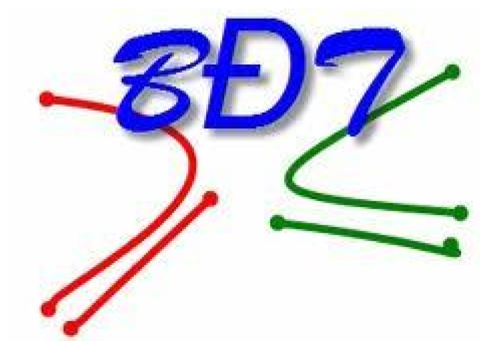
Trường THPT chuyên Nguyễn Du DakLak

Đề tài nghiên cứu khoa học

(Nguyễn Thành Phát-10CT)

Phương pháp đổi biến trong bất đẳng thức



A/Lời nói đầu

Trong việc chứng minh các bất đẳng thức (bđt),tìm giá trị lớn nhất (GTLN),giá trị nhỏ nhất (GTNN) thì việc đổi biến là một phương pháp giúp làm gọn bài toán hoặc đem đến một bđt gần gũi với ta,qua bài viết này minh chia sẽ với các bạn những bài toán hay từ việc đổi biến cũng như chia sẽ kinh nghiệm tại sao và lí do làm như thế

Trong bài viết này có nhiều bài toán mình thấy trong quá trình học,trên các diễn đàn và trong các sách:"sử dụng AM-GM để chứng minh bđt" và "sử dụng phương pháp cauchy-schwarz để chứng minh bđt" và vài sách khác.

Bài viết gồm các phần chính như sau

Ắt hẳn sẽ còn nhiều thiếu sót nên mong các ý kiến đóng góp của bạn đọc

B/Các bài toán

I/Đổi biến từ giả thiết $abc=1$ và tạo ra $abc=1$

▲ Từ cái giả thiết $abc=1$ thì có khá nhiều cách đặt như

$(a,b,c)\to\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)$

$(a,b,c)\to\left(\frac{x^2}{yz},\frac{y^2}{zx},\frac{z^2}{xy}\right)$

$(a,b,c)\to\left(\frac{yz}{x^2},\frac{zx}{y^2},\frac{xy}{z^2}\right)$

$(a,b,c)\to\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$

Và tùy bài toán mà ta có những cách đặt cho phù hợp
Thường thì những bđt mang tính đối xứng ta đặt

$(a,b,c)\to\left(\frac{x^2}{yz},\frac{y^2}{zx},\frac{z^2}{xy}\right)$ và $(a,b,c)\to\left(\frac{yz}{x^2},\frac{zx}{y^2},\frac{xy}{z^2}\right)$

Và những bđt hoán vị ta đặt $(a,b,c)\to\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)$ để đem đến 1 bđt đối xứng(do những bđt đối xứng thì đơn giản hơn so với những bđt hoán vị)

▲ Việc đặt $(a,b,c)\to\left(\frac{x^2}{yz},\frac{y^2}{zx},\frac{z^2}{xy}\right)$ như là hiển nhiên nhưng nhiều người sẽ hỏi tại sao sau khi đặt $a=\frac{x^2}{yz}$ lại có thể đặt $b=\frac{y^2}{zx}$??? Với các biến x,y,z chưa biết từ đâu và điều này được giải thích như sau

□ Đặt $x=\sqrt[3]{a},y=\sqrt[3]{b},z=\sqrt[3]{c}\Rightarrow\frac{x^2}{yz}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}=a$ và tương tự với b,c

Bài 1: Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$.

Tìm GTLN của $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}$

Lời giải

Đây là một bài toán khá quen thuộc

Cách 1:

□ Từ giả thiết như 1 quán tính ta đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$

Do đó ta có $\sum\frac{1}{a+b+1}=\sum\frac{yz}{y^2+yz+zx}$

Việc tử thức có chứa lần lượt yz,zx,xy và mẫu thức mỗi cái có $yz+zx,xy+yz,zx+xy$ nên ta nghĩ tới bđt cauchy-schwarz để tạo $xy+yz+zx$ và đưa đến cách giải như sau

$$\sum\frac{yz}{y^2+yz+zx}=\sum\frac{yz(x^2+yz+zx)}{(y^2+yz+zx)(x^2+yz+zx)}\le\sum\frac{yz(x^2+yz+zx)}{(xy+yz+zx)^2}=1$$

Cách 2:

□ Thường thì các bài toán là ta hay làm cho nó đồng bậc mà để cho đồng bậc thì ta có

$$\sum\frac{1}{a+b+1}=\sum\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}}$$

Đặt cho dễ nhìn thì ta đặt $a=x^3,b=y^3,c=z^3$

Do đó ta tìm GTLN của $\sum\frac{1}{x^3+y^3+1}$ (*)

Ta có $x^3+y^3\ge xy(x+y)\Rightarrow x^3+y^3+1\ge xy(x+y+z)$

$$\Rightarrow\sum\frac{1}{x^3+y^3+1}\le\sum\frac{1}{xy(x+y+z)}=\sum\frac{z}{x+y+z}=1$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▹ Nhận xét: ở cách 1 thì có 1 sự tự nhiên nào đó do ta có điều kiện còn ở cách 2 là 1 cách làm khá quen thuộc và dễ thấy cho những ai đã làm quen với bđt nhưng là một sự mất tự nhiên đối với một người mới học về bđt

Bài toán (*) giống với $a,b,c>0$.

CMR $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$ (USA 1997)

sau khi cho $abc=1$ ta được (*) và dưới đây là 1 bài toán với cách làm tương tự cách 2

Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$.

Tìm GTLN của $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}$ (IMO Shortlist 1996)

Bài 2: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$.

CMR $(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\le 1$ (IMO 2000)

Lời giải

□ Đối với bđt hoán vị như thế này thì ta nghĩ đến việc đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$

Do đó ta cần chứng minh $(x+y-z)(z+x-y)(y+z-x)\le xyz$ (*)

(*) là một bđt quen thuộc

Ta có $(x+y-z)(z+x-y)\le\frac{[(x+y-z)+(z+x-y)]^2}{4}=x^2$

Tương tự thì nhân lại ta được $x^2y^2z^2\ge[(x+y-z)(x+z-y)(y+x-z)]^2$

$\Rightarrow xyz\ge|(x+y-z)(z+x-y)(y+x-z)|\ge(x+y-z)(z+x-y)(y+x-z)$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 3: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$

CMR $\frac{a^2b^2}{(b+2)(2b+1)}+\frac{b^2c^2}{(c+2)(2c+1)}+\frac{c^2a^2}{(a+2)(2a+1)}\ge\frac{1}{3}$

Lời giải

□ Nhìn vào thì thấy việc hoán vị như thế này sẽ gây khó khăn cho ta nhưng từ cái giả thiết ta biến đổi nó trở thành một bđt đối xứng cho đơn giản hơn nên đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$ là phù hợp

Do đó bđt chứng minh tương đương $\sum\frac{x^2}{(y+2z)(z+2y)}\ge\frac{1}{3}$

Tới đây thì ta cứ việc liên tưởng đến sử dụng cauchy-schwarz

$$\sum\frac{x^2}{(y+2z)(z+2y)}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum x^2(y+2z)(z+2y)}$$

Ta chứng minh

$$\sum\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum x^2(y+2z)(z+2y)}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2(x^4+y^4+z^4)+3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge 5xyz(x+y+z)$$

Điều này luôn đúng do $x^4+y^4+z^4\ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z)$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 4: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$

CMR $\frac{a}{(1+a)(1+b)}+\frac{b}{(1+b)(1+c)}+\frac{c}{(1+a)(1+c)}\ge\frac{3}{4}$ (Czech-Slovak 2005)

Lời giải

□ Như ở bài trước thì việc $abc=1$ và bđt hoán vị như thế này thì ta đặt

$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\frac{xz}{(x+y)(z+y)}\ge\frac{3}{4}$

Và cũng như bài trước thì ta nhân thêm một lượng ở tử để dùng cauchy-schwarz

$$\sum\frac{xz}{(x+y)(z+y)}\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{3xyz(x+y+z)+\sum x^2y^2}=\frac{(xy+yz+zx)^2}{(\sum xy)^2+xyz(x+y+z)}\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{(\sum xy)^2+\frac{(\sum xy)^2}{3}}=\frac{3}{4}$$

dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▷ Nhận xét: ở những bài thế này có ở mẫu những lượng được lặp lại là $a+1,b+1,c+1$ thì ta có một cách nữa là quy đồng

□ Quy đồng ta được bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$ (và điều này luôn đúng do $abc=1$)

Bài 5: Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$.

