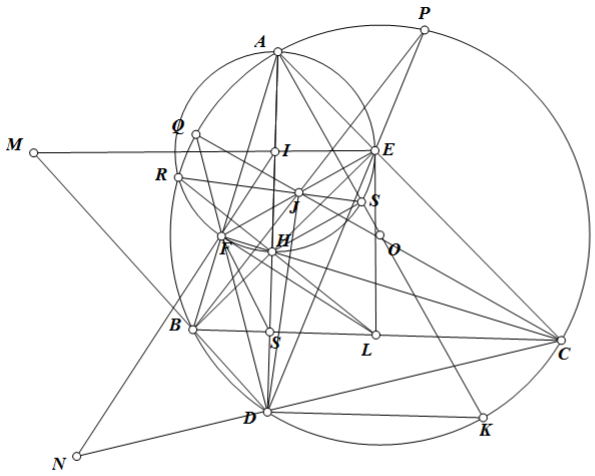
Lời giải cho bài toán hình học trong đề VMO 2017-ngày 1

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Bài toán(VMO 2017-ngày 1): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) không cân. Gọi các đường cao BE, CF cắt nhau ở H. $AH \cap (O) = A, D$.

a) Gọi I là trung điểm AH. Gọi $EI \cap BD = M, FI \cap CD = N$. Chứng minh rằng: $MN \perp OH$.

b) Gọi (AEF) cắt $(O), AO$ lần lượt tại các điểm $R, S \neq A$. DE, DF ắt lại (O) tại các điểm thứ hai P, Q. Chứng minh rằng: BP, CQ, RS đồng quy.



Lời giải: a) Ta thấy: I là trung điểm của AH nên $\angle IEH = \angle IHE = \angle AFE = \angle ACB = \angle HDB$(chú ý $AFHE, BFEC$ là các tứ giác nội tiếp) suy ra $IEDB$ nội tiếp. Chứng minh tương tự thì $IFDC$ nội tiếp. Ta để ý rằng: I, F, E cùng nằm trên đường tròn *Euler* của tam giác ABC nên M, N nằm trên trục đẳng phương của (O) và đường tròn *Euler* do đó chú ý tâm đường tròn *Euler* là trung điểm OH nên $OH \perp MN$(đpcm).

b) Trước tiên ta để ý rằng: BP, CQ, EF đồng quy theo định lí *Pascal* cho lục giác nội tiếp $RAPCDB$, ta chứng minh giao điểm BP, CQ, EF là trung điểm EF. Gọi S là chân đường cao hạ từ A lên BC. Ta dễ thấy rằng: S là trung điểm HD. Ta để ý thấy $\triangle FEB \sim \triangle HES(g.g)$. Gọi J là trung điểm EF thì: $\dfrac{EF}{HE} = \dfrac{BF}{HS}$ suy ra: $\dfrac{FJ}{HE} = \dfrac{BF}{HD}$ suy ra $\triangle JFB \sim \triangle DHE(c.g.c)$ vậy $\angle ABJ = \angle HDE = \angle ABP$ nên B, J, P thẳng hàng. Do đó BP, CQ, EF đồng quy tại trung điểm EF. Ta để ý rằng: AS, AH đẳng giác trong góc $\angle BAC$ nên $FHSE$ là 1 hình thang cân. Ta có kết quả quen thuộc là R, H, L thẳng hàng(L là trung điểm BC) do đó chú ý rằng: LF, LE là các tiếp tuyến đến (AEF) nên $RFHE$ là 1 tứ giác điều hoà nên $S(RH, FE) = -1$ mà $SH \| EF$ nên theo tính chất hàng điểm điều hoà thì: RS chia đôi EF. Vậy RS, BP, CQ đồng quy.

Nhận xét: Trên đây là lời giải của tôi, nếu các bạn để ý thì sẽ thấy rằng phần b) bài toán là sự ghép lại của một ba bài toán nhỏ. Trong đó việc BP, CQ cắt nhau tại trung điểm EF đã được đề cập trong tạp chí *Epsilon* số tháng **6/2015** bởi tác giả **Trần Quang Hùng**.