CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ VỀ MŨ VÀ LOGARIT

Ngày 4 tháng 12 năm 2013

Mục lục

Chương 1

CÔNG THỨC MŨ VÀ LOGARIT CẦN NHỚ

1.1 Công thức mũ và lũy thừa

Với a và b là các số thực dương, x và y là những số thực tùy ý thì

1. $a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n}$	6. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
2. $a^{x+y} = a^x.a^y$	7. $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$
3. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	8. $[u(x)]^0 = 1 \Rightarrow x^0 = 1, \begin{cases} \forall u(x) \\ x \neq 0 \end{cases}$
4. $a^{x.y} = (a^x)^y = (a^y)^x$	9. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
5. $a^x.b^x = (a.b)^x$	10. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

1.2 Công thức logarit

1.$\log_a b = x \Rightarrow b = a^x$	6. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
2. $\lg b = \log b = \log_{10} b$ (logarit thập phân)	7. $\log_a b^\alpha = \begin{cases} \alpha \log_a b \text{ khi } \alpha = 2\text{k}+1 \\ \alpha \log_a \lvert b \rvert \text{ khi } \alpha = 2\text{k} \end{cases}$
3. $\ln b = \log_e b, (e = 2,718...)$ (logarit tự nhiên hay logarit neper)	8. $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$
4. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$	9. $b = \log_a a^b$
5. $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$	10. $b = a^{\log_a b}$

CÔNG THỨC ĐỔI CƠ SỐ

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, \log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$	$\log_{ab} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}}$

1.3 Hàm số mũ – logarit và đạo hàm

1. **Hàm số mũ:** $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$

   - Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

   - Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$

   - Tính đơn điệu:

   + Khi $a > 1$: hàm số đồng biến

   +Khi $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến

   - Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang

2. **Hàm số logarit** $y = \log_a x$

   - Tập xác định: $T = (0; +\infty)$

   - Tập giá trị: $D = \mathbb{R}$

   - Tính đơn điệu:

   + Khi $a > 1$: hàm số đồng biến

   + Khi $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến

   - Nhận trục tung làm tiệm cận đứng

3. **Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit**

Đạo hàm hàm số sơ cấp	Đạo hàm hàm số hợp
1. $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}, (x > 0)$	$\Rightarrow (u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$
2. $(a^x)' = a^x.\ln a$	$\Rightarrow (a^u)' = a^u.u' \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$	$\Rightarrow (e^u)' = e^u.u'$
4. $(\log_a \lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\Rightarrow (\log_a \lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, (x > 0)$	$\Rightarrow (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

2.1 Giải bằng cách đưa về cùng cơ số hoặc logarit hóa

2.1.1 Lý thuyết

1. **Phương trình mũ:**

   Dùng các công thức mũ và lũy thừa đưa về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

   Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

   Trường hợp cơ số a có chứa ẩn thì: $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ M = N \end{array} \right.$.

2. **Bất phương trình mũ:**

   Dùng các công thức mũ và lũy thừa đưa về dạng $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

   Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

   Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

   Trường hợp cơ số a có chứa ẩn thì: $a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$.

   Logarit hóa: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

   Lưu ý: Khi giải phương trình và bất phương trình cần đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Sau khi giải xong cần so sánh nghiệm (tập nghiệm) với điều kiện để nhận nghiệm (tập nghiệm) thích hợp.

2.1.2 Các ví dụ

1. Giải phương trình: $x^{\log x} = 10^{2\log^2 x - 3\log x + 2}$

   Giải.

   $x^{\log_x} = 10^{2\log^2 x - 3\log x + 2}$

   Điều kiện: $x > 0$.

   Phương trình đã cho tương đương với:

   $\Leftrightarrow \log x^{\log x} = 2\log^2 x - 3\log x + 2$

   $\Leftrightarrow \log^2 x = 2\log^2 x - 3\log x + 2$

   $\Leftrightarrow \log^2 x - 3\log x + 2 = 0$

   $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10 \\ \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100 \end{array}\right.$

2. Giải bất phương trình: $4x^2 + 3^{\sqrt{x}}x + 3^{1+\sqrt{x}} \leqslant 2x^2.3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

   Đề thi thử Đại học năm 2013 khối B,D - THPT Sầm Sơn - Thanh Hóa

   Giải.