CMR $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1$ (Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Bđt đối xứng như vậy thì ta đặt $x=\frac{a^2}{bc},y=\frac{b^2}{ca},z=\frac{c^2}{ab}$

Ta chứng minh $\sum\frac{b^2c^2}{a^4+a^2bc+b^2c^2}\ge 1$

Nhưng đánh giá cái này khá là oái ăm khi ở mẫu có đại lượng a^4,b^4,c^4 thì không nhỏ hơn b^2c^2,c^2a^2,a^2b^2

□ Do đó ta đặt $x=\frac{bc}{a^2},y=\frac{ca}{b^2},z=\frac{ab}{c^2}$,ta chứng minh $\sum\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}\ge 1$

Ta có $\sum\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^4+abc\sum a+\sum b^2c^2}$

Ta chứng minh $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^4+abc\sum a+\sum b^2c^2}\ge 1\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài 6: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=1$

CMR $x^2y^4+y^2z^4+z^2x^4\ge\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2+z^2}{y^2+x^2}+\frac{z^2+x^2}{z^2+y^2}$ (VMF)

Lời giải

□ Hình thức như vậy thì có x^2,y^2,z^2 nó thêm rắm rối vậy thì đầu tiên là cứ đặt $a=x^2,b=y^2,c=z^2$ .Do đó ta cần chứng minh tương đương

$ab^2+bc^2+ca^2\ge\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}$

$\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}$ (India 2002) (*)

Bđt (*) là một bđt khá quen thuộc với nhiều cách giải,mình đưa ra hai cách như sau

Cách 1:

□ $(*)\Leftrightarrow\frac{ab+c^2}{c(c+a)}+\frac{bc+a^2}{a(a+b)}+\frac{ca+b^2}{b(b+c)}\ge 3$

Ta có $VT\ge 3\sqrt[3]{\frac{(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$

Do đó ta cần chứng minh $(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)\ge abc(a+b)(b+c)(c+a)$ (1)

Mà ta có $(ab+c^2)(ab+a^2)\ge(ab+ac)^2=a^2(b+c)^2\Rightarrow(ab+c^2)(a+b)\ge a(b+c)^2$

Tương tự ta có $(bc+a^2)(b+c)\ge b(a+c)^2$

$(ca+b^2)(c+a)\ge c(a+b)^2$

Nhân ba cái lại thì ta chứng minh được (*)

Cách 2:

□ $VT - VP = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2} - \sum_{cyc}\frac{a}{b} + \sum\frac{ab}{c^2} - 3)$

Mà ta có $\sum\frac{ab}{c^2} \ge 3, \sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2} \ge \frac{1}{3}(\sum_{cyc}\frac{a}{b})^2 \ge \sum_{cyc}\frac{a}{b}$

Do đó $VT - VP \ge 0 \Rightarrow VT \ge VP$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

Bài 7: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$.

CMR $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{3}{2}(a+b+c-1)$ (THTT)

Lời giải

□ Như các bài trước với hình dạng hoán vị như thế này ta đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{xz}{y^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{yx}{z^2} \ge \frac{3}{2}(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1)$

$\Leftrightarrow 2(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)+3x^2y^2z^2 \ge 3(x^3yz^2+y^3zx^2+z^3xy^2)$

Theo bđt shur thì ta có $\sum x^3y^3 + 3x^2y^2z^2 \ge \sum_{cyc} x^2yz(xy+xz)$

Mà ta có $x^3y^3 + y^3xz^2 \ge 2x^2y^3z$

$y^3z^3 + z^3yx^2 \ge 2y^2z^3x$

$z^3x^3 + x^3zy^2 \ge 2z^2x^3y$

Do đó ta có đpcm

▹ Nhận xét: bđt schur là một bđt khá quen thuộc với những ai đã tìm hiểu về bđt

Việc sử dụng bđt schur ở đây là $a^3+b^3+c^3+3abc \ge \sum ab(a+b)$ (với $a,b,c \ge 0$)

Sử dụng bđt schur qua việc đổi biến sẽ được nói ở phần VII

Bài 8: Cho $a,b,c>0$.

CMR $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)} \ge \frac{3}{2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$

Lời giải

□ Việc vế trái có một cái căn xấu như vậy nên ta làm để mất nó bằng cách chuẩn hóa ta chuẩn hóa $abc=1$

Tới đây thì đây là một bđt hoán vị nên phù hợp nhất là đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\frac{y^2}{x^2+yz} \ge \frac{3}{2}$

Thường những bài dạng này thì ta cứ nghĩ ngay tới việc sử dụng cauchy-schwarz

Ta có $\sum \frac{y^2}{x^2+yz} \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^3y+y^3z+z^3x}$

Ta chứng minh $\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^3y+y^3z+z^3x} \ge \frac{3}{2}$

Mà ta có $(x^2+y^2+z^2)^2 \ge 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

Nên giờ ta chứng minh $(x^2+y^2+z^2)^2 \ge 3(x^3y+y^3z+z^3x)$ (*)

(*) là một bđt khá quen thuộc của Vasile và có hai cách chứng minh thường gặp như sau

Cách 1:

□ $(x^2+y^2+z^2)^2 - 3(x^3y+y^3z+z^3x) = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(x^2-z^2-2xy+yz+zx)^2 \ge 0$

Cách 2:

□ Đặt $y=x+m, z=x+n$ nên ta có bđt cần chứng minh tương đương

$(m^2-mn+n^2)x^2-(m^3-5m^2n+4mn^2+n^3)x+m^4-3m^3n+2m^2n^2+n^4 \ge 0$

Ta có $\Delta_x = (m^3-5m^2n+4mn^2+n^3)-4(m^2-mn+n^2)(m^4-3m^3n+2m^2n^2+n^4)$

$= -3(m^3-m^2n-2mn^2+n^3)^2 \le 0$

Do đó (*) được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét: dấu bằng ở bđt (*) xảy ra khi $x=y=z$ hoặc

$(x,y,z)=(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7})$ và các hoán vị

Một bài toán 4 biến và cách giải tương tự là :

Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa $abcd=1$.

CMR $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+d)}+\frac{1}{d(d+a)} \ge 2$ (Vasile Cirtoaje)

Bài 9: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$.

CMR $\frac{1+a+ab}{b+ac+2}+\frac{1+b+bc}{c+ba+2}+\frac{1+c+ca}{a+cb+2} \ge \frac{9}{4}$ (VMF)

Lời giải

□ Nhìn vào hoán vị của bài toán thì cứ đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$

Do đó bđt cần chứng minh tương đương $\sum \frac{xy+yz+zx}{(y+z)^2} \ge \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2} \ge \frac{9}{4(xy+yz+zx)}$ (Iran 1996) (*)

Bài toán (*) là bài toán nổi tiếng và quen thuộc,sau đây mình đưa ra hai cách làm và một cách làm khác sẽ được nói ở bài 57 phần VII

Cách 1:

□ Không mất tính tổng quát giả sử $z \ge y \ge x$

Đặt $\begin{cases} y+z=2a \\ z+x=2b \\ x+y=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=b+c-a \\ y=c+a-b \\ z=a+b-c \end{cases} \Rightarrow a,b,c$ là độ dài ba cạnh của tam giác

Vì $z\ge y\ge x \Rightarrow a\ge b\ge c$

Do đó bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge \frac{9}{2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2}$

$\Leftrightarrow \sum(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2})(a-b)^2\ge 0$

Đặt $S_a=\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}, S_b=\frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2}, S_c=\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}$

Vì $a\ge b\ge c$ nên $S_a\ge 0$ và $a<b+c<2b\Rightarrow S_b\ge 0$

Theo tiêu chuẩn 4 của phương pháp SOS thì ta chứng minh

$b^2S_c+c^2S_b\ge 0 \Leftrightarrow b^3+c^3\ge abc$

Ta có $abc<(b+c)bc\le b^3+c^3$

Do đó bđt được chứng minh

Cách 2:

□ Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$

Ta chứng minh $\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\ge \frac{2}{(x+z)(y+z)}+\frac{1}{4xy}$ (1)

Điều này $\Leftrightarrow \frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}-\frac{2}{(x+z)(y+z)}\ge \frac{1}{4xy}-\frac{1}{(x+y)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{(x+z)^2(y+z)^2}\ge \frac{(x-y)^2}{4xy(x+y)^2}$

Mà ta có $(x-y)^2\ge 0,(x+y)^2\ge (x+z)^2, 4xy\ge 4y^2\ge (y+z)^2$ do đó (1) được chứng minh

do đó ta cần chứng minh $(xy+yz+zx)\left[\frac{2}{(x+z)(y+z)}+\frac{1}{4xy}\right]\ge \frac{9}{4}$

Mà $\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+z)(y+z)}=2-\frac{2z^2}{(x+z)(y+z)}$ và $\frac{xy+yz+zx}{4xy}=\frac{1}{4}+\frac{z(x+y)}{4xy}$

Do đó bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow \frac{z(x+y)}{4xy}\ge \frac{2z^2}{(x+z)(y+z)} \Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z)\ge 8\text{xyz}$

Điều này luôn đúng theo cauchy nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▷ Nhận xét:tiêu chuẩn 4 của phương pháp sử dụng SOS là

