

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP NHÓM ABEL¹ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Đỗ Trọng Đạt - Vũ Thanh Tú - Vũ Đình Việt - Trần Trung Kiên

I. Lời nói đầu

Trong quá trình làm toán, chúng ta đã từng tiếp cận với rất nhiều các đẳng thức. Tuy nhiên, khi đứng trước mỗi một đẳng thức đó có bao giờ bạn tự hỏi liệu nó còn có ứng dụng gì không, liệu có thể áp dụng nó vào chứng minh bất đẳng thức? Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn công thức khai triển *Abel*.

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số thực tùy ý. Đặt $c_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k \quad \forall k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n$. Khi đó:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (x_1 - x_2) c_1 + (x_2 - x_3) c_2 + \dots + (x_{n-1} - x_n) c_{n-1} + x_n c_n$$

Cách phát biểu và chứng minh hết sức đơn giản. Tuy nhiên, đằng sau vẻ bề ngoài đơn giản đó là một phương pháp khá hiệu quả trong chứng minh bất đẳng thức. Đặc biệt là các bài toán có điều kiện nhiều và phức tạp.

II. Bài toán mở đầu

Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a \geq b \geq 1, a \leq 3, ab \leq 6, ab \leq 6c$. Chứng minh rằng:

$$a + b - c \leq 4$$

Lời giải: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng:

$$a + b + 1 \leq 3 + 2 + c$$

Ta có đẳng thức sau:

$$3 + 2 + c = (a - b) \cdot \frac{3}{a} + \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} \right) (b - 1) + \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c \right)$$

Nhưng mặt khác theo giả thiết và bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(a - b) \cdot \frac{3}{a} + \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} \right) (b - 1) + \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c \right) \geq (a - b) \frac{3}{a} + 2(b - 1) \sqrt{\frac{6}{ab}} + 3 \sqrt[3]{\frac{6c}{ab}} \geq a - b + 2(b - 1) + 3 = a + b + 1$$

Vậy

$$3 + 2 + c \geq a + b + 1$$

Và ta có điều phải chứng minh. □

Chắc chắn ngay khi đọc lời giải cho bài toán “đơn giản” này bạn có phần lúng túng và không hiểu tại sao lại có thể tách được một cách “hợp lý” như vậy. Phải chăng là dự đoán một cách “vô

¹Niels Henrik Abel (1802-1829) là một nhà toán học người Na Uy.

hướng” hoặc cũng có người sẽ nghĩ bài toán trên được tạo ra từ chính bất đẳng thức phụ đó. Câu trả lời là hoàn toàn không phải. Tất cả đều đi theo 1 qui luật của nó. Ở các phần tiếp theo chúng tôi sẽ phân tích rõ hơn giúp bạn đọc có thể khái quát một phần nào đó về phương pháp này.

- Khai triển *Abel* tổng quát: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số thực tùy ý.

Đặt $c_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k \quad \forall k \in R, 1 \leq k \leq n$. Khi đó:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (x_1 - x_2) c_1 + (x_2 - x_3) c_2 + \dots + (x_{n-1} - x_n) c_{n-1} + x_n c_n$$

Và 2 đẳng thức thường dùng là:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 - a_2) b_1 + a_2 (b_1 + b_2)$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) (b_1 + b_2) + a_3 (b_1 + b_2 + b_3)$$

- Chúng ta sẽ cùng nhau đến với 1 số ví dụ điển hình:

III. Các bài toán

Ví dụ 1.

Cho $0 < \beta \leq y \leq x, \alpha > 0$ và $xy \geq \alpha \cdot \beta$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Đối với những bài toán sử dụng khai triển *Abel*, chúng ta hãy đi từ vế lớn hơn hoặc bằng trước, sau đó phân tích để có xuất hiện nhân tử của vế nhỏ hơn hoặc bằng:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{\beta}$$

Nếu tinh ý, chắc hẳn các bạn cũng thấy được ẩn ý của khi phân tích như vậy. Nếu muốn chứng minh $A + B \geq X + Y$ thì cách tách hợp lý nhất để dùng khai triển *Abel* chính là:

$$A + B = X \cdot b_1 + Y \cdot b_2$$

Sao cho khi dấu bằng xảy ra thì $b_1 = b_2 = 1$. Bây giờ áp dụng khai triển *Abel* ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{\beta} \cdot \frac{1}{y} &= \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \frac{y}{\beta} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \right) \\ &\geq \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot 2 \sqrt{\frac{xy}{\alpha \cdot \beta}} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot 2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu bằng xảy ra tại $x = \alpha, y = \beta$ $\square$

Ví dụ 2.

