Các chuyên đề hình học dành cho các bạn THCS(Số 3)

Nguyễn Duy Khương-khoá 1518 chuyên Toán-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Đôi điều về chuyên mục: Ở chuyên mục mới mở này tôi sẽ trình bày các chuyên đề liên quan tới hình học phẳng qua các kì thi vào lớp 10, thi chọn HSG TP lớp 9. Mỗi tháng tôi sẽ viết một chuyên đề như vậy. Mong các bạn ủng hộ, đặc biệt là các bạn lớp 9 sắp chuẩn bị bước vào kì thi chuyên cam go. Do giới hạn kiến thức cho học sinh lớp 9 rất khó tránh việc các lời giải có lúc sẽ khá là dài(do phải xét nhiều trường hợp hình vẽ khác nhau) mong các bạn, thầy cô thông cảm.

Chuyên đề số 3:

Hệ thức lượng trong đường tròn và hàng điểm điều hoà dưới góc nhìn kiến thức THCS

I) Một số hệ thức lượng trong đường tròn:

Ở lớp 9 trong chương tứ giác nội tiếp có xuất hiện một số bài tập liên quan tới tứ giác nội tiếp và các hệ thức trong lượng trong đường tròn. Sau đây tôi sẽ nêu lại chúng và bổ sung thêm một số hệ thức khác về hàng điểm điều hoà cần thiết và quan trọng.

1) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi giao điểm của AD, BC là điểm M. Thế thì $MA.MD = MB.MX = OM^2 - R^2$. Giả M nằm ngoài (O) nếu ta kẻ các tiếp tuyến MS, MT đến (O)(S,T lần lượt là các tiếp điểm) thì $MS^2 = MT^2 = MA.MD = MB.MC$.

2) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi $AC \cap BD = N$. Thế thì $NA.ND = NB.NC = R^2 - ON^2$(đây là trường hợp N nằm trong tứ giác $ABCD$).

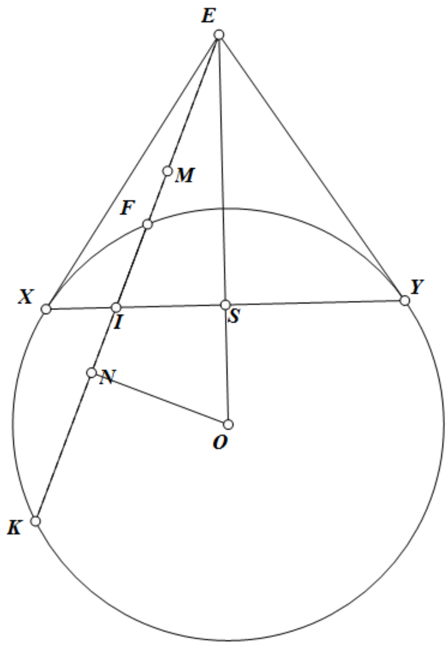
3) Từ 1 điểm E ngoài đường tròn kẻ cát tuyến EFK đến (O). Kẻ các tiếp tuyến

EX, EY đến (O). Gọi $XY \cap EF = I$. Chứng minh các hệ thức sau:

+) $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{FE}{EK}$

+) Gọi M là trung điểm IE. Khi đó: $ME^2 = MI^2 = MF.MK$(Hệ thức $Newton$).

+) Gọi N là trung điểm FK. Chứng minh rằng: $EI.EN = EF.EK$(Hệ thức $Maclaurin$). Cũng cần chú ý hệ thức sau cũng gọi là hệ thức $Maclaurin$: $IE.IN = IF.IK$.



Chứng minh: Các hệ thức ở 1) 2) đều khá cơ bản do đó ở đây tôi sẽ nêu chứng minh các hệ thức ở 3).