Nếu $a\ge b\ge c$ (hoặc $a\le b\le c$), $S_a\ge 0, S_b\ge 0$ và $b^2S_c+c^2S_b\ge 0$ thì ta có

$S=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$

$$S=S_a(b-c)^2+(\text{a}-\text{b})^2[S_b\left(\frac{a-c}{a-b}\right)^2+S_c]\geq S_a(b-c)^2+(a-b)^2[S_b\left(\frac{c}{b}\right)^2+S_c]$$

$$=S_a(b-c)^2+[\text{b}^2 S_c+c^2S_b]\left(\frac{a-b}{b}\right)^2\geq 0$$

(với $a\geq b\geq c$ thì $\frac{a-c}{a-b}\geq\frac{c}{b}$,với $a\leq b\leq c$ thì $\frac{c-a}{b-a}\geq\frac{c}{b}$ do đó $(\frac{a-c}{a-b})^2\geq\frac{c^2}{b^2}$)

Một bài toán mở rộng của (*) và cũng sử dụng tiêu chuẩn 4 như trên là

Cho $x,y,z>0$ thỏa $\min\{\text{x},\text{y},\text{z}\}\geq\frac{1}{4}\max\{\text{x},\text{y},\text{z}\}$

CMR $(\text{xy}+\text{yz}+\text{zx})[\frac{1}{(\text{x}+\text{y})^2}+\frac{1}{(\text{y}+\text{z})^2}+\frac{1}{(\text{z}+\text{x})^2}]\geq\frac{9}{4}+\frac{1}{16}\sum\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$

Bài 10: Cho $x,y,z,t\geq 0$ thỏa $xyzt=1$

CMR $\frac{1}{(1+x+xy)^2}+\frac{1}{(1+y+yz)^2}+\frac{1}{(1+z+zt)^2}+\frac{1}{(1+t+tx)^2}\geq\frac{4}{9}$

Lời giải

Hình thức như vậy ta chả có hướng gì thì cứ đặt ẩn $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{d},t=\frac{d}{a}$

Do đó ta cần chứng minh

$$\frac{b^2c^2}{(bc+ab+ac)^2}+\frac{c^2d^2}{(cd+bd+cb)^2}+\frac{a^2d^2}{(ad+ac+cd)^2}+\frac{a^2b^2}{(ab+bd+ad)^2}\geq\frac{4}{9}$$

Lúc này thì ở mẫu thì các đại lượng tạo ra thêm nhiều biến do đó ta đặt

$x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{c}{d},t=\frac{d}{a}$

do đó ta cần chứng minh $\sum_{cyc}\frac{a^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{4}{9}$ (Phạm Kim Hùng) (*)

□ Bài toán (*) với cách chứng minh dưới đây là được lấy từ cuốn "sử dụng cauchy-schwarz để chứng minh bđt"

Ta có $VT[\sum a(a+b+c)]^2\geq\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+d^{\frac{4}{3}}\right)^3$

Do đó ta cần chứng minh $9\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+d^{\frac{4}{3}}\right)^3\geq 4[\sum a(a+b+c)]^2$

$$\Leftrightarrow 9(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+\text{d}^{\frac{4}{3}})^3\geq 4[(\text{a}+\text{c})^2+(b+d)^2+(a+c)(b+d)]^2$$

Mà ta có $a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\geq 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$ và $b^{\frac{4}{3}}+d^{\frac{4}{3}}\geq 2\left(\frac{b+d}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$

Do đó ta cần chứng minh $18\left[\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{b+d}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^3 \geq [(a+c)^2+(b+d)^2+(a+c)(b+d)]^2$

Đặt $m=\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, n=\left(\frac{b+d}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ thì ta cần chứng minh $9(m^4+n^4)^3 \geq 8(\mathrm{m}^6+n^6+m^3n^3)^2$

Đặt $t=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geq 2$ thì ta cần chứng minh $9(t^2-2)^3 \geq 8(t^3-3t+1)^2$

$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^4+4t^3+6t^2-8t-20)\geq 0$

Điều này luôn đúng do đó bđt được chứng minh

▹ Nhận xét:bđt holder là một bđt hay trong việc chứng minh các bđt có căn hay những dạng khá "ảo" và cũng cần một sự trâu bò trong khi sử dụng bđt này nên khi sử dụng bđt holder mọi người nhớ làm kĩ từng bước vì nếu làm sai ở đâu đó thì sẽ rất nản khi làm tiếp

▲ qua trên là những bài toán đổi biến từ $abc=1$ và sau đây là vài bài ta đổi biến để tạo ra $abc=1$ và làm đơn giản bài toán hơn

Bài 11: Cho a,b,c là 3 số dương

CMR $\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1$

Lời giải

Hình thức như thế này thì ta nghĩ đến thêm cả tử với mẫu a rồi sử dụng cauchy-schwarz nhưng làm như thế lại không ra được gì cả

□ Vậy ta nghĩ đến hướng tiếp theo chính là đổi biến nhưng đổi như thế nào vẫn chưa biết thì cứ làm mất tử đã $VT=\frac{1}{\frac{b^3}{a^3}+\frac{bc}{a^2}+1}+\frac{1}{\frac{c^3}{b^3}+\frac{ca}{b^2}+1}+\frac{1}{\frac{a^3}{c^3}+\frac{ab}{c^2}+1}$

Hình thức như vậy thì đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{a}{c}, z=\frac{c}{b}\Rightarrow xyz=1$

Do đó ta cần chứng minh $\sum_{cyc}\frac{1}{x^3+\frac{x}{y}+1}\geq 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{x^3+x^2z+1}\geq 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{yz}{x^2+yz+zx}\geq 1$

$$\sum_{cyc}\frac{yz}{x^2+yz+zx}\geq \frac{(yz+zx+xy)^2}{\sum_{cyc} yz(x^2+yz+zx)}=1$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $\frac{a}{b}\to +\infty, \frac{b}{c}\to +\infty$ và các hoán vị

Bài 12: Cho a,b,c là 3 số dương

CMR $\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}}\geq 1$

Lời giải

Hình thức khá giống bài trên bởi có sự lặp lại a^2 ở mẫu

□ Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c} \Rightarrow xyz=1$

Do đó ta cần chứng minh $\sum \frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}} \geq 1$ đến đây ta có hai cách làm như sau

Cách 1: (theo cuốn "Những viên kim cương trong bđt Toán học")

□ Đặt $x=\frac{n^2p^2}{m^4}, y=\frac{p^2m^2}{n^4}, z=\frac{m^2n^2}{p^4}$ (với $m,n,p>0$)

Do đó ta cần chứng minh $\sum \frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}} \geq 1$

Ta có $\left(\sum \frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}}\right)^2 \left[\sum m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)\right] \geq (m^3+n^3+p^3)^3$

Nên ta cần chứng minh $(m^3+n^3+p^3)^3 \geq \sum m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(5m^6n^3+2m^3n^3p^3-7m^5n^2p^2)+\sum_{cyc}(m^6n^3-m^4n^4p) \geq 0$

Điều này luôn đúng theo cauchy nên bđt được chứng minh

Cách 2: (theo cuốn "Vẻ đẹp bđt trong các kì thi Olimpic Toán học")

□ Ta có $\frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}} \geq \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$ (chứng minh bằng biến đổi tương đương)

Do đó $\sum \frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}} \geq \sum \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$

Ta đi chứng minh $\sum \frac{1}{x+\sqrt{x}+1} \geq 1$ mà điều này luôn đúng theo bài 5 nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $\frac{a}{b} \to +\infty, \frac{b}{c} \to +\infty$ và các hoán vị

▹ Nhận xét:việc sử dụng holder ở cách 1 khá tự nhiên do việc chứa căn nhưng cần sự "trâu bò",còn ở cách 2 thì do thấy sự độc lập ở mỗi phân thức của các biến và điều kiện $xyz=1$ nên ta "đi hết được chặng đường" bằng cách sử dụng bđt Vasile .Sau đây là hai bài toán đều có thể sử dụng cả 2 cách(nhưng ở cách 2 cần thêm kĩ thuật chọn hệ số) và một bài toán tổng quát của bài toán trên

Cho a,b,c là 3 số thực dương

1,CMR $\sqrt{\frac{a^2}{a^2+6ab+2b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+6bc+2c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+6ca+2a^2}} \geq 1$

2,CMR $\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+bc+4c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+ca+4a^2}} \leq 1$

3,CMR $\sqrt{\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+kbc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+kca+a^2}}\ge \min\left\{1,\frac{3}{\sqrt{k+2}}\right\}$ với $k\ge -2$

Bài 13: Cho $x,y,z\in\left[\frac{1}{3};3\right]$

Tìm GTNN của $P=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$

Lời giải

Dạng hoán vị như thế này thì tư tưởng là cứ đặt ẩn

□ Như hai câu trên làm mất tử và ta đặt $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}\Rightarrow abc=1$