Cho $0 < \beta \leq y \leq x, \alpha > 0$ và $\alpha \cdot y + \beta \cdot x \geq 2\alpha \cdot \beta$. Chứng minh

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

Lời giải:

Cũng tương tự bài trên. Ta xuất phát bằng phân tích:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{x^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Sau đó sử dụng khai triển *Abel* ta có:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \frac{y^2}{\beta^2} + \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \right) \frac{1}{x^2}$$

Nhưng mặt khác lại có $\alpha \cdot y + \beta \cdot x \geq 2\alpha \cdot \beta$ hay $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \geq 2$ nên

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + 1 + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 \geq 2 \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \right) \geq 4 \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 2$$

Vậy nên:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $x = \alpha, y = \beta$ $\square$

Ví dụ 3.

Cho các số thực dương x, y, z thỏa:
$$\begin{cases} 1 \leq z \leq \min\{x; y\} \\ x + z\sqrt{3} \geq 2\sqrt{3} \\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \geq 2\sqrt{10} \end{cases}$$
 . Tìm giá trị lớn nhất của:

$$D = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{z^2}$$

Lời giải:

Bám sát vào *Ví dụ 2* Ta sẽ giải bài toán như sau:

$$D = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

Ta sẽ chuyển về 2 bài toán phụ :

$$\text{I) } \begin{cases} x \geq z \geq 1 \\ x + z\sqrt{3} \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Tìm } \text{Max} P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\text{II) } \begin{cases} y \geq z \geq 1 \\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \geq 2\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{Tìm } \text{Max} Q = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

I): Dự đoán Max đạt được khi $z = 1$ và $x = \sqrt{3}$ Ta sẽ đi CM : $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \leq \frac{1}{3} + 1$ Áp dụng theo *ví dụ 2*

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{z^2}{1} \cdot \frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2} \right) \frac{z^2}{1} + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} \right) \frac{1}{x^2}$$

Lại có :

$$x + \sqrt{3}z \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} + z \geq 2$$

$$\Rightarrow (1+1)\left(\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1}\right) \geq \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + z\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} \geq 2$$

Và $z \geq 1$. Vậy :

$$\frac{1}{3} + 1 = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2}\right) \frac{z^2}{1} + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1}\right) \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = Q$$

II) Dự đoán Max khi $z = 1$ và $y = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \leq \frac{3}{10} + 1$ Áp dụng theo ví dụ 2

$$\frac{3}{10} + 1 = \frac{3y^2}{10} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{z^2}{1} \cdot \frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) \frac{z^2}{1} + \left(\frac{3y^2}{10} + \frac{z^2}{1}\right) \frac{1}{y^2}$$

Lại có :

$$y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \geq 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{10}} + z \geq 2$$

$$\Rightarrow (1 + 1) \left(\frac{3y^2}{10} + z^2\right) \geq \left(\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{10}} + z\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{3y^2}{10} + z^2 \geq 2 \text{ và } z \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} + 1 = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) \frac{z^2}{1} + \left(\frac{3y^2}{10} + \frac{z^2}{1}\right) \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2} + 2\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = P$$

$$D = Q + 2P \leq \frac{59}{15}$$

Ví dụ 4.

