FEC(c.g.c)$ do đó $\angle FGA = \angle FEC = 180° - \angle FEA = 180° - \angle AHF \Rightarrow \angle FGA + \angle AHF = 180°$ do đó A, G, H, F đồng viên(đpcm).

Nhận xét: Bài toán rất nhẹ nhàng với các biến đổi góc hết sức tinh tế. Có lẽ xu hướng ra đề thi vào 10 đối với các bài toàn hình học nên là như thế này thì sẽ rất có lợi cho các kì thi cấp cao hơn như **VMO, IMO**.

Bài toán 2(trích đề thi Vòng 1 chuyên KHTN 2015-2016): Cho tam giác ABC nhọn không cân có tâm đường tròn nội tiếp I. AI cắt BC tại D. Lấy E, F lần lượt đối xứng D qua IB và IC. M, N, J lần lượt là trung điểm DE, DF, EF. (AEM) cắt (AFN) tại P khác A. Chứng minh rằng A, J, P thẳng hàng.



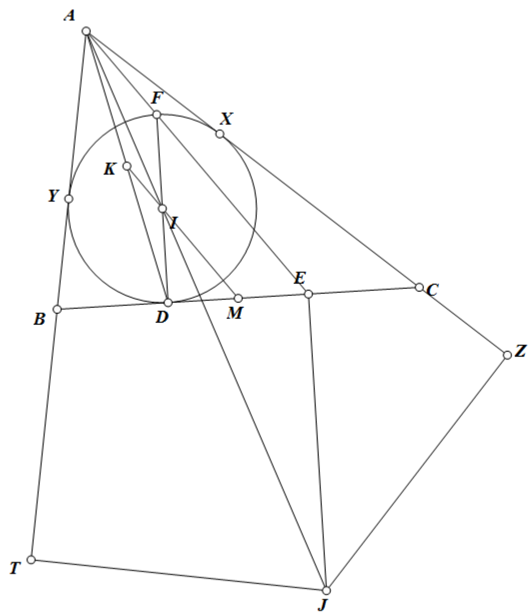
Lời giải: Hiển nhiên rằng E và F lần lượt thuộc AB và AC. Ta có: $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CF}$ do đó $EF \| BC$ (theo định lí $Thales$ đảo). Bây giờ ta sẽ chứng minh $MPNJ$ là 1 tứ giác nội tiếp. Thật vậy ta có: MJ, MN, JN lần lượt là các đường trung bình của tam giác DEF do đó ta có:$\angle MJN = \angle EDF$ mà $\angle MPA + \angle EAP = 180°$ đồng thời: $\angle NPA + \angle AFN = 180°$ hay là $\angle MPN = 360° - (\angle AED + \angle AFD) = \angle DEF + \angle DFE = 180° - \angle EDF$(chú ý rằng: $EF \| BC$ nên ED, FD lần lượt là phân giác các góc FEB và EFC) do đó dễ thấy $\angle MJN + \angle MPN = 180°$ hay là M, N, P, J đồng viên. Vậy ta có: $\angle MPJ = \angle MNJ = \angle DEF = \angle EDB = 180° - \angle AED = \angle MPA$ hay là A, J, P thẳng hàng(đpcm).

Nhận xét: Cả bài toán là một chuỗi biến đổi góc liên tục từ đầu đến cuối. Điểm khó là nếu ta không tìm ra điểm mấu chốt là ở đoạn chứng minh $MPNJ$ nội tiếp thì rất khó đến với đpcm.

Bài toán 3(Trích đề thi vào chuyên Toán ĐHSP TPHCM 2012-2013): Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC ở điểm D. Đường tròn bàng tiếp góc A tiếp xúc BC ở E.

a) Gọi $AE \cap DE = F$. Chứng minh rằng: $F \in (I)$.

b) Gọi M là trung điểm đoạn BC. Chứng minh rằng: MI chia đôi AD.