Do đó $P=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$

Với giả thiết và hình thức như trên ta liên tưởng đến bđt $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với $a\ge -1,b\ge -1,ab\ge 1$ (bđt biến đổi tương đương là được xin dành cho bạn đọc)

Để sử dụng bđt trên ta giả sử $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow ab\ge 1,c\le 1$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$$

Ta có $c=\frac{x}{z}\ge\frac{\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}$

Do đó ta tìm GTNN của $P=\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}+\frac{1}{1+c}$ với $c\in\left\{\frac{1}{9},1\right\}$

Tới đây xét hàm là được $f(c)\ge f(\frac{1}{9})=\frac{7}{5}$

Nhưng 1 học sinh lớp 10 thì chưa biết đạo hàm và có biết thì cũng không được dùng trong các kì thi học sinh giỏi ở lớp 10 nên ta có đánh giá sau

Thường thì các bđt dạng có điều kiện thì dấu bằng xảy ra ở biên

Ta thấy $f(\frac{1}{9})=\frac{7}{5}\le\frac{3}{2}=f(1)$ nên ta chứng minh

$$\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{(3\sqrt{c}-1)(c-2\sqrt{c}+2)}{5(\sqrt{c}+1)(c+1)}\ge 0$$

Điều này luôn đúng với $c\in\left\{\frac{1}{9},1\right\}$ do đó $P\ge\frac{7}{5}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{3},y=1,z=3$ và các hoán vị

▹ Nhận xét: việc chia và đặt ẩn tạo sự đối xứng là một phương pháp hay dùng và sau đây là một bài toán khá giống bài trên là

Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^3+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^3+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^3\geq\dfrac{3}{8}$ (TST Vietnam 2005)

Bài 14: Cho $x,y,z>0$

Tìm GTLN của $T=\dfrac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3}+\dfrac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(yz+x^2)^3}+\dfrac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(zx+y^2)^3}$

(VMO 2014)

Lời giải

□ Hình thức hoán vị như thế này thì ta đặt $a=\dfrac{x}{y},b=\dfrac{y}{z},c=\dfrac{z}{x}\Rightarrow abc=1$

Do đó $T=\sum\dfrac{1}{(1+a^4)(b+c)^3}$

Và sau đây mình xin đưa ra hai cách giải như sau

Cách 1(Giáo sư Nguyễn Tiến Dũng)

□ Ta có $1+a^4\geq\dfrac{1}{8}(1+a)^4$

Mà ta có $(1+a)(b+c)\geq(\sqrt{b}+\sqrt{ac})^2=\dfrac{(1+b)^2}{b}\geq\dfrac{2(1+b)}{\sqrt{b}}$

Tương tự ta có $(1+a)(b+c)\geq\dfrac{2(1+c)}{\sqrt{c}}$

Mà $b+c\geq2\sqrt{bc}\Rightarrow(1+a^4)(b+c)^3\geq(1+a)^2(1+b)(1+c)$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\dfrac{1}{(1+a)^2(1+b)(1+c)}\leq\dfrac{3}{16}$

$\Leftrightarrow16(3+2\sum a+\sum ab)\leq3(2+\sum a+\sum ab)^2$

Ta có $16(3+2\sum a+\sum ab)\leq32(\sum a+\sum ab)$

Do đó ta cần chứng minh $32(\sum a+\sum ab)\leq3(2+\sum a+\sum ab)^2$

Đặt $t=\sum a+\sum ab\geq6$ thì ta cần chứng minh $32t\leq3(2+t)^2$

$\Leftrightarrow(3t-2)(t-6)\geq0$

Bđt luôn đúng nên có được đpcm

Cách 2:cách này là mình học được ở VMF

□ Ta có $(b+c)^3\geq8bc\sqrt{bc}=\dfrac{8}{a\sqrt{a}}\geq\dfrac{16}{a^2+a}$ $\Rightarrow16T\leq\sum\dfrac{a^2+a}{a^4+1}$

Mà ta có $\dfrac{a^2+a}{a^4+1}\leq\dfrac{3(a+1)}{2(a^2+a+1)}$ (cái này biến đổi tương đương là được)

$\Rightarrow16T\leq\dfrac{3}{2}\sum\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$

Ta chứng minh $\sum\frac{a+1}{a^2+a+1}\le 2\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{a^2+a+1}\ge 1\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}+1}\ge 1$

Và đây chính là bđt được chứng minh ở bài 5
Do đó ta có được đpcm
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$

II/ Đổi biến $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$

Bài 15: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$

CMR $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$ (IMO 1995)

Lời giải

□ Ta thấy ở mẫu có 1 đại lượng là mũ 3 và điều đó làm ta khó chịu nên ta tìm cách để đại lượng đó ở tử bằng cách đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow xyz=1$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\frac{x^2}{y+z}\ge\frac{3}{2}$

Điều này luôn đúng do $\sum\frac{x^2}{y+z}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\ge\frac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▷ Nhận xét:những bài toán tổng quát cho bài này là rất nhiều và mình đưa ra hai dạng tổng quát như sau

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$ và n nguyên dương

1,Tìm GTNN của $\frac{1}{x^{n+1}(y+z)}+\frac{1}{y^{n+1}(z+x)}+\frac{1}{z^{n+1}(x+y)}$

2, Tìm GTNN $\frac{1}{x^{\sqrt{n^3}}(y^{\sqrt{n}}+z^{\sqrt{n}})}+\frac{1}{y^{\sqrt{n^3}}(z^{\sqrt{n}}+x^{\sqrt{n}})}+\frac{1}{z^{\sqrt{n^3}}(x^{\sqrt{n}}+y^{\sqrt{n}})}$

Bài 16: Cho x,y,z dương thỏa $abc=1$

CMR $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$ (Baltic Way 2005)

Lời giải

□ Hình thức thế này ta nghĩ đến cauchy ở mẫu giữa a^2 với 1 nhưng nếu vậy thì chẳng làm được gì sau này do đó để sử dụng a^2 với 1 nên ta đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow xyz=1$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\frac{x}{2x^2+1}\le 1$

Mà $\sum\frac{x}{2x^2+1}\le\sum\frac{x}{x^2+2x}=\sum\frac{1}{x+2}$

Nên ta cần chứng minh $\sum\frac{1}{x+2}\le 1\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 3$
Điều này luôn đúng theo cauchy do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 17: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2b^2c^2$

Tìm GTNN của $A=\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)}$ (Boxmath)

Lời giải

□ Dạng giả thiết như thế này thì cứ chia và ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 1$

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 1$ do đó $A=\sum\frac{x^3}{y^2+z^2}$

Và một cách rất tự nhiên nhìn thấy biểu thức như vậy thì ta nhân x vào và sử dụng cauchy-schwarz $\Rightarrow A\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum x(y^2+z^2)}$

Mà ta có $x(y^2+z^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2(y^2+z^2)(y^2+z^2)}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Rightarrow A\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3.\frac{2\sqrt{3}}{9}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$

Bài 18: Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\ge\frac{3}{\sqrt{2abc}}$ (Đề nghị Olimpic 30-4 2011)

Lời giải

Mấy dạng đề mà có ẩn cả hai vế thì ta thường đưa các ẩn về hết một bên

Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a^2+ab}}+\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b^2+bc}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c^2+ca}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$

□ Đến đây như một kinh nghiệm khó giải thích thì mình đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$

Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x}{\sqrt{xz+yz}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x}{\sqrt{2z}.\sqrt{x+y}}\ge\frac{3}{2}$ (*)

$$VT_{(*)}\ge 2\sum\frac{x}{x+y+2z}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{\sum x^2+3\sum xy}$$

Ta chứng minh $\frac{2(x+y+z)^2}{\sum x^2+3\sum xy}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

Điều này luôn đúng nên ta có đpcm
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét:việc đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$ không phải là ý tưởng cao siêu gì,mà chỉ là đặt một hồi không biết đặt gì nên mình đặt như vậy,1 bài toán với cách giải tương tự như sau
Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}}+\frac{1}{b\sqrt{3b+2c}}+\frac{1}{c\sqrt{3c+2a}}\ge\frac{3}{\sqrt{5abc}}$

Bài 19: Cho x,y,z là 3 số thực dương

CMR $\frac{1}{3}\left(\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}\right)+\left[\frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\right]^2\ge 2$ (Đề nghị Olimpic 30/4 2012)

Lời giải

Ở bài như thế này thì ta thường đánh giá mấy cái tổng phân thức trước nên ta tìm cách đánh giá $\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$ Việc ở mẫu có đại lượng x^2,y^2,z^2 lớn hơn cái đại lượng ở tử là yz,zx,xy nên ta nghĩ đến việc đổi biến để tạo ra các đại lượng bậc 2 ở tử

□ Do đó ta đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ nên bđt $\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)+\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\ge 2$

Do đó giờ ta đánh giá $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$ và như các bài trước thì dạng thế này ta sử dụng cauchy-schwarz