Cho $0 < y \leq x \leq \alpha, \beta > 0$ và $x + y \leq \alpha + \beta$. Chứng minh

$$x^2 + y^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$$

Lời giải:

Ta xét 2 trường hợp:

- Nếu $xy \geq \alpha \cdot \beta$ thì hiển nhiên ta có điều cần chứng minh (do $(x + y)^2 \leq (\alpha + \beta)^2$)
- Nếu $xy \leq \alpha \cdot \beta$ thì lúc đó ta có $\frac{\alpha \cdot \beta}{xy} \geq 1$.

Áp dụng khai triển Abel ta có:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{\alpha^2}{x^2} \cdot x^2 + \frac{\beta^2}{y^2} \cdot y^2 = \frac{\alpha^2}{x^2} \cdot (x^2 - y^2) + y^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) \\ &\geq 1 \cdot (x^2 - y^2) + 2 \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{xy} \cdot y^2 \geq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh?

Nhưng lời giải trên đã sai lầm ở chỗ $x^2 - y^2 \leq 0$ nên ta không thể sử dụng đánh giá $\frac{\alpha^2}{x^2} \cdot (x^2 - y^2) \geq x^2 - y^2$.

Vậy chúng ta phải phân tích sao cho đại lượng $a_1 - a_2 \geq 0$, thuận tiện cho việc đánh giá! Từ suy nghĩ đó chúng ta có phân tích:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{\alpha^2}{y^2} \cdot y^2 + \frac{\beta^2}{x^2} \cdot x^2 = \frac{\alpha^2}{y^2} \cdot (y^2 - x^2) + x^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2}{y^2} + \frac{\beta^2}{x^2}\right) \\ &\geq y^2 - x^2 + 2x^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra tại $x = \beta, y = \alpha$ $\square$

Ví dụ 5.

Cho $0 < y < x \leq 3$ và $x + y \leq 5$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S_2 = x^2 + y^2; \quad S_3 = x^3 + y^3$$

Lời giải:

Khi đã quen với khai triển *Abel* các bạn hoàn toàn có thể bắt đầu phân tích từ vế nhỏ hơn hoặc bằng trước để tạo sự tự nhiên cho bài toán. Thật vậy ta có:

$$S_2 = x.x + y.y = x(x - y) + y(x + y) \leq 3(x - y) + 5y = 3x + 2y \leq 13$$

Dấu bằng xảy ra tại $x = 3; y = 2$

Và tương tự vậy thì:

$$S_3 = x^2.x + y^2.y = x^2(x - y) + y(x^2 + y^2) \leq 9(x - y) + 13y = 9x + 4y \leq 35$$

Dấu bằng xảy ra tại $x = 3; y = 2$ $\square$

Ví dụ 6.

Với $a \geq b \geq 1 \geq c > 0$, $\frac{2}{b} + c \leq 2$, $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} - \frac{1}{6}$$

Lời giải:

Khi đã đọc qua các ví dụ trên, chắc hẳn các bạn sẽ không còn bối rối khi gặp bài tập này nữa. Ta viết lại điều phải chứng minh thành:

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Và từ điều kiện ta có $\frac{1}{c} \geq 1$, $1 - \frac{1}{b} \geq 0$, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$, $\frac{b}{2c} \geq 1$, $\frac{ab}{6c} \geq 1$ Áp dụng khai triển *Abel* ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{1}{c} \cdot 1 + \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{c} \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{2}b\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}a\right) \cdot \frac{1}{a} \\ &\geq 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + 3 \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra tại $a = 3, b = 2, c = 1$ $\square$

Ví dụ 7.

Với $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thoả $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \geq 3$, $\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \geq 2$, $\frac{c}{\gamma} \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Lời giải:

Để ý điều kiện, từ đó và theo *AM - GM* chúng ta dễ dàng có: $\frac{c^2}{\gamma^2} \geq 1$, $\frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \geq 2$, $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \geq 1$

Bây giờ chúng ta hãy tách ghép $a^2 + b^2 + c^2$ để xuất hiện các đại lượng $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ và $\frac{a^2}{\alpha^2}, \frac{b^2}{\beta^2}, \frac{c^2}{\gamma^2}$.