Lưu ý là nếu có 1 trong ba hệ thức ở 3)(không nhất thiết là có các giả thiết về tứ giác nội tiếp) thì ta sẽ có hai hệ thức còn lại. Ta đi chứng minh các hệ thức trên là tương đương nhau. Giả sử ta có hệ thức $Maclaurin$, thế thì: $ME^2 = MF.MK \Leftrightarrow ME^2 = (EF - ME)(EK - ME) \Leftrightarrow ME^2 = EF.EK + ME^2 - ME(EF + EK) \Leftrightarrow EF.EK = \dfrac{EI}{2}(EF + EK) = 2EN.\dfrac{EI}{2} = EN.EI$(đúng). Do đó nếu có hệ thức $Maclaurin$ thì ta có hệ thức $Newton$. Ta quay lại hệ thức thứ nhất, giả sử nếu ta cũng có sẵn hệ thức $Maclaurin$ thế thì: $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{FE}{EK} \Leftrightarrow IK.EF = EK.IF \Leftrightarrow (EK - EI)EF = (IK + EI)IF \Leftrightarrow EI.EN - EI.EF = EI.IF + IK.IF \Leftrightarrow EI(EN - EF - IF) = IK.IF \Leftrightarrow IE.IN = IF.IK$(đúng theo hệ thức $Maclaurin$). Như vậy là cả ba hệ thức trên tương đương nhau miễn là mình có sẵn một hệ thức đúng. Hệ bốn điểm thoả mãn hệ thức thứ nhất người ta thường gọi là **hàng điểm điều hoà**. Do vấn đề về độ dài đại số chưa được trình bày tường minh ở cấp THCS do đó tôi chỉ nêu cách chứng minh trên phụ thuộc hình vẽ, mong bạn đọc thông cảm.

Bây giờ ta quay lại bài toán chứng minh ở hệ thức số 3, ta có được cả ba điều bởi: Gọi S là trung điểm XY. Hiển nhiên do N là trung điểm FK thế thì tứ giác $NISO$ nội tiếp áp dụng hệ thức 1) thì ta có: $EI.EN = ES.EO = EX^2 = EF.EK$ tức là có được hệ thức $Maclaurin$ luôn đúng do đó hiển nhiên như đã chứng minh ở trên nếu có 1 trong 3 hệ thức đúng thì đương nhiên hệ thức còn lại cũng đúng.

Nhận xét: Các hệ thức trên đều có chiều ngược lại tức là cũng đồng thời là các cách chứng minh các điểm đồng viên, cách chứng minh tiếp tuyến đường tròn,...

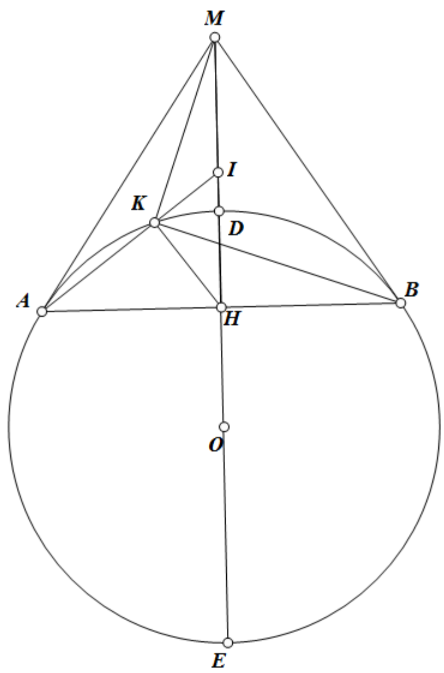
Bây giờ để các bạn hiểu rõ hơn ý nghĩa của các hệ thức lượng trong đường tròn tôi sẽ giới thiệu một số bài toán luyện tập. Việc có được nền tảng các hệ thức lượng trong đường tròn rất quan trọng không chỉ đối với các học sinh cấp 2 mà còn cả với các học sinh cấp 3 khi bắt đầu tiếp xúc với các khái niệm mới. Chính vì lẽ đó mà càng ngày thì các hệ thức lượng trong đường tròn càng được các trường lấy làm nội dung thi vào chuyên, cũng như xuất hiện nhiều trong các kì thi HSG lớp 9.