   $4x^2 + 3^{\sqrt{x}}x + 3^{1+\sqrt{x}} \leqslant 2x^2.3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

   Điều kiện: $x \geqslant 0$

   Bất phương trình đã cho tương đương với:

$\Leftrightarrow 2x^2.3^{\sqrt{x}} + 2x + 6 - 4x^2 - 3^{\sqrt{x}}.x - 3^{1+\sqrt{x}} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -2(2x^2 - x - 3) + 3^{\sqrt{x}}(2x^2 - x - 3) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 - x - 3).(3^{\sqrt{x}} - 2) \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - x - 3 < 0 \\ 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - x - 3 \geqslant 0 \\ 3^{\sqrt{x}} - 2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < \dfrac{3}{2} \\ 3^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \log_3 2 \Leftrightarrow x < \log_3^2 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1 \\ x \geqslant \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ 3^{\sqrt{x}} \geqslant 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant \log_3 2 \Leftrightarrow x \geqslant \log_3^2 2 \end{cases} \end{array}\right.$$ Kết hợp đk: $x \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < \log_3^2 2 \\ x \geqslant \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $x \in \left[0; \log_3^2 2\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

2.2 Giải bằng cách đặt ẩn phụ

1. Giải bất phương trình: $\sqrt{9 + 8.3^{\sqrt{4-x}} - 9^{\sqrt{4-x}}} + 3^{\sqrt{4-x}} > 5 \quad (x \in \mathbb{R})$

Đề thi thử Đại học 2012 – THPT chuyên Ngoại Ngữ - Đại học sư phạm Hà Nội

Giải.

$\sqrt{9 + 8.3^{\sqrt{4-x}} - 9^{\sqrt{4-x}}} + 3^{\sqrt{4-x}} > 5$

Điều kiện: $x \leqslant 4$

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$\Leftrightarrow \sqrt{9 + 8.3^{\sqrt{4-x}} - (3^{\sqrt{4-x}})^2} + 3^{\sqrt{4-x}} > 5 \quad (*)$

Đặt $t = 3^{\sqrt{4-x}}, (t > 0)$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{9 + 8t - t^2} + t > 5$

$\Leftrightarrow 9+8t-t^2 > (5-t)^2$

$\Leftrightarrow 9+8t-t^2 > t^2-10t+25$

$\Leftrightarrow 2t^2-18t+16 < 0$

$\Leftrightarrow 1 < t < 8$

$\Leftrightarrow \sqrt{9+8t-t^2} > 5-t$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5-t \geqslant 0 \\ \sqrt{9+8t-t^2} > (5-t)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5-t < 0 \\ \sqrt{9+8t-t^2} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \leqslant 5 \\ 2t^2-18t+16 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 8 \end{cases} \Rightarrow 1 < t \leqslant 5 \\ \begin{cases} t > 5 \\ 9+8t-t^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant t \leqslant 9 \end{cases} \Rightarrow 5 < t \leqslant 9 \end{array}\right.$$

Vậy $1 < t \leqslant 9$

$\Leftrightarrow 1 < 3^{\sqrt{4-x}} \leqslant 9$

$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{4-x} \leqslant 2$

$\Leftrightarrow 0 < 4-x \leqslant 4$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant x < 4$

Vậy $x \in [0;4)$

2. Giải phương trình: $\quad 2.27^x + 18^x = 4.12^x + 3.8^x$

Đề thi thử Đại học năm 2010 lần 1 khối A – THPT Phan Châu Trinh – Đà Nẵng

Giải.

Phương trình đã cho tương đương với:

$2.27^x + 18^x = 4.12^x + 3.8^x$

$\Leftrightarrow 2.3^{3x} + 2^x.3^{2x} - 4.3^x.2^{2x} - 3.2^{3x} = 0 \qquad (*)$

Chia 2 vế cho 2^{3x}

$(*) \Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} - 4.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} - 3 = 0 \qquad (**)$

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$ $(t > 0)$

$(**) \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 4t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2}(n) \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1 \\ t = -1(l) \end{array}\right.$$

Vậy $x = 1$ là đáp số.