Thật đơn giản, với ý tưởng trên và khai triển *Abel* ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{c^2}{\gamma^2} \cdot \gamma^2 + \frac{b^2}{\beta^2} \cdot \beta^2 + \frac{a^2}{\alpha^2} \cdot \alpha^2 \\ &= (\gamma^2 - \beta^2) \cdot \frac{c^2}{\gamma^2} + (\beta^2 - \alpha^2) \cdot \left(\frac{c^2}{\gamma^2} + \frac{b^2}{\beta^2} \right) + \alpha^2 \cdot \left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) \\ &\geq \gamma^2 - \beta^2 + 2(\beta^2 - \alpha^2) + 3\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. Dấu bằng xảy ra tại $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$

Nhận xét: Các bạn hãy chứng minh bài toán tổng quát với điều kiện như trên

$$a^n + b^n + c^n \geq \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

Ví dụ 8.

(Đề thi HSG TPHCM 2007)

Cho $0 < x < y \leq z \leq 1$ và $3x + 2y + z \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

Lời giải:

Áp dụng liên tiếp nhóm *Abel* và giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} S &= z \cdot z + 2y \cdot y + 3x \cdot x = z(z - y) + (z + 2y)(y - x) + x(z + 2y + 3x) \\ &\leq 1(z - y) + (1 + 2)(y - x) + 4x = z - y + 3y - 3x + 4x = z + 2y + x \\ &= \frac{1}{3}(z \cdot 3 + 2y \cdot 3 + 3x \cdot 1) = \frac{1}{3}[z(3 - 3) + (z + 2y)(3 - 1) + (z + 2y + 3x) \cdot 1] = \frac{1}{3}[0 + 2(z + 2y) + (z + 2y + 3x)] \leq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$ và $y = z = 1$ $\square$

Ví dụ 9.

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \\ 2y + z \leq 2 \\ 3x + 2y + z \leq 3 \end{cases}$$
. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{7}{6}$$

Lời giải:

Nhận thấy dấu bằng xảy ra khi $z = 1, y = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$. Ta viết lại điều phải chứng minh thành:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{49}{36}$$

Và khi dấu bằng xảy ra thì $z = 1, y^2 = \frac{1}{4}, z^2 = \frac{1}{6}$. Ta phân tích:

$$\frac{49}{36} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1 = z^2 \cdot \frac{1}{z^2} + y^2 \cdot \frac{1}{4y^2} + x^2 \cdot \frac{1}{9x^2} +$$

Chắc hẳn khi đã đọc các ví dụ trên, các bạn cũng có thể hình dung tại sao lại phân tích như vậy, mình xin nhắc lại:

Nếu muốn chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$ thì ta sẽ tách:

$$X + Y + Z = A.b_1 + B.b_2 + C.b_3$$

Sao cho khi dấu bằng xảy ra thì $b_1 = b_2 = b_3 = 1$

Quay trở lại bài toán, sau khi tách, ta sử dụng khai triển *Abel* và có:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \frac{1}{9x^2} + y^2 \cdot \frac{1}{4y^2} + z^2 \cdot \frac{1}{z^2} &= (z^2 - y^2) \cdot \frac{1}{z^2} + (y^2 - x^2) \left(\frac{1}{4y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + x^2 \cdot \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{9x^2} \right) \\ &\geq y^2 - z^2 + (y^2 - x^2) \cdot \frac{2}{2yz} + 3x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{36x^2y^2z^2}} \end{aligned}$$

Nhưng từ giả thiết kết hợp *AM - GM* ta dễ dàng suy ra $2yz \leq 1, 6xyz \leq 1$. Vậy nên:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \frac{1}{9x^2} + y^2 \cdot \frac{1}{4y^2} + z^2 \cdot \frac{1}{z^2} &\geq z^2 - y^2 + (y^2 - x^2) \cdot \frac{2}{2yz} + 3x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{36x^2y^2z^2}} \\ &\geq z^2 - y^2 + 2(y^2 - x^2) + 3x^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 10.