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3abc(a+b+c)}\ge\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$$

Do đó ta cần chứng minh $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2+\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\ge 2$

Và điều này luôn đúng theo cauchy do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$

Bài 20: Cho $a,b,c,d>0$ thỏa $\sqrt[3]{5}\min\{a,b,c,d\}>\max\{a,b,c,d\}$

CMR $\frac{1}{5a^3-bcd}+\frac{1}{5b^3-cda}+\frac{1}{5c^3-dab}+\frac{1}{5d^3-abc}\ge\frac{64}{(a+b+c+d)^3}$

Lời giải

Nhìn hình thức thế này thì nghĩ ngay đến sử dụng cauchy-schwarz nhưng để thế này sẽ không làm ăn được, ta thấy $\frac{1}{5a^3-bcd}=\frac{1}{abcd}.\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{5}{bcd}-\left(\frac{1}{a}\right)^3}$ thì có thể sử dụng cauchy-schwarz

□ Do đó đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z},d=\frac{1}{t}$

Nên ta cần chứng minh $\sum\frac{x^2}{5yzt-x^3}\ge\frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz+yzt+ztx+txy)^3}$

Vì $5yzt-x^3\ge 0,5ztx-y^3\ge 0,5txy-z^3\ge 0,5xyz-t^3\ge 0$ nên

$$\sum\frac{x^2}{5yzt-x^3}\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{5\sum yzt-\sum x^3}\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{4(\text{xyz}+\text{yzt}+\text{ztx}+\text{txy})}$$

Do đó ta cần chứng minh $(x+y+z+t)^2(xyz+yzt+ztx+txy)^2\ge 256x^2y^2z^2t^2$

Điều này luôn đúng theo cauchy nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d$

Bài 21: Cho các số dương a,b,c,d .CMR

$$\frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)}+\frac{abd}{(a+c)(b+c)(b+d)}+\frac{acd}{(a+b)(c+b)(d+b)}+\frac{bcd}{(b+a)(c+a)(d+a)}\ge\frac{1}{2}$$

Lời giải

□ Bài này hình thức rất đẹp nhưng cũng rất "choáng" bởi có tới 4 biến và đại lượng ở tử dường như nhỏ hơn các đại lượng ở mẫu do đó đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z},d=\frac{1}{t}$

Nên ta cần chứng minh $\sum\frac{x^3}{(x+y)(x+z)(x+t)}\ge\frac{1}{2}$

Và hình thức như thế này thì cứ dùng cauchy-schwarz nên ta cần chứng minh

$2(x^2+y^2+z^2+t^2)^2\ge\sum x(x+y)(x+z)(x+t)$ và từ đây cần sự "trâu bò"

$$\Leftrightarrow 2(\sum x^2)^2\ge\sum x^4+\sum_{cyc}(x^3y+y^3z+z^3x)+\sum x.\sum xyz$$

Mà ta có $x^3y+y^3z+z^3x\le\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2$ (được chứng mình ở bài 8)

Do đó ta cần chứng minh $2(\sum x^2)^2\ge\sum x^4+\frac{1}{3}\sum(x^2+y^2+z^2)^2+\sum x.\sum xyz$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{3}\sum(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge(\text{x}+\text{y}+\text{z}+\text{t})(\text{xyz}+\text{yzt}+\text{zxt}+\text{txy})\qquad(*)$$

Ta có $VT_{(*)}\ge\sum xyz(x+y+z)+\frac{1}{3}\sum(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge\sum xyz(x+y+z)+4xyzt$

$$=(x+y+z+t)(xyz+yzt+zxt+txy)=VP$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d$

Bài 22: Cho x,y,z,t là 4 số thực dương

CMR $(x+y)(x+z)(x+t)(y+z)(y+t)(z+t)\ge 4xyzt(x+y+z+t)^2$

Lời giải

Bài này nhìn "choáng" không khác gì bài trên

□ Việc ở VT có hai đại lượng $xyzt$ và $(x+y+z+t)^2$ nên ta nghĩ tới việc làm cách biến đổi để nó đồng nhất cùng vào 1 cái ngoặc do đó ta đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c},t=\frac{1}{d}$ do đó ta cần chứng minh

$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)\ge 4(abc+abd+acd+bcd)^2$

Cách giải đầy "ảo diệu" từ các đẳng thức sau là của thầy Võ Quốc Bá Cẩn

Ta có $(abc+abd+acd+bcd)^2=\left(\sqrt{ac}.b\sqrt{ac}+\sqrt{bd}.a\sqrt{bd}+\sqrt{ad}.c\sqrt{ad}+\sqrt{bc}.d\sqrt{bc}\right)$

$\le(ac+bd+ad+bc)(ab^2c+a^2bd+ac^2d+bcd^2)$

$=(a+b)(c+d)(ab^2c+ab^2d+ac^2d+bcd^2)$

Tương tự $(abc+abd+acd+bcd)^2\le(bc+ad+ac+bd)(a^2bc+ab^2d+acd^2+bc^2d)$

$=(a+b)(c+d)(a^2bc+ab^2d+acd^2+bc^2d)$

Do đó $2(abc+abd+acd+bcd)^2\le(a+b)^2(c+d)^2(ab+cd)$

Tương tự ta có $2(abc+abd+acd+bcd)^2\le(a+c)^2(b+d)^2(ac+bd)$

$2(abc+abd+acd+bcd)^2\le(a+d)^2(b+c)^2(ad+bc)$

Do đó

$8(abc+abd+acd+bcd)^6\le(a+b)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+c)^2(b+d)^2(c+d)^2(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$

Nên ta cần chứng minh

$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)\ge 8(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$ (*)

Mà ta có $4(ab+cd)(ac+bd)\le(ab+cd+ac+bd)^2=(a+d)^2(b+c)^2$

Tương tự ta có $4(ac+bd)(ad+bc)\le(a+b)^2(c+d)^2$

$4(ab+cd)(ad+bc)\le(a+c)^2(b+d)^2$

$\Rightarrow 4^3(ab+cd)^2(ac+bd)^2(ad+bc)^2\le(a+b)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+c)^2(b+d)^2(c+d)^2$

Do đó (*) được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=t$

Bài 23: Cho $x,y,z>0$ CMR

$x^3(y^2+z^2)^2+y^3(z^2+x^2)^2+z^3(x^2+y^2)^2\ge xyz[xy(x+y)^2+yz(y+z)^2+zx(z+x)^2]$

(Zarathustra Brady,USA 2009)

Lời giải

□ Bđt này thì khó khăn đầu tiên của nó chính là bậc cao nên ta giảm bậc bằng cách đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ nên ta cần chứng minh $\sum a(b^2+c^2)^2\ge\sum a^3(b+c)^2$ (*)

(*) có hai cách chứng minh sau

Cách 1:

□ Ta có $\sum a(b^2+c^2)^2-\sum a^3(b+c)^2=\sum a(b-c)^2(b+c-a)^2\ge 0$

Do đó bđt được chứng minh

Cách 2:

□ Ta có $\sum a(b^2+c^2)^2-\sum a^3(b+c)^2=\sum[a^4(b+c)+a^2bc(b+c)-a^3(b+c)^2]$

$$=\sum_{cyc}a^2(b+c)(a-b)(a-c)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$

$a^2(b+c)(a-b)(a-c)+b^2(c+a)(b-c)(b-a)+c^2(a+b)(c-a)(c-b)$

$\ge b^2(c+a)(a-b)(a-c)+b^2(c+a)(b-c)(b-a)$

$=b^2(c+a)(a-b)[(a-c)-(b-c)]=b^2(c+a)(a-b)^2\ge 0$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$

▹ Nhận xét:ở cách làm 1 thì việc phân tích ra thành nhân tử như vậy là khó thấy nhưng nếu tinh ý thì sẽ nhận ra,còn ở cách làm 2 thì sự "trâu bò" khi nhân ra và nhóm lại với nhân tử $b+c$ đêm đến thành công khi sau khi ghép được dạng hoán vị và ta liên tưởng đến chứng minh schur và thành công trong việc chứng minh

Bài 24: Cho 3 số thực dương a,b,c

CMR $\dfrac{a+b}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\dfrac{b+c}{b\sqrt{c}+c\sqrt{b}}+\dfrac{c+a}{c\sqrt{a}+a\sqrt{c}}\ge\sqrt{3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi trường chuyên Lê Quý Đôn-Bình Định 2014-2015)

Lời giải

□ Việc ở vế trái $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ta thấy để vậy thêm "phiền" nên ta đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ge\sqrt{3(x+y+z)}$

Chuẩn hóa $x+y+z=3$ nên ta cần chứng minh $\sum\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ge 3$ (*)

2 cách giải chứng minh (*) sau đây là từ cuốn"sử dụng phương pháp cauchy-chwarz để chứng minh bđt"

Cách 1:

□ Ta có $VT_{(*)}\ge\dfrac{(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})}$

Ta cần chứng minh $(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2\ge 6(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2&=2(x+y+z)+2\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}\\&\ge 2(x+y+z)+2\sum(x+\sqrt{yz})\\&=3(x+y+z)+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=9+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $9+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ge 6(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$

Và điều này luôn đúng theo cauchy nên bđt được chứng minh

Cách 2:

□ Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$

Ta có $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}+\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

Nên bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sum\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\ge 3$

Mà $\sum\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\ge\frac{[(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{y}-\sqrt{z})+(\sqrt{x}-\sqrt{z})]^2}{4(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$

Mà $(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{z})\le 0$

$\Rightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2\ge(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{z})=\frac{3(x+y+z)-(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{2}$

Do đó ta cần chứng minh $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\frac{9-(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})}\ge 3$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}+\frac{9}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})}\ge 3$

Điều này luôn đúng theo cauchy nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét:một lần nữa việc đổi biến cho ta được bài toán quen thuộc hay những bài toán mà ta đã đọc hay làm và mình kết thúc phần II ở đây

III/IMO 2008,China 2004 và các bài toán liên quan

▲ Bđt IMO 2008 là một bài toán nhiều cách giải và có nhiều bài toán khá giống dạng của bài toán này và thường giải những bài toán kiểu này bằng cách đặt nguyên cái trong bình phương đó là ẩn

Bài 25:i)Cho $x,y,z\ne 1$ và $xyz=1$.CMR $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1$

ii)CMR đẳng thức đạt được tại vô số bộ (x,y,z) trong đó cả ba số đều là số hữu tỉ

(IMO 2008)

Lời giải

Như những ý tưởng ở phần I ta đưa đến hai cách giải sau cho phần i

Cách 1:

i)□ Đặt $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}$ thì ta cần chứng minh $\frac{a^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2}{(c-a)^2}\ge 1$

Ta có $\left[\sum\frac{a^2}{(a-b)^2}\right]\left[\sum(a-b)^2(a-c)^2\right]\ge\left[\sum a(a-c)\right]^2=\left(\sum a^2-\sum ab\right)^2$

Mà $\sum(a-b)^2(a-c)^2=\sum(a-b)^2(a-c)^2+2\sum(a-b)(a-c).(b-c)(b-a)$

$$=\left[\sum(a-b)(a-c)\right]^2=\left(\sum a^2-\sum ab\right)^2$$

Do đó bđt được chứng minh

ii)□ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{a-b}}{(a-b)(a-c)}=\frac{\frac{b}{b-c}}{(b-c)(b-a)}=\frac{\frac{c}{c-a}}{(c-a)(c-b)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(a-b)^2(a-c)}=\frac{b}{(b-c)^2(b-a)}=\frac{c}{(c-a)^2(c-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$$

Do đó ta chọn $(x,y,z)=\left(\frac{n}{(n+1)^2},-n(n+1),-\frac{n+1}{n^2}\right)$ với n là số hữu tỉ tùy ý

Do đó ta tìm được dấu bằng xảy ra với vô số bộ (x,y,z) trong đó cả ba số đều là số hữu tỉ

Cách 2:

□ Đặt $x=\frac{a^2}{bc}, y=\frac{b^2}{ca}, z=\frac{c^2}{ab}$

Bđt cần minh tương đương $\frac{a^4}{(a^2-bc)^2}+\frac{b^4}{(b^2-ca)^2}+\frac{c^4}{(c^2-ab)^2}\ge 1$

Ta có $\sum \frac{a^4}{(a^2-bc)^2}\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum (a^2-bc)^2}$

Ta cần chứng minh $(a^2+b^2+c^2)^2\ge \sum (a^2-bc)^2 \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2\ge 0$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

Từ $xyz=1$ thì ta liên tưởng đến những cách suy nghĩ như phần I và sau đây là cách đặt ẩn hay và xung quanh nó là nhiều bài toán liên quan với hình thức khá giống và các bài toán mở rộng

Cách 3:

□ Đặt $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1} \Rightarrow x=\frac{a}{a-1}, y=\frac{b}{b-1}, z=\frac{z}{z-1}$

Ta có $xyz=1 \Rightarrow abc=(a-1)(b-1)(c-1) \Leftrightarrow a+b+c-ab-bc-ca=1$

Ta cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2\ge 1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 2(a+b+c-ab-bc-ca)-1 \Leftrightarrow (a+b+c-1)^2\ge 0$$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

▹ Nhận xét:một bài toán tuy nhìn khá khác nhưng cách giải hoàn toàn giống cách 3 ở trên

Cho a,b,c là 3 số thực thỏa $abc=1$

CMR $\frac{a+3}{(a-1)^2}+\frac{b+3}{(b-1)^2}+\frac{c+3}{(c-1)^2}\ge \frac{47}{16}$ (Nguyễn Đình Thi)

Bài 26:Với a,b,c,k là các số thực

CMR $\left(\frac{a}{a-kb}\right)^2+\left(\frac{b}{b-kc}\right)^2+\left(\frac{c}{c-ka}\right)^2+\frac{2(1-k^3)abc}{(a-kb)(b-kc)(c-ka)}\ge 1$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

□ Đặt $x=\frac{a}{a-kb}, y=\frac{b}{b-kc}, z=\frac{c}{c-ka}$

Ta có $(1-x)(1-y)(1-z)=-k^3xyz \Leftrightarrow (1-k^3)xyz=1-x-y-z+xy+yz+zx$

Ta có $x^2+y^2+z^2+2(1-k^3)xyz=(x+y+z-1)^2+1\ge 1$

Do đó có điều phải chứng minh
▹ Nhận xét:với $k=1$ thì chính là ở cách 1 của bài IMO 2008 và với cách đặt hết trong bình phương đã đem đến thành công

Bài 27:Với a,b,c đôi một khác nhau

CMR $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\geq 2$ (Đào Hải Long)

Lời giải

□ Đặt $x=\frac{a}{b-c},y=\frac{b}{c-a},z=\frac{c}{a-b}$

Ta có $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)\Leftrightarrow xy+yz+zx=-1$

Ta có $(x+y+z)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx)=2$

Do đó bđt được chứng minh
▹ Nhận xét:1 bài toán tổng quát và 1 bài toán chặt hơn của bài toán trên như sau
Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau

1,Với k là số thực bất kì.CMR $\left(\frac{a+k}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b+k}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c+k}{a-b}\right)^2\geq 2$ (Trần Quốc Anh)

2,$\sum\left(\frac{a}{b-c}\right)^2\geq\frac{3}{4}.\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}-1$ (Võ Quốc Bá Cẩn)

Bài 28: Cho a,b,c đôi một khác nhau

CMR $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\geq 2$

Lời giải

□ Đặt $x=\frac{a+b}{a-b},y=\frac{b+c}{b-c},z=\frac{c+a}{c-a}$

Ta có $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)\Leftrightarrow xy+yz+zx=-1$

Ta có $(x+y+z)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx)=2$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi

$\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}=-1\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$

▹ Nhận xét:từ các bài toán trên sau khi biến đổi ta có được các bdt sau
Cho a,b,c là ba số thực phân biệt khác nhau

1)CMR $\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{bc}{(b-c)^2}+\frac{ca}{(c-a)^2}\geq\frac{-1}{4}$ (Đào Hải Long)

2)CMR $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$ (Đào Hải Long)

3)CMR $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3}\geq\frac{9}{4}$

4)Với $k\ge 0$ .CMR $\frac{a^2+kbc}{(\mathrm{b-c})^2}+\frac{b^2+kca}{(c-a)^2}+\frac{c^2+kab}{(a-b)^2}\ge\frac{8-k}{4}$ (Trần Quốc Anh)

▲Bđt China 2004 là một bài toán khá hay bởi nhiều cách giải,mở rộng và có nhiều bài toán sau khi biến đổi sẽ được bài toán này

Bài 29: Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$ (China 2004)

Lời giải

□ Ta có $\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>\sum_{cyc}\frac{a}{a+b}>\sum\frac{a}{a+b+c}=1$

Chứng minh vế đầu khá đơn giản và chứng minh vế sau mình đưa ra 3 cách giải như sau

Cách 1:

□ Ở vế sau thì sự hoán vị làm nghĩ đến việc đặt nhưng đặt sao cho phù hợp thì ta làm mất tử đã ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$

Tới đây thì còn gì nữa đặt thôi,đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}\Rightarrow xyz=1$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\max\{x,y,z\}\Rightarrow z\ge 1,xy\le 1$

Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\le\frac{2}{1+xy}+\frac{2}{1+xy}=\frac{4}{1+xy}$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+xy}}=\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}}$ Mà $\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le\frac{2}{1+z}$

Do đó ta chứng minh $2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}\le 3\Leftrightarrow(\sqrt{2z}-\sqrt{z+1})^2\ge 0$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