2.3 Giải bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số

1. Giải phương trình: $e^{x^2+1} - e^{2x^2+x-1} = x^2 + x - 2$

   Giải.

   $e^{x^2+1} - e^{2x^2+x-1} = x^2 + x - 2 \qquad (1)$

   Đặt: $\begin{cases} u = 2x^2 + x - 1 \\ v = x^2 + 1 \end{cases}$

   Ta có:

   $(1) \Leftrightarrow e^v - e^u = u - v$

   $\Leftrightarrow e^v + v = e^u + u \quad (*)$

   Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$

   $f'(t) = e^t + 1 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$

   Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

   $(*) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

   $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = x^2 + 1$

   $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

3.1 Giải phương trình logarit bằng cách đưa về cùng cơ số

1. Giải phương trình: $\frac{1}{3}\log_2(3x-4)^6.\log_2 x^3 = 8\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2 + \left[\log_2(3x-4)^2\right]^2$

   Giải.

   ĐKXĐ: $\begin{cases}(3x-4)^6>0\\(3x-4)^2>0\\x^3>0\\\sqrt{x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-4\neq 0\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{4}{3}\\x>0\end{cases}.$

   Phương trình đã cho tương đương:

   $\frac{6}{3}\log_2|3x-4|.3\log_2 x = 8\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \left[2\log_2|3x-4|\right]^2$

   $\Leftrightarrow 6\log_2|3x-4|.\log_2 x = 2\left(\log_2 x\right)^2 + 4\left(\log_2|3x-4|\right)^2$

   $\Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2 - 3\log_2|3x-4|.\log_2 x + 2\left(\log_2|3x-4|\right)^2 = 0 \quad (1)$

   Đặt $\begin{cases}a=\log_2 x\\b=\log_2|3x-4|\end{cases}$, pt (1) trở thành: $a^2-3ab+2b^2=0, \quad (2)$

   Vì $b=0$ không là nghiệm của pt (2), chia hai vế của pt (2) cho b^2 , ta được:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-3\left(\frac{a}{b}\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=1\\ \dfrac{a}{b}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=\log_2|3x-4|\\ \log_2 x=2.\log_2|3x-4|=\log_2(3x-4)^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=|3x-4|\\ x=(3x-4)^2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=3x-4\\ x=-(3x-4)\\ 9x^2-25x+16=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=\dfrac{16}{9}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt:$x=1$, $x=2$ và $x=\dfrac{16}{9}$.

2. Giải phương trình: $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=\log_{20} x$

   Giải.

   ĐKXĐ: $x>0$.

   Pt đã cho tương đương:

   $$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{\log_2 20}$$

   $$\Leftrightarrow \log_2 x.\left(1+\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 4}-\frac{1}{\log_2 20}\right)=0$$

   $$\Leftrightarrow \log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1.$$

   Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

   Nhận xét: Trong cách giải trên, ta đã sử dụng công thức biến đổi cơ số: $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ để làm xuất hiện nhân tử chung là $\log_2 x$.

3. Giải phương trình: $\log_2 x+\log_3 x+\log_5 x=\log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$

   Giải.

   ĐKXĐ: $x>0$.

   Phương trình đã cho tương đương:

   $$\log_2 x+\log_3 2.\log_2 x+\log_5 2.\log_2 x-\log_2 x.\log_3 x.\log_5 x=0$$

   $$\Leftrightarrow \log_2 x.(1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 x.\log_5 x)=0$$

   $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1.\\ 1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 x.\log_5 x=0 \quad (*)\end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow 1+\log_3 2+\log_5 2-(\log_3 5.\log_5 x).\log_5 x=0$

$\Leftrightarrow 1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 x=0$

$\Leftrightarrow \log_5^2 x=\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}$

$\Leftrightarrow \log_5 x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}$

$\Leftrightarrow x=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}$.