(Tuyển sinh lớp 10 Chuyên ĐHKHTN Hà Nội- 2012)

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq b \leq 3 \leq c; c \geq b + 1; a + b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{2ab + a + b + c(ab - 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)}$$

Lời giải:

Đầu tiên ta sẽ đơn giản biểu thức Q :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2ab + a + b + c(ab - 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \\ &= \frac{1}{1 + c} + \frac{ab + abc - c - 1}{(1 + a)(1 + b)(1 + c)} \\ &= \frac{1}{1 + c} + \left(\frac{ab - 1}{(1 + a)(1 + b)} + 1 \right) - 1 \\ &= \frac{1}{1 + c} - 1 + \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \\ &= \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} - \frac{c}{1 + c} \end{aligned}$$

Ta sẽ đi chứng minh $Q \geq \frac{5}{12}$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} - \frac{c}{1 + c} &\geq \frac{5}{12} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} - \frac{c}{1 + c} \right) + \left(\frac{b}{1 + b} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{a}{1 + a} - \frac{1}{2} \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-c}{4(1+c)} + \frac{b-2}{3(b+1)} + \frac{a-1}{2(a+1)} \geq 0$$

Áp dụng khai triển *Abel* ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (3-c) \left(\frac{1}{4(c+1)} - \frac{1}{3(b+1)} \right) + ((3-c) + (b-2)) \left(\frac{1}{3(b+1)} - \frac{1}{2(a+1)} \right) \\ + ((3-c) + (b-2) + (a-1)) \frac{1}{2(a+1)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(3-c)(3b-4c-1)}{12(b+1)(c+1)} + \frac{(b+1-c)(2a-3b-1)}{6(b+1)(a+1)} + \frac{a+b-c}{2(a+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Luôn đúng : do $a \leq b \leq 3 \leq c, c \geq b+1, a+b \geq c$ $\square$

Ví dụ 11.

Cho a, b, c thực thỏa mãn $a \geq 3, ab \geq 6, abc \geq 6$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 6$$

Giả thiết có tổng và tích gợi ý cho ta việc sử dụng bất đẳng thức *AM – GM*. Bằng cách chuyển các điều kiện đã cho thành đẳng thức, ta nhận thấy đẳng thức xảy ra tại $a = 3, b = 2, c = 1$. Từ đó ta sử dụng phép nhóm *Abel* như sau

Lời giải:

Sử dụng phép nhóm *Abel* và bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$a + b + c = \frac{a}{3} \cdot 3 + \frac{b}{2} \cdot 2 + c \cdot 1 = \frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right) + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \right) \geq \frac{a}{3} + 2\sqrt{\frac{ab}{6}} + 3\sqrt[3]{\frac{abc}{6}} \geq 3 + 2 + 1 = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 3; b = 2; c = 1$ $\square$

Ví dụ 12.

(Thi HSG lớp 12 tỉnh Hải Dương năm học 2008-2009)

Cho x, y, z thực dương thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x \geq 5; x + y \geq 8 \end{cases}$. Chứng minh rằng $xyz \leq 15$

Lời giải:

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $xyz > 15$.

Ta có: $z = 9 - x - y \leq 1 \Rightarrow xy > \frac{15}{z} \geq 15$

Sử dụng phép nhóm *Abel* và bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{x}{5} \cdot 5 + \frac{y}{3} \cdot 3 + z \cdot 1 = 2 \cdot \frac{x}{5} + 2 \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3} + z \right) \\ &\geq 2 \cdot \frac{x}{5} + 4\sqrt{\frac{xy}{15}} + 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{15}} > 2 + 4 + 3 = 9 \end{aligned}$$

Mâu thuẫn với giả thiết! Do đó giả sử ban đầu là sai vậy ta có điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 5; y = 3; z = 1$ $\square$

Ví dụ 13.