Ngoài cách làm với ý tưởng như phần I ở trên ta đi đến 2 cách làm trực tiếp sau

Để cho dễ nhìn ta đặt $x=a^2,y=b^2,z=c^2$ nên ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Cách 2:

□ $\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x}{x+y}}\right)^2\le\left[\sum(x+z)\right]\left[\sum\frac{x}{(x+y)(x+z)}\right]=\frac{4(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Do đó ta cần chứng minh $(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Điều này luôn đúng do

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Do đó bđt được chứng minh

Cách 3:

□ Ta có

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}} = \sqrt{\frac{3x(y+z)}{2(xy+yz+zx)}.\frac{4(xy+yz+zx)}{3(x+y)(y+z)}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{3x(y+z)}{2(xy+yz+zx)} + \frac{4(xy+yz+zx)}{3(x+y)(y+z)}\right]$$

Tương tự với $\sqrt{\frac{2y}{y+z}}$ và $\sqrt{\frac{2z}{z+x}}$ cộng lại ta được

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2x}{x+y}} \leq \frac{1}{2}\left[3 + \frac{8(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right] \leq \frac{3}{2}$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét:bài toán mở rộng của bài toán trên là khá nhiều,mình đưa ra hai dạng sau

1,Với a_1, a_2, a_3 là 3 số thực dương

CMR $\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_2{}^n + a_3{}^n}} + \frac{a_3}{\sqrt[n]{a_3{}^n + a_1{}^n}} \leq \frac{3}{\sqrt[n]{2}}$

2,Với $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_{n+1} > 0$

CMR $\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n}} + ... + \frac{a_{n+1}}{\sqrt[n]{a_{n+1}{}^n + a_1{}^n}} \leq \frac{n+1}{\sqrt[n]{2}}$

Bài 30: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=1$

CMR $\frac{x}{x^2+3} + \frac{y}{y^2+3} + \frac{z}{z^2+3} \leq \frac{3}{4}$

Lời giải

Hình thức thế này ta liên tưởng đến 1 bài khá tương tự ở phần II là bài 16 nhưng cách giải đó không đến thành công nên ta hãy nghĩ đến cách đổi biến như phần I

□ Đối xứng thế này thì đặt $(x,y,z) \to (\frac{a^2}{bc}, \frac{b^2}{ca}, \frac{c^2}{ab}), (\frac{bc}{a^2}, \frac{ca}{b^2}, \frac{ab}{c^2})$ nhưng khi thay vào sẽ chẳng có hướng làm nào rộng mở nên ta đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{ab}{a^2+3b^2} + \frac{bc}{b^2+3c^2} + \frac{ca}{c^2+3a^2} \leq \frac{3}{4}$

Ta có $\frac{ab}{a^2+3b^2} \leq \frac{ab}{2\sqrt{(a^2+b^2)2b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}$

Nên ta cần chứng minh $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$ và điều này luôn đúng theo bài toán China 2004 nên ta có bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài 31: Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $xyz=1$

CMR $\frac{1}{(x+1)^2(y+z)}+\frac{1}{(y+z)^2(z+x)}+\frac{1}{(z+x)^2(x+y)} \le \frac{3}{8}$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

Hình thức đẹp mắt nhưng khá rối nên ta sẽ làm mất dần các biến ở mỗi phân thức lại

□ Ta có $(x+1)^2 = x^2+1+2x \ge 2\sqrt{2x(x^2+1)}, y+z \ge 2\sqrt{yz}$

Do đó $\sum\frac{1}{(x+1)^2(y+z)} \le \sum\frac{1}{4\sqrt{2xyz(x^2+1)}} = \frac{1}{4\sqrt{2(x^2+1)}}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$

Và bđt này được chứng minh ở cách 1 của bài China 2004
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

▹ Nhận xét:một lần nữa ta lại thấy việc biến đổi và rút gọn đã khiến những bài toán dường như rắc rối nhưng lại đem đến thành công và sau đây là 3 bài sau khi biến đổi sẽ được bài toán bđt ở China 2004 và cũng là kết thúc phần III

Cho a,b,c là 3 số thực dương

1,CMR $\sqrt{\frac{8ab^2}{(a+b)^3}}+\sqrt{\frac{8bc^2}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{8ca^2}{(c+a)^3}} \le 3$

2,CMR $\left[\frac{8ab^2}{(a+b)^3}\right]^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{8bc^2}{(b+c)^3}\right]^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{8ca^2}{(c+a)^3}\right]^{\frac{3}{2}} \le 3$

3,CMR $\left(\frac{2ab^2}{a^3+b^3}\right)^{\frac{9}{2}}+\left(\frac{2bc^2}{b^3+c^3}\right)^{\frac{9}{2}}+\left(\frac{2ca^2}{c^3+a^3}\right)^{\frac{9}{2}} \le 3$

IV/ Đổi biến sau khi sắp xếp thứ tự

▲Việc đổi biến sau khi sắp xếp thụ tự là một dạng hay và lạ bởi dấu bằng và phương pháp giải,sau đây là những bài toán từ cuốn “sử dụng AM-GM để chứng minh bđt” và các bài toán khác mình có được,ở phần này chủ yếu là biết được ở hai cách đặt

$\begin{cases} x=a-b \\ y=b-c \end{cases}$ và $x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2}$ từ đó giúp ta liên tưởng đến các bài toán tương tự

Bài 32: Cho a,b,c là 3 số thực đôi một phân biệt nhau

CMR $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right] \ge \frac{27}{4}$

Lời giải

Hình thức đối xứng thế này nhưng sau khi biến đổi ta thấy bài toán này không thể dùng trực tiếp bđt nào được do đó ta nghĩ đến việc giảm biến

□ Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$,đặt $a=c+x,b=c+y\Rightarrow x,y>0;x\neq y$

Do đó ta cần chứng minh $(x^2-xy+y^2)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}\right)\geq\dfrac{27}{4}$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1>1$ thì ta cần chứng minh $\dfrac{4t^3}{t-1}\geq 27\Leftrightarrow(2t-3)^2(t+3)\geq 0$

Do đó bđt được chứng minh

Bài 33: Cho a,b,c là 3 số thực đôi một phân biệt nhau

CMR $(a^2+b^2+c^2)\left[\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}\right]\geq\dfrac{9}{2}$ (Đào Hải Long)

Lời giải

Bài toán này đã được nhắc đến ở phần III nhưng ta hãy cùng xem xét lời giải thú vị sau

□ Ta có $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}$

Do đó ta cần chứng minh

$$\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\geq\frac{27}{2}$$

Đến đây thì được bài trên và sau đây là 1 cách giải khác

Không mất tính tổng quát giả sử $a>b>c$

Đặt $x=a-b,y=b-c$ do đó $c-a=-(x+y)$ với $x,y>0$

Do đó ta cần chứng minh $(x^2+xy+y^2)\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]\geq\dfrac{27}{4}$

Ta có $x^2+xy+y^2\geq\dfrac{3}{4}(x+y)^2,\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\geq\dfrac{8}{(x+y)^2}$

$$\Rightarrow(x^2+xy+y^2)\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]\geq\frac{3}{4}(x+y)^2.\frac{9}{(x+y)^2}\geq\frac{27}{4}$$

Do đó bđt được chứng minh

Bài 34: Cho a,b,c là 3 số thực đôi một phân biệt nhau

$$\frac{1}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}+\frac{1}{(c-a)^4}\geq\frac{99}{8\left[(a^2+b^2+c^2)^2+2(ab+bc+ca)^2\right]}$$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

Hình thức "ảo diệu" và một phần nào đó tương tự các bài trên nên ta đi đến hướng làm tương tự bài trên

□ $3\left[(a^2+b^2+c^2)^2+2(ab+bc+ca)^2\right]=(a+b+c)^4+\sum(a-b)^4\geq\sum(a-b)^4$

Do đó ta cần chứng minh $\left[\sum(a-b)^4\right]\left[\sum\frac{1}{(a-b)^4}\right]\geq\frac{297}{8}$

Không mất tính tổng quát giả sử $a>b>c$

Đặt $x=a-b, y=b-c$ do đó $c-a=-(x+y)$ với $x,y>0$

Do đó ta cần chứng minh $\left[x^4+y^4+(x+y)^4\right]\left[\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x+y)^4}\right]\geq\frac{297}{8}$

Ta có $x^4+y^4\geq\frac{(x+y)^4}{8},\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}\geq\frac{32}{(x+y)^4}$

$\Rightarrow\left[x^4+y^4+(x+y)^4\right]\left[\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x+y)^4}\right]\geq\frac{9(x+y)^4}{8}.\frac{33}{(x+y)^4}=\frac{297}{8}$

Do đó bđt được chứng minh

Bài 35: Cho $x,y,z\geq 0$ đôi một phân biệt khác nhau

CMR $(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right]\geq 4$ (Trần Nam Dũng,VMO 2008)