So với ĐK, vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=1$ và $x=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}$. Nhận xét: Trong bài giải trên ta đã sử dụng công thức: $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$, cụ thể để đưa về $\log_2 x$ nhằm xuất hiện nhân tử chung.

4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}}(x+1)+\dfrac{1}{503}\log_{81}(x-3)^{2012}=5\log_{243}[4(x-2)]$

Đề thi thử Đại Học năm 2013 – THPT Lương Ngọc Quyến – Thái Nguyên

Giải.

ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x-3\neq 0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\neq 3 \end{cases}$.

Pt đã cho tương đương:

$\dfrac{1}{3}\log_{3^{\frac{1}{3}}}(x+1)+\dfrac{1}{503}\log_{3^4}(x-3)^{2012}=5\log_{3^5}[4(x-2)]$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_3|x-3|=\log_3[4(x-2)]$

$\Leftrightarrow (x+1)|x-3|=4(x-2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+1)(x-3)=4x-8 \\ x-3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x-3)=8-4x \\ x-3<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \\ x>3 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1+2\sqrt{3} \\ x=-1-2\sqrt{3} \end{array}\right. \\ x<3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1\pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

So với ĐK, vậy pt đã cho có hai nghiệm: $x=5$ và $x=-1+2\sqrt{3}$.

5. Giải phương trình: $(x-1)\log_5 3+\log_5\left(3^{x+1}+3\right)=\log_5(11.3^x-9)$

Đại học Sư phạm Vinh khối D, G, M năm 2000

Giải.

ĐKXĐ: $\begin{cases} 3^{x+1}+3>0 \\ 11.3^x-9>0 \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$\log_5 3^{x-1}+\log_5\left(3^{x+1}+3\right)=\log_5\left(11.3^x-9\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[3^{x-1}.\left(3^{x+1}+3\right)\right]=\log_5\left(11.3^x-9\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(3^{2x}+3^x\right)=\log_5\left(11.3^x-9\right)$

$\Leftrightarrow 3^{2x}+3^x=11.3^x-9$

$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-10.3^x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

So với ĐK, phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=0$ và $x=2$.

6. Giải phương trình:

$(x-1)\log_5 3+\log_5\left(3^{x+1}+3\right)=\log_5\left(11.3^x-9\right)$

Học viện Quan Hệ Quốc Tế khối D năm 2000

Giải.

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-x+1>0 \\ x^4+x^2+1>0 \\ x^4-x^2+1>0 \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$\log_2\left[\left(x^2+1\right)+x\right]\left[\left(x^2+1\right)-x\right]=\log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[\left(x^2+1\right)^2-x^2\right]=\log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^4+x^2+1\right)=\log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^4-x^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x^4-x^2+1=1$

$\Leftrightarrow x^4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=0,\ x=1$ và $x=-1$.

3.2 Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ

3.3 Giải bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Chương 4

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

Ta phải căn cứ vào đặc điểm của hệ phương trình để phân tích và tìm ra lời giải. Một số ý tưởng để giải hệ là:
- Phương pháp thế, phương pháp cộng (biến đổi tương đương).
- Phương pháp đặt ẩn phụ.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
- Sử dụng bất đẳng thức.

4.1 Giải hệ mũ và logarit bằng phương pháp biến đổi tương đương

4.1.1 Lý thuyết cơ bản

Sử dụng các công thức mũ và logarit để biến đổi hệ đã cho thành những hệ cơ bản. Sau đó, dùng phương pháp thế, phương pháp cộng,... để giải.

4.1.2 Các ví dụ

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y & (1) \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y & (2) \end{cases}$

(Đại học khối D năm 2002)

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 5y^2 - 4y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > \dfrac{4}{5}$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 + 2.2^x}{2^x + 2} = y$$
$$\Leftrightarrow \frac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} = y$$
$$\Leftrightarrow 2^x = y.$$

Từ đó suy ra:

$$(1) \Leftrightarrow (2^x)^3 = 5y^2 - 4y$$
$$\Leftrightarrow y^3 = 5y^2 - 4y$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \quad (L) \\ y = 1 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Với $y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $y = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = \{(0; 1), (2; 4)\}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases} \quad (*)$

Giải.