Chứng minh rằng nếu $a \leq 4, b \leq 5, c \leq 8$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì

$$a + b + c \leq 16$$

Lời giải:

Giả sử ngược lại $a + b + c > 16 \Rightarrow b + c = 16 - a \geq 12, c = 16 - a - b \geq 7$

Sử dụng phép nhóm *Abel* ta có

$$4a + 5b + 7c = c.7 + b.5 + a.4 = 2c + (b + c) + 4(a + b + c) > 2.7 + 12 + 4.16 = 90$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$(4^2 + 5^2 + 7^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (4a + 5b + 7c)^2 > 90^2$$

Từ đây $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 90$ mâu thuẫn với giả thiết! Vậy giả sử trên là sai hay là $a + b + c \leq 16$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4; b = 5; c = 7$ □

Ví dụ 14.

Cho x, y, z thực dương thỏa mãn $x \leq 2; x + y \leq 5; x + y + z \leq 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{x}{2^2} + \frac{y}{3^2} + \frac{z}{5^2}\right) \geq \left(\frac{31}{30}\right)^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2^2} + \frac{y}{3^2} + \frac{z}{5^2} &= \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)x + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right)(x + y) + \frac{1}{5^2}(x + y + z) \\ &\leq \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right).2 + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right).5 + \frac{1}{5^2}.10 = \frac{31}{30} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P \geq \frac{31}{30}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2; y = 3; z = 5$ □

Ví dụ 15.

Với $a; b; c > 0$ thỏa mãn điều kiện $c \geq 2; a + \frac{b}{2} + \frac{3}{c} \geq 3; \frac{b}{2} + \frac{3}{c} \geq 2; \frac{3}{c} \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$c^2 - a^2 - b^2$$

Lời giải:

Sử dụng phép nhóm *Abel* và bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 3^2 &= 3 \left[\frac{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{c}\right)^2}{3} \right] + (2^2 - 1^2) \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{c}\right)^2 \right] + (c^2 - 2^2) \left(\frac{3}{c}\right)^2 \\ &\geq 3 \left(\frac{a + \frac{b}{2} + \frac{3}{c}}{3} \right)^2 + 2.3. \left(\frac{\frac{b}{2} + \frac{3}{c}}{2} \right)^2 + (c^2 - 2^2). \left(\frac{3}{c}\right)^2 \geq 3 + 6 + (c^2 - 2^2) \\ &\Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Qua những thí dụ trên ta thấy rất rõ ứng dụng của phép nhóm *Abel*. Điều quan trọng ở đây là chúng ta phải dự đoán được khi nào dấu đẳng thức xảy ra. Sau đó, sử dụng phép nhóm *Abel* một

cách linh hoạt ,kết hợp với giả thiết để thu được kết quả và đôi khi cần kết hợp với phương pháp phản chứng và các bất đẳng thức quen thuộc như $AM - GM$; $Cauchy - Schwarz$,... Một câu hỏi thú vị được đặt ra là liệu đẳng thức phép nhóm $Abel$ có thể áp dụng được với các bài toán mà vai trò các biến ở đầu bài là bình đẳng ? Câu trả lời là có!

Ví dụ 16.

Cho a, b, c thực thuộc $[0; 2]$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Lời giải:

Vì vai trò a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq 2$

Ta có $b + c = 3 - a \leq 3$. Áp dụng khai triển $Abel$ ta được $a^2 + b^2 + c^2 = c.c + b.b + a.a$

$$= (c-b)c + (b-a)(b+c) + a(a+b+c) \leq 2(c-b) + 3(b-a) + 3a = c + (c+b) \leq c + (a+b+c) \leq 2+3 = 5$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0, b = 1, c = 2$ và các hoán vị □

Ví dụ 17.

Cho a, b, c thực thuộc $[0; 2k]$ và $a + b + c = 3k$. Chứng minh rằng

$$a^n + b^n + c^n \leq k^n + (2k)^n$$

Với $n \geq 2$ là số nguyên dương, k là số thực dương cho trước.

Lời giải:

Vì vai trò a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $0 \leq b \leq c \leq 2k$.

Khi đó $b + c = 3k - a \leq 3k$.

Với $n = 2$, chứng minh tương tự ví dụ trên ta thu được kết quả.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n tức là $a^n + b^n + c^n \leq k^n + (2k)^n$.