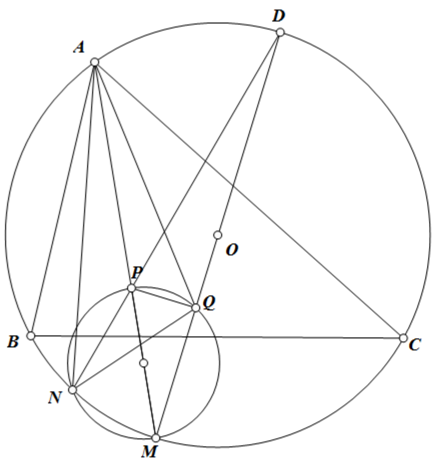
Lời giải: a) Gọi $DI \cap (I) = D, F'$. Ta chứng minh rằng: A, F', E thẳng hàng. Gọi X, Y là tiếp điểm của (I) với AC, AB, (J) tiếp xúc AC, AB lần lượt tại Z, T. Thế thì áp dụng định lí $Thles$ thì: $\dfrac{IY}{JT} = \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{IF'}{JE}$ do đó thu được: $\triangle AIF' \sim \triangle AJE(c.g.c)$ do đó A, F', E thẳng hàng. Do đó $F \equiv F'$ hay là thu được đpcm.

b) Trước tiên ta dễ nhận ra kết quả khá quen thuộc là $BD = EC$ do đó M cũng là trung điểm của DE. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Thế thì dễ dàng nhận thấy K, I, M là trung điểm của AD, FD, DE nên chúng cùng nằm trên đường trung bình tam giác ADE (lưu ý việc chứng minh A, F, E thẳng hàng ở trên)(đpcm).

Bài toán 4(Tuyển sinh vào chuyên KHTN, vòng 1 năm 2012-2013): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là 1 điểm thuộc cung nhỏ BC($M \neq B, C$,AM không là đường kính của (O)). Giả sử P là 1 điểm thuộc đoạn AM sao cho (MP) cắt $\widehat{BC}$ nhỏ tại điểm $N \neq M$.

1) Gọi D đối xứng M qua O. Chứng minh rằng: N, P, D thẳng hàng.

2) $(MP) \cap MD = M, Q$. Chứng minh rằng: P là tâm nội tiếp tam giác AQN.



Lời giải: Lời giải: 1) Câu này khá là đơn giản. Ta có: $\angle MNP = \angle MND = 90^\circ$ do đó N, P, D thẳng hàng(!!!).

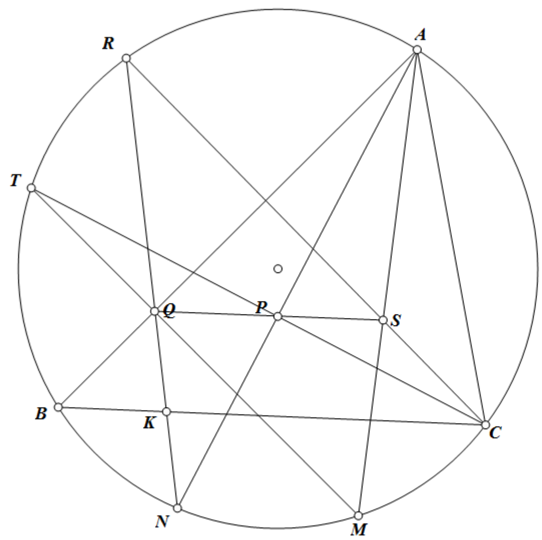
2) Ta có: $\angle ANP = \angle AMD = \angle PNQ$ (chú ý việc P, N, D thẳng hàng) do đó NP

là phân giác góc $\angle ANQ$. Ta có: $\angle APQ = 90^\circ + \angle AMD \Rightarrow \angle APQ + \angle ADQ = 90^\circ + \angle AMD + \angle ADQ = 180^\circ$ do đó tứ giác $ADQP$ nội tiếp do đó $\angle PAQ = \angle MDN = \angle PAQ$ do đó hiển nhiên AP là phân giác góc NAQ do đó P là tâm nội tiếp tam giác ANQ(đpcm).

Bài toán 5(Trích đề thi Vòng 2 chuyên KHTN năm 2012-2013): Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp (O). Giả sử các điểm M, N lần lượt thuộc cung nhỏ BC của (O) sao cho $MN \| BC$ sao cho tia AN nằm giữa 2 tia AM, AB. Gọi P là hình chiếu của C lên AN và Q là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

a) Chứng minh rằng: CP cắt QM trên (O).

b) Gọi $NQ \cap (O) = R, N$. Giả sử $AM \cap PQ = S$. Chứng minh rằng: A, R, Q, S đồng viên.