ĐK: $\begin{cases} y > x \\ y > 0 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ -\log_4(y - x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \log_4 \dfrac{y - x}{y} = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \dfrac{y - x}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{14x}{3} \\ x^2 + \dfrac{16x^2}{9} = 25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \quad (L) \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\left(x^2+y^2\right) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 81 \end{cases}$ $(*)\,,(x;y \in \mathbb{R})\,.$

Đại học khối A năm 2009

Giải.

ĐK: $xy > 0$.

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \log_2\left(x^2+y^2\right) = \log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 3^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ (x-y)^2 + xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

So với điều kiện, nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \{(-2;-2)\,,(2;2)\}$

4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0 \end{cases}$ $(*)$

Đại học khối B năm 2013

Giải.

ĐK: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > -1 \end{cases}.$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ \log_3(x-1) = \log_3(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ x - 1 = y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \quad (L) \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$.

4.2 Giải hệ mũ và logarit bằng phương pháp đặt ẩn số phụ

4.2.1 Lý thuyết cơ bản

Thông thường ta lựa chọn một phương trình của hệ để biến đổi và đặt ẩn phụ để tìm ra mối liên hệ giữa x, y và kết hợp với phương trình còn lại đối với bài toán đặt một ẩn phụ.

Đối với bài toán đặt hai ẩn phụ, ta tìm mối liên hệ bằng cách dùng công thức mũ, logarit hay sự biến đổi đơn giản để đưa về hệ đại số cơ bản (đối xứng, đẳng cấp,...).

Sau khi đặt ẩn phụ, ta cần đi tìm điều kiện cho ẩn phụ, tức là đi tìm miền xác định cho bài toán mới. Tùy vào mục đích của ẩn phụ mà ta phải đi tìm điều kiện cho hợp lý (dễ, ít gây sai sót). Có hai cách tìm điều kiện: tìm điều kiện đúng và tìm điều kiện thừa nhưng đặc biệt đối với bài toán chứa tham số, ta cần tìm điều kiện cho thật chính xác.

4.2.2 Các ví dụ

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x + \log_2 y + 2^x . \log_2 y = 5 \\ 4^x + \log_2^2 y = 5 \end{cases} \qquad (*)$

   Giải.

   ĐK: $y > 0$.

Đặt $\begin{cases} u = 2^x > 0 \\ v = \log_2 y \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u + v + uv = 5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(u+v\right) + 2u.v = 10 & (3) \\ \left(u+v\right)^2 - 2u.v = 5 & (4) \end{cases}$$

Cộng (3) và (4) vế theo vế:

$\left(u+v\right)^2 + 2\left(u+v\right) - 15 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u.v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u + v = -5 \\ u.v = 10 \end{cases}$ (vô nghiệm).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ \log_2 y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^x = 2 \\ \log_2 y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

So với điều kiện, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \{(2; 4), (4; 2)\}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{2x+y+2} + 3^{x+2y} = 27^{x+y} + 9 \\ \log_3(x+1) + \log_3(y+1) = 1 \end{cases} \quad (*)$

Giải.

ĐK: $\begin{cases} x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3.3^{2x+y+1} + 3.3^{x+2y-1} = 3^{3(x+y)} + 9 \\ \log_3(x+1)(y+1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3.3^{2x+y+1} + 3.3^{x+2y-1} = 3^{3x+3y} + 9 & (1) \\ (x+1)(y+1) = 3 & (2) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = 3^{2x+y+1} > 0 \\ b = 3^{x+2y-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow a.b = 3^{3x+3y}$

$(1) \Leftrightarrow 3a + 3b = ab + 9$

$$\Leftrightarrow (a-3)(3-b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 3 \end{array}\right.$$

Với $a = 3 \Rightarrow 3^{2x+y+1} = 3 \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = -2x$ .Thế vào (2) được

$(x+1)(-2x+1)=3$ (PTVN)

Với $b=3 \Rightarrow 3^{x+2y-1}=3 \Leftrightarrow x+2y-1=1 \Leftrightarrow x=2-2y$. Thế vào (2) được

$(3-2y)(y+1)=3 \Leftrightarrow -2y^2+y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$.