Ta sẽ chứng minh nó đúng với $n + 1$. Thật vậy, sử dụng phép nhóm $Abel$ ta có

$$\begin{aligned} a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} &= c.c^n + b.b^n + a.a^n = (c^n - b^n) + k(c^n + b^n) \leq k.c^n + k(a^n + b^n + c^n) \\ &\leq k(2k)^n + k(k^n + (2k)^n) = k^{n+1} + (2k)^{n+1} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n + 1$. Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 0, b = l, c = 2k$ và các hoán vị □

Ví dụ 18.

(Bất đẳng thức Nesbitt)

Cho a, b, c thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Đặt vế trái của bất đẳng thức là P . Vì vai trò a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Áp dụng phép nhóm $Abel$ ta có:

$$P - \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right) = \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{a+c} + \frac{c-a}{a+b}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) (a-b) + \left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \right) (a-b+b-c) + \frac{1}{a-b} (a-b+b-c+c-a) \\
 &= \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)(a-c)}{(a+c)(b+a)} \geq 0
 \end{aligned}$$

Vậy $P \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{b+a}$ (1) Tương tự ta có $P \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a}$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2) ta có $2P \geq 3 \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{2}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

□

III. Lời kết

Sau một quá trình tìm hiểu và phân tích các bài toán, chắc hẳn rằng các bạn cũng đã một phần nào đó hiểu hơn về ứng dụng của phép nhóm *Abel*. Còn rất nhiều điều nữa ở phương pháp này chờ các bạn khám phá. Chúng tôi xin kết thúc bài viết ở đây. Hy vọng qua bài viết này các bạn sẽ tìm thêm được những ý tưởng mới, những hiểu biết mới và hãy luôn quan niệm rằng đằng sau lời giải mỗi bài toán là cả một quá trình dự đoán, thử, sai và đúng.

Chúng tôi xin tặng bài viết này bạn bè VMF và tập thể lớp 10 toán 1 chuyên Thái Bình.
Cám ơn các bạn đã theo dõi chuyên đề này.

IV. Bài tập đề nghị

Bài 1: Với $x_i \in R^+ (i = \overline{1; n})$; $0 < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$

$$x_1 x_2 \dots x_n \geq y_1 y_2 \dots y_n$$

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} \geq y_1 y_2 \dots y_{n-1}$$

...

$$x_n \geq y_n$$

Chứng minh:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_n$$

Bài 2: (Đề chọn đội tuyển OLYMPIC 30/4 2011-2012 Lê Hồng Phong TP.HCM) Cho x, y, z là các số thực thỏa $x \geq 2z \geq 1, x + 4y \geq 3$. Chứng minh rằng

$$2x^2 + 8y^2 + 4z^2 - (x + 4y + 2z) \geq 1$$

Bài 3: (T10/412) Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 \leq \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$$

Bài 4: (T8/348) Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^k i(i+1)$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$$

Bài 5: Cho a, b, c thực thỏa mãn $0 < a \leq b \leq c \leq 3, bc \leq 6, abc \leq 6$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \leq 6$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 6: (IMO 1983) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi x, y, z thực dương ta có

$$\frac{x^2 + yz}{y + z} + \frac{y^2 + xz}{z + x} + \frac{z^2 + xy}{x + y} \geq x + y + z$$

Bài 8: Cho a, b, c thực dương thỏa $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \geq 3; \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \geq 2; c \geq 3$. Chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 36$$

Bài 9: Cho a, b, c thực dương thỏa $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \leq 3; \frac{b}{2} + c \leq 2; c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$$

Bài 10: (Rusia MO 2000) Cho $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ và $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ thực thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1^{13} + x_2^{13} + \dots + x_n^{13}$. Chứng minh rằng

$$x_1^{13} y_1 + x_2^{13} y_2 + \dots + x_n^{13} y_n < x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Bài 11: Cho $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ thỏa $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0, a \geq \alpha, ab \geq \alpha\beta, abc \geq \alpha\beta\gamma$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \alpha + \gamma + \beta$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Tài liệu

[1] www.diendantoanhoc.net

[2] Từ đẳng thức đến bất đẳng thức - Vũ Thanh Tú