II) Các bài toán ứng dụng:

Bài toán 1(Tuyển sinh vào chuyên Toán các THPT chuyên TPHCM): Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O) với các tiếp điểm A, B. Gọi H là giao của AB và OM, I là trung điểm MH. $AI \cap (O) = K, A$.

a) Chứng minh rằng: $HK \perp AI$.

b) Chứng minh rằng: $\angle MKB = 90°$.



Lời giải: a) Gọi $MO \cap (O) = D, E$(như trên hình vẽ). Áp dụng hệ thức $Newton$ thì: $IH^2 = IM^2 = ID.IE = IK.IA$ hiển nhiên là $\angle IHA = 90°$, do đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông đảo thì: $HK \perp AI$(đpcm).

b) Từ a) suy ra: $\angle KHI = \angle KAB = \angle MBK$(do MB tiếp xúc (O)). Vậy là tứ giác $MKHB$ nội tiếp do đó $\angle MKB = 90°$(đpcm).

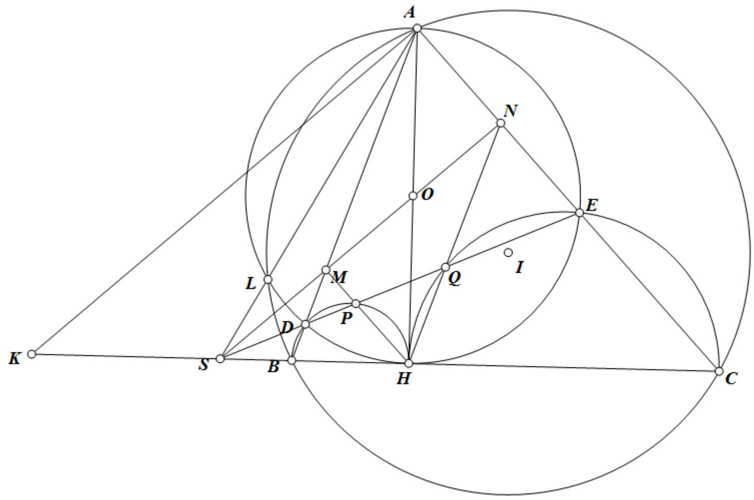
Nhận xét: Có thể thấy việc sử dụng các hệ thức trong 3) đã giúp làm ngắn gọn đi lời giải rất nhiều xong tôi rất lưu ý các bạn là cần phải chứng minh lại các hệ thức này lúc bước vào phòng thi.

Bài toán 2(Thi vào lớp chuyên Toán chuyên ĐHSP 2016-2017): Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Kẻ đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC tương ứng tại điểm D, E. Đường thẳng DE cắt BC tại điểm S.

a) Chứng minh rằng: $BDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $SB.SC = SH^2$.

c) Đường thẳng SO cắt AB, AC tại M, N tương ứng, đường thẳng DE cắt HM, HN lần lượt tại các điểm P, Q tương ứng. Chứng minh rằng: BP, CQ, AH đồng quy.



Lời giải: a) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta thấy rằng theo hệ thức lượng cho các tam giác vuông AHB và AHC thế thì: $AD.AB = AE.AC (= AH^2)$. Do đó thu được: B, D, E, C đồng viên.

b) Ta để ý thấy: $\angle SHD = \angle HED$(do SH tiếp xúc (O)) vậy $SH^2 = SE.SD = SB.SC$ vậy ta có: $SH^2 = SB.SC$.

c) Gọi K là điểm đối xứng H qua S. Ta có: $SO \| AK$ do đó $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{BS}{SK} = \dfrac{BS}{SH}$, lại có: $SB.SC = SH^2$ nên $SB.HC = SH(SH - SB) = SH.BH$ do đó $\dfrac{SB}{SH} = \dfrac{BH}{HC}$ do đó $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{HB}{HC}$ do đó $MH \| AC$. Điều đó dẫn tới $BDHP$ nội tiếp hay là $BP \perp MH$ suy ra $BP \perp AC$. Hoàn toàn tương tự $CQ \perp AB$. Vậy ta có: BP, CQ, AH lần lượt là các đường cao của tam giác ABC nên chúng đồng quy tại 1 điểm(đpcm).

