

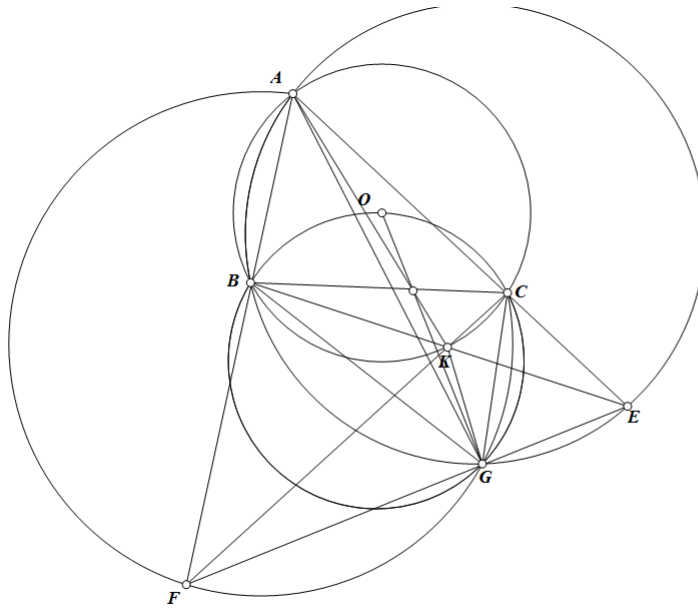
Lời giải bài hình học VMO 2017-ngày 2

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Bài toán(VMO 2017-ngày 2): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Lấy G là 1 điểm nằm trên cung BC không chứa O . Gọi $(ABG) \cap AC = A, E$, $(ACG) \cap AB = A, F$. Gọi $BE \cap CF = K$.

a) Chứng minh rằng: AG, OG, BC đồng quy.

b) D là 1 điểm cung BOC chứa O của (BOC) . $GB \cap CD = M, GC \cap BD = N$. Giả sử $MN \cap (O) = P, Q$. Chứng minh rằng: (GPQ) luôn đi qua 2 điểm cố định.

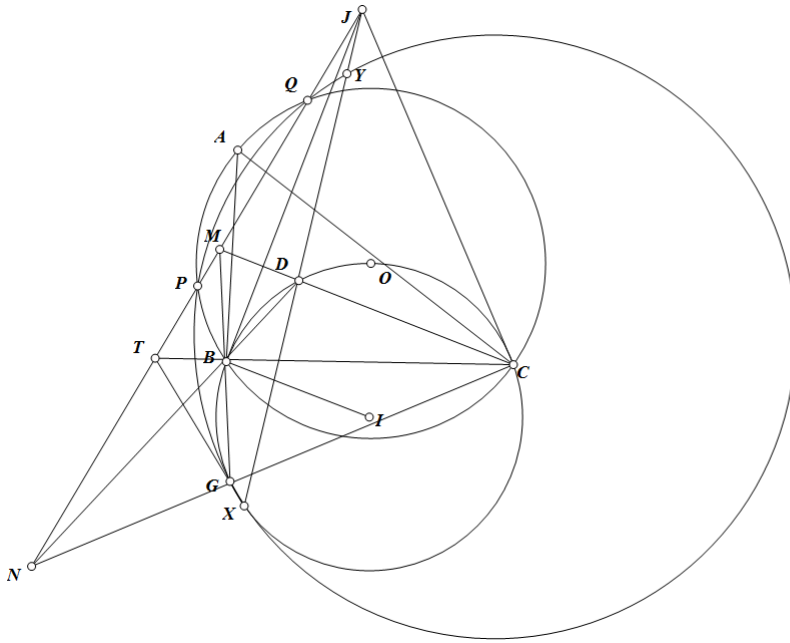


Lời giải: a) Trước khi giải ta chứng minh bổ đề sau: "Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) không phải là một hình thang. Gọi AB cắt CD tại E . AD cắt BC tại điểm F . Gọi L là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Khi đó $OL \perp EF$."

Chứng minh: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Ta có: $\angle LAD = 180^\circ - \angle LAF = 180^\circ - \angle LBF = \angle LBC$. Vậy ta có: $\triangle LAM \sim \triangle LBN(c.g.c)$ do đó $\angle LMF = \angle LNF$ hay là L thuộc (FMN) . Vậy ta thu được: $\angle OLF = 90^\circ$.

Quay trở lại bài toán ,ta có: $\angle EGF = \angle FGC + \angle BGE - \angle BGC = 180^\circ - \angle A +$

$180^\circ - \angle A - (180^\circ - \angle BOC) = 360^\circ - 2\angle A - 180^\circ + 2\angle A = 180^\circ$. Do đó E, G, F thẳng hàng. Thế thì: $\angle KCA = \angle AGF, \angle KBA = \angle AGE$ do đó $\angle KCA + \angle KBA = 180^\circ$ nên $K \in (ABC)$ do đó áp dụng bổ đề thì do G là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $ABCK.EF$ nên $OG \perp EF$. Gọi S là giao điểm của BC và AK thì $OS \perp EF$ (định lí *Borcard*). Do đó G, S, O thẳng hàng nên AK, OG, BC đồng quy (đpcm).



b) (Lời giải của thầy Trần Quang Hùng-THPT chuyên KHTN): Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác (BOC) . Áp dụng định lí *Pascal* cho bộ điểm suy biến B, C, D, C, B, G ta thấy MN đi qua giao tiếp tuyến tại B, C cố định của (I) là điểm J . Gọi $MN \cap BC = T$ thì theo hàng điểm điều hoà cơ bản thì $G(BC, DT) = -1$. Gọi $JD \cap (I) = D, X$ thì X cố định và do tứ giác $BDCX$ điều hoà nên $G(BC, DX) = -1$ nên GX đi qua T . Do đó $TX.TG = TB.TC = TP.TQ$ do đó (GPQ) đi qua X cố định. Gọi $(GPQ) \cap DX = Y$ ta thấy: $JX.JY = JP.JQ = P_{J/(O)} = \text{const}$ do đó Y cũng cố định. Vậy ta thấy (GPQ) đi qua 2 điểm cố định là X, Y (đpcm).

Nhận xét: Đây là bài toán có tính phân loại cao nhất của đề VMO năm 2017 và là bài khó nhất (được đặt ở vị trí số 7). Câu a) khá hay với nhiều hướng tiếp cận, lời giải giải trên của tôi chỉ là 1 cách tiếp cận còn có những cách khác như phương tích, trục đẳng phương, hàng điểm điều hoà... Câu b) khá độc lập và khá khó trong việc tìm ra được các điểm X, Y nếu chỉ kẻ vẽ hình bằng tay. Các tính chất của hàng điểm điều hoà, tứ giác điều hoà đã được sử dụng trong cách giải cả hai bài hình học năm nay.