So với điều kiện, nghiệm của hệ là $(x;y)=\left\{(2;0), \left(1;\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

4.3 Giải hệ mũ và logarit bằng phương pháp đơn điệu hàm số và bất đẳng thức

4.3.1 Cơ sở lý thuyết

Xem lại lý thuyết giải phương trình và bất phương trình mũ – logarit sử dụng tính đơn điệu và bất đẳng thức.

Thông thường, ta chọn một phương trình để thực hiện tính chất đơn điệu của hàm số, rồi kết hợp với phương trình còn lại để tìm nghiệm. Để giải phương trình còn lại, ta cần nắm vững các phương pháp giải phương trình mũ, logarit và thường gặp nhất là phương trình đại số.

4.3.2 Các ví dụ

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x-2^y=(y-x)(xy+2) & (1) \\ x^2+y^2=2 & (2) \end{cases}$

   Giải.

   Thay (2) vào (1) ta được:

   $(1) \Leftrightarrow 2^x-2^y=(y-x)\left(xy+x^2+y^2\right)$

   $\Leftrightarrow 2^x-2^y=y^3-x^3$

   $\Leftrightarrow 2^x+x^3=2^y+y^3 \qquad (*)$

   Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$.

   $f'(t)=2^t.\ln 2+2t^2>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

   Từ $(*) \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$. Thế vào (2) được: $2x^2=2 \Leftrightarrow x=y=\pm 1$

   Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(\pm 1;\pm 1)$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_7(2x+3y)=\log_3(2+2x+3y) & (1) \\ \ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+21=9y & (2) \end{cases}$

   Giải.

ĐK: $2x+3y>0$.

Đặt $\log_7(2x+3y)=t \Leftrightarrow 2x+3y=7^t$.

$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(2+7^t\right)=2t$

$\Leftrightarrow 2+7^t=9^t$

$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{7}{9}\right)^t=1 \qquad (3)$

Xét hàm số $f(t)=2.\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{7}{9}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=2.\left(\frac{1}{9}\right)^t.\ln\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{9}\right)^t.\ln\frac{7}{9}<0, \forall t\in\mathbb{R}. \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, phương trình (3) có nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R}$ và $f(t)=f(1)=1 \Leftrightarrow t=1$.

Thế vào (2) được:

$\ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+21=3(7-2x)$

$\Leftrightarrow \ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+6x=0 \qquad (4)$

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+6x$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\frac{8x+1}{4x^2+x+1}+3x^2+6=3x^2+\frac{24x^2+14x+7}{4x^2+x+1}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ (4) có nghiệm duy nhất và

$f(x)=f(0)\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{7}{3}$.

So với điều kiện, nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(0;\frac{7}{3}\right)$.

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y}+e^{x+y}=2(x+1) \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases}, (x,y\in\mathbb{R}) \quad (*)$

Giải.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}=x+y+1 \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^v=u+1 \\ e^u=v+1 \end{cases}$,với $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^v-e^u=u-v$

$\Leftrightarrow e^v+v=e^u+u$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=e^t+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow x+y=x-y \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=0$.

4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (*)$

Dự bị Đại học khối A năm 2007

Giải.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 1} = 3^{y-1} \\ (y-1) + \sqrt{(y-1)^2 + 1} = 3^{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v \quad (1) \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u \quad (2) \end{cases} \text{với} \begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế:

$$u - v + \sqrt{u^2 + 1} - \sqrt{v^2 + 1} = 3^v - 3^u$$

$$\Leftrightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} + 3^u = v + \sqrt{v^2 + 1} + 3^v$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t . \ln 3 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t . \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Thay $u = v$ vào (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 3^u = u + \sqrt{u^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow u = \log_3 \left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow u - \log_3 \left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right) = 0.$$

Xét hàm số $f(u) = u - \log_3 \left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right)$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(u) = 1 - \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}}{\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right) . \ln 3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1} . \ln 3} > 0, \forall u \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có: $f(x) = f(0) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = x - 1 = 0 \\ v = y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1; 1)$.