Lời giải: a) Ta gọi $CP \cap QM = T$ thế thì: $\angle TPA = \angle TQA = 90^\circ$ do đó $TQPA$ nội tiếp thế nên $\angle PTQ = \angle PAB = \angle CAM$(chú ý việc $MN \| BC$ nên $\widehat{BN} = \widehat{CM}$) do đó $TACM$ cũng nội tiếp do đó $T \in (O)$(đpcm).

b) Trước khi giải xin nêu ra một bổ đề như một bài tập cho bạn đọc: "Cho 6 điểm A, B, C, A', B', C' lần lượt nằm trên (O). Gọi giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB', BA'), (AC', CA'), (BC', CB')$ là P, Q, R. Vậy thì P, Q, R thẳng hàng(đường thẳng $Pascal$)."

Quay trở lại bài toán, từ câu a) ta có: $\angle PQA = \angle CTA = \angle ABC$ do đó $PQ \| BC \| MN$ áp dụng bổ đề trên cho 6 điểm là R, A, T, M, N, C thì P, Q, S thẳng hàng do đó $QS \| MN$. Gọi $RQ \cap BC = K$, thế thì: $\angle RQS = \angle RKC = \dfrac{\widehat{RC} + \widehat{BN}}{2} = \angle RBC + \angle CAM = 180^\circ - \angle RAC + \angle CAM = 180^\circ - (\angle RAC - \angle CAM) = 180^\circ - \angle SAR$ do đó $\angle RQS + \angle RAS = 180^\circ$ do đó R, A, Q, S đồng viên(đpcm).

Nhận xét: Bài toán này rất thú vị bởi nếu bạn nào quen sẽ thấy cấu hình này còn xuất hiện trong đề thi **VMO 2016** ngày 2, các biến đổi góc trong bài toán thực sự rất tinh tế và tận dụng triệt để giả thiết $MN \| BC$.

Các bài toán đề nghị tháng sau

Bài toán 6(Trích đề thi vào chuyên ĐHSP năm 2011-2012,ngày 2): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). BE, CF lần lượt là các đường cao của tam giác. Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau ở S. $BC \cap OS = M$.

1) Chứng minh rằng: $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$.

2) Chứng minh rằng: $\triangle AEM \sim \triangle ABS$.

3) Gọi N là giao điểm của AM và EF,$P = AS \cap BC$. Chứng minh rằng: $NP \perp BC$.

Bài toán 7(Thi tuyển sinh vào chuyên Toán THPT chuyên Bà Rịa Vũng Tàu,2012-2013): Cho tam giác ABC và điểm O cố định nằm trong tam giác và không thuộc các cạnh của tam giác. M là 1 điểm di động trên tia $OA(M \neq O, A)$ sao cho $(ABM) \cap OB = N, B$ và $(ACM) \cap OC = P, C$.

1) Chứng minh rằng: $\dfrac{ON}{OP}$ không đổi.

2) Gọi I, J lần lượt là tâm $(ABC), (MNP)$. Chứng minh rằng: O, I, J thẳng hàng.

Bài toán 8(Đề thi tuyển sinh vào chuyên Toán THPT chuyên Phan Bội Châu,2012-2013): Cho đường tròn tâm O có đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D sao cho: $\angle DAB > 60^\circ$. Trên đường kính AB lấy điểm $C(C \neq A, B)$ và kẻ $CH \perp AD = H$. Phân giác trong góc $\angle DAB$ cắt (O) tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt (O) tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh rằng: N, C, E thẳng hàng.

b) Cho $AD = BC$, chứng minh rằng: DN chia đôi AC.

Bài toán 9(Đề thi vào chuyên Toán THPT chuyên Vĩnh Phúc,2013-2014): Cho tam giác ABC nhọn($AB < AC$). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C. Gọi $P = BC \cap EF$. Đường thẳng qua $D \| EF$ cắt AB, AC, CF lần lượt tại Q, R, S. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BQCR$ nội tiếp.

b) D là trung điểm QS.

c) (PQR) chia đôi BC.

Bài toán 10(Trích đề vòng 2 THPT chuyên KHTN, 2012-2013): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi P là 1 điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC(P \neq H, C, B)$ và nằm trong tam giác ABC. Gọi $PB \cap (O) = M, B$. $PC \cap (O) = C, N$. $BM \cap AC = E$,$CN \cap AB = F$. $(AME) \cap (ANF) = A, Q$.

1) Chứng minh rằng: M, N, Q thẳng hàng.

2) Giả sử AP là phân giác góc MAN. Chứng minh rằng: PQ chia đôi BC.