Bài toán 3: Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. Giả sử $EF \cap BC = S$. Chứng minh rằng: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{SB}{SC}$.

Lời giải(Bạn đọc tự vẽ hình): Áp dụng định lí *Ceva* cho AD, BE, CF đồng quy thì: $\dfrac{DB}{DC} . \dfrac{EA}{EC} . \dfrac{FB}{FA} = 1$. Áp dụng định lí *Menelaus* cho cát tuyến S, E, F của tam giác ABC thì: $\dfrac{SC}{SB} . \dfrac{EA}{EC} . \dfrac{FB}{FA} = 1$. Chia vế cho vế dĩ nhiên ta được đpcm.

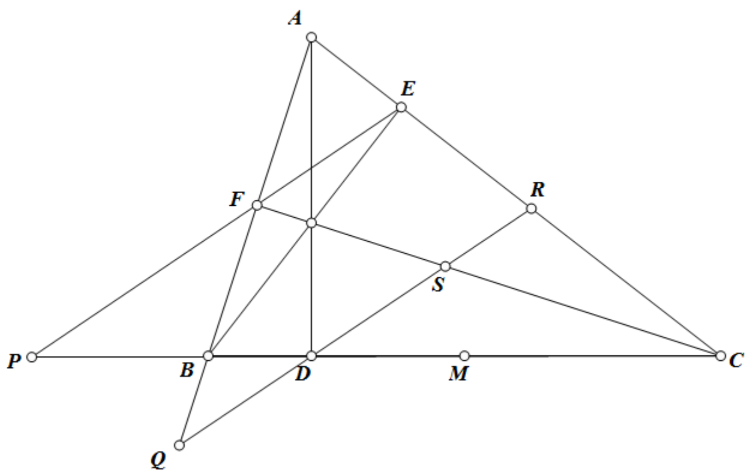
Nhận xét: Bài toán trên cực kì quan trọng và là một gạch nối lớn để ta có được cách làm các bài toán khác.

Bài toán 4(Tuyển sinh vào chuyên Toán chuyên Vĩnh Phúc 2013-2014): Cho tam giác ABC nhọn($AB < AC$). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C. Gọi $P = BC \cap EF$. Đường thẳng qua $D \| EF$ cắt AB, AC, CF lần lượt tại Q, R, S. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BQCR$ nội tiếp.

b) D là trung điểm QS.

c) (PQR) chia đôi BC.



Lời giải: a) Ta có: $\angle CFB = \angle BEC = 90°$ do đó tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Vậy là $\angle QBC = \angle FEC = \angle QRC$ do đó $BQCR$ nội tiếp.

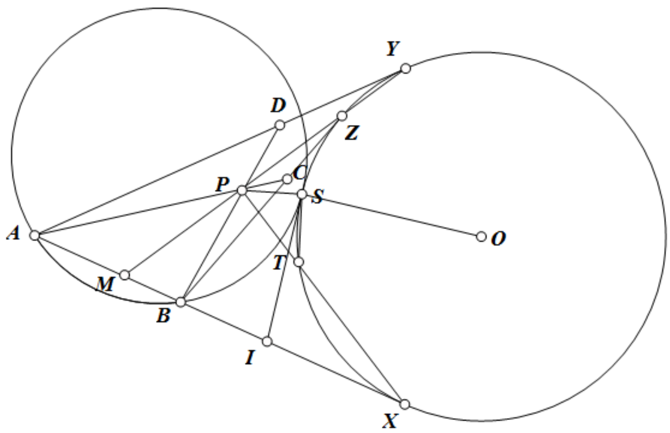
b) Theo định lí *Thales* thì: $\dfrac{DQ}{PF} = \dfrac{DB}{BP}$ và $\dfrac{SD}{PF} = \dfrac{DC}{CP}$ do đó đpcm tương đương với: $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{DB}{DC}$(đúng theo bài toán 3).

c) Gọi M là trung điểm BC. Do tứ giác $BQCR$ nội tiếp nên $DB.DC = DQ.DR$. Áp dụng hệ thức $Maclaurin$ cho hàng điểm điều hoà $DPBC$(đã chứng minh ở bài toán 3) thì hiển nhiên là $DP.DM = DB.DC = DQ.DR$ do đó ta thu được đpcm.

Nhận xét: Cả hai ý b) c) của bài toán này đều có thể mở rộng lên cho ba đường đồng quy chứ không nhất thiết cứ phải là đường cao.

Bài toán 5(China TST 2012): Cho tứ giác bàng tiếp $ABCD$ đường tròn (O) và nội tiếp đường tròn (J). CD tiếp xúc đường tròn (O) tại điểm T. Hai đường chéo gặp nhau ở P. Dựng 1 đường tròn qua A, B và tiếp xúc (O) tại điểm S.

Chứng minh rằng: $\angle PST = 90°$.



Lời giải: Gọi X, Y, Z, T lần lượt là các tiếp điểm của $ABCD$ và (O) như hình vẽ. Ta gọi tiếp tuyến từ S của (O) cắt AB tại điểm I, YZ cắt AB tại điểm M. Do tứ giác $ABCD$ bàng tiếp nên có hàng điểm điều hoà $ABMX$(bạn đọc thử chứng minh như một bài tập) mà ta lại có: $IS^2 = IX^2 = IB.IA$ nên theo hệ thức $Newton$ thì I là trung điểm của MX. Do đó thu được $MPSX$ nội tiếp đường tròn tâm I. Đến đây ta thực hiện biến đổi góc bình thường ,có: $\angle PST = \angle PSX - \angle TSX = \angle AMP - \angle PXM = 90°$(đpcm).

Nhận xét: Ở đây ta thường không biết cách dựng 2 giả thiết tiếp xúc đặc biệt đó là tứ giác bàng tiếp đồng thời nội tiếp. Sau đây là cách dựng:

+) Ta biết tính chất về việc các đường nối tiếp điểm tương ứng của tứ giác bàng tiếp và nội tiếp vuông góc với nhau do đó ta sẽ dựng đường tròn tiếp xúc trước(bàng tiếp tứ giác). Dựng 1 đường tròn (I) và 2 dây cung XY, ZT vuông góc phân biệt.

+) Sau đó vẽ các tiếp tuyến tại X, Y, Z, T của (I) giao nhau tại 4 điểm thoả mãn tính chất.

Cuối cùng để các bạn luyện tập xin đề nghị một số bài tập:

Bài toán 6(Đề dự bị chuyên Trần Phú-Hải Phòng 2016-2017) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AA_1, BB_1 là các đường cao của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB. CM cắt $(CA_1B_1), (O)$ lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng: $MP = MQ$.

Bài toán 7(trích VMO 2016-ngày 1): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và M là trung điểm của BC. $(AM = 2R)$ cắt AB và AC lần lượt tại E và F khác A. Tiếp tuyến tại E và F của (AEF) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng: $TB = TC$.

Bài toán 8(Trần Quang Hùng-T12/466-THTT): Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Lấy P là 1 điểm thuộc tam giác ABC sao cho AP vuông góc BC. Kẻ PE, PF lần lượt vuông góc AB, AC(E, F thuộc AB và AC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại (O) tại G. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy tại 1 điểm.

Mình lưu ý là có rất nhiều các hệ thức lượng trong đường tròn quan trọng khác(đặc biệt là định lí *Ptolemey*). Xong để rõ ràng và chi tiết mình sẽ đề cập tới chúng trong các chuyên đề sau.