Lời giải

□ Không mất tính tổng quát giả sử $x>y>z$

Đặt $x-y=a, y-z=b\Rightarrow z-x=-(a+b)$ (với $x,y,z>0$)

Ta có $xy+yz+zx\geq xy=(z+a+b)(z+b)\geq(a+b)b$

Do đó ta cần chứng minh $b(a+b)\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]\geq 4$

$\Leftrightarrow\frac{b(a+b)}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a+b}\geq 3$

Đặt $t=\frac{a}{b}>0$ thì ta chứng minh $\frac{t+1}{t^2}+t+\frac{1}{t+1}\geq 3\Leftrightarrow(t^2-t-1)^2\geq 0$

Điều này luôn đúng do đó bđt được chứng minh

Bài 36: Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=2$

CMR $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\leq 2$

Lời giải

Cách giải sau đây đầy tính ảo diệu và không tự nhiên nhưng từ nó ta lại học thêm được vài điều từ phương pháp đặt và khiến ta liên tưởng đến cách này ở các bài toán khác

□ Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$

Do đó $b^2+c^2\leq\left(b+\frac{c}{2}\right)^2,a^2+c^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2,a^2+b^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$

Tới đây thì đặt ẩn phụ quá rõ ràng,đặt $x=a+\frac{c}{2},y=b+\frac{c}{2}\Rightarrow x+y=2$

Do đó ta cần chứng minh $x^2y^2(x^2+y^2)\leq 2$

Ta có $x^2y^2(x^2+y^2)=\frac{1}{2}xy.2xy(x^2+y^2)\le\frac{1}{2}.\frac{(x+y)^2}{4}.\frac{(2xy+x^2+y^2)^2}{4}=2$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1,c=0$ và các hoán vị

Bài 37: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $ab+bc+ca>0$

CMR $\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\ge\frac{10}{(a+b+c)^2}$

Lời giải

Việc xuất hiện $b^2+c^2,c^2+a^2,a^2+b^2,a+b+c$ và dấu bằng xảy ra khi hai cái bằng nhau và một cái bằng 0 làm ta liên tương đến bài trên

□ Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$,đặt $x=a+\frac{c}{2},y=b+\frac{c}{2}$

Ta có $a^2+c^2\le x^2,b^2+c^2\le y^2,a^2+b^2+c^2\le x^2+y^2$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\ge\frac{10}{(x+y)^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x^2+y^2)}{4x^2y^2}+\left(\frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\ge\frac{10}{(x+y)^2}$$

Mà $\frac{3(x^2+y^2)}{4x^2y^2}\ge\frac{6}{4xy}\ge\frac{6}{(x+y)^2}$ và $\frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\ge\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b,c=0$ và các hoán vị

Bài 38: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $ab+bc+ca>0$

CMR $\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{11}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{32}{(a+b+c)^2}$ (Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

□ Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$,đặt $x=a+\frac{c}{2},y=b+\frac{c}{2}$

Ta có $a^2+c^2\le x^2,b^2+c^2\le y^2,a^2+b^2\le a^2+b^2+c^2\le x^2+y^2$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{11}{x^2+y^2}\ge\frac{32}{(x+y)^2}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}+\frac{4}{x^2+y^2}\right)+\frac{8}{x^2+y^2}\ge\frac{32}{(x+y)^2}\qquad(*)$$

Ta có $VT_{(*)}\ge 4\left(\frac{1}{xy}+\frac{2}{x^2+y^2}\right)\ge\frac{4.2.4}{2xy+(x^2+y^2)}=\frac{32}{(x+y)^2}$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b,c=0$ và các hoán vị

Bài 39: Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa $ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=2$

CMR $\dfrac{\sqrt[4]{b^2+6bc+c^2}}{b+c}+\dfrac{\sqrt[4]{c^2+6ca+a^2}}{c+a}+\dfrac{\sqrt[4]{a^2+6ab+b^2}}{a+b} \ge 2+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

□ Ta có $(a^2+6ab+b^2)(a^2+b^2)=(a+b)^2(a^2+b^2)+4ab(a^2+b^2)$

$$\ge (a+b)^2(a^2+b^2)+4ab.\frac{(a+b)^2}{2}=(a+b)^4$$

$$\Rightarrow \sum \frac{\sqrt[4]{a^2+6ab+b^2}}{a+b} \ge \sum \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}$$

Đến đây thì ta thấy được sự liên quan rồi

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$,đặt $x=a+\dfrac{c}{2}, y=b+\dfrac{c}{2}$

Ta có $\sqrt[4]{b^2+c^2} \le \sqrt{x}, \sqrt[4]{a^2+c^2} \le \sqrt{y}, \sqrt[4]{a^2+b^2} \le \sqrt[4]{x^2+y^2}$

Do đó ta cần chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \ge 2+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ với $x+y=2$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \ge \dfrac{2}{\sqrt[4]{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2xy}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right)+\left(2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{2xy(x^2+y^2)}}}+\left(2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$$

$$\ge 2.\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1, c=0$ hoặc các hoán vị

Bài 40: Cho a,b,c,d là 4 số không âm

CMR $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+d^2}+\dfrac{1}{c^2+d^2+a^2}+\dfrac{1}{d^2+a^2+b^2} \ge \dfrac{12}{(a+b+c+d)^2}$

Lời giải

Bài toán này nhìn có vẻ "choáng" bởi có bốn biến nhưng ta nhận thấy nó tương tự với các bài trên nhưng chỉ là thêm biến mà thôi nên cách làm tương tự sẽ đi đến thành công

□ Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$

Ta có $\left(a+\dfrac{c+d}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{c+d}{2}\right)^2-(a^2+b^2+c^2)=\dfrac{[2(a+b)+c+d](c+d)}{2}-c^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{d^2+a^2+b^2} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$

Mà $\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2-(c^2+d^2+a^2)=a(c+d)-c^2-d^2+\frac{(c+d)^2}{4} \ge 0$

$\Rightarrow \frac{1}{c^2+d^2+a^2} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2}$ .Tương tự ta có $\frac{1}{d^2+a^2+b^2} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$

Đặt $x=a+\frac{c+d}{2}, y=b+\frac{c+d}{2}$ thì ta cần chứng minh $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x^2+y^2} \ge \frac{12}{(x+y)^2}$

Ta có $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x^2+y^2} \ge \frac{2}{xy}+\frac{2}{x^2+y^2}=2\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\frac{1}{xy}$

$$\ge \frac{8}{(x+y)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}=\frac{12}{(x+y)^2}$$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b>0, c=d=0$ và các hoán vị

▹ Nhận xét:bài toán tổng quát của bài toán trên là
Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa $a+b+c+d=2$ với $n \ge 2$

Tìm GTNN $\frac{1}{a^n+b^n+c^n}+\frac{1}{b^n+c^n+d^n}+\frac{1}{c^n+d^n+a^n}+\frac{1}{d^n+a^n+b^n}$

V/Đặt ẩn ở mẫu và đặt ẩn qua ba cạnh của tam giác

▲Đặt ẩn ở mẫu là một hình thức đặt khi thấy hình thức bài toán rắm rối nhằm giúp giảm ẩn ở mẫu vì có nhiều ẩn ở mẫu thường làm ta có cảm giác "ngán"

Bài 41: Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác

Tìm GTNN $P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{a+c-b}+\frac{16c}{a+b-c}$

(Đề thi vào Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội 2002-2003)

Lời giải

Nhìn các số $4,9,16$ làm cho ta hơi ngán mà các mẫu lại giống nhau nên ta đặt ẩn ở mẫu để làm giảm sự khó khăn đi

□ Đặt $\begin{cases} b+c-a=x \\ a+c-b=y \\ c+b-a=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y+z \\ 2y=x+z \\ 2z=x+y \end{cases}$

Do đó

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{4(y+z)}{x}+\frac{9(x+z)}{y}+\frac{16(x+y)}{z}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{16x}{z}\right)+\left(\frac{9z}{y}+\frac{16y}{z}\right)\right]\geq 26$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{7c}{5},b=\frac{6c}{5}$

▷ Nhận xét:một cách làm khác có phần nhanh hơn là sử dụng cauchy-schwarz bằng cách thêm bớt như sau

□ $2P=\left(\frac{8a}{b+c-a}+4\right)+\left(\frac{18b}{a+c-b}+9\right)+\left(\frac{32c}{a+b-c}+16\right)-29$ (phần còn lại bạn đọc tự làm)

Bài 42: Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $\frac{a+3c}{a+b}+\frac{c+3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}\geq 6$

Lời giải

Hình thức ở mẫu đối xứng mà tử chả ra sao thế này thì ta đặt ở mẫu là lí tưởng nhất

□ Đặt $\begin{cases}a+b=x\\b+c=y\\c+a=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{x+z-y}{2}\\b=\frac{x+y-z}{2}\\c=\frac{y+z-x}{2}\end{cases}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{y+2z}{x}+\frac{x+2z}{y}+\frac{2(x+y)}{z}\geq 10$ (*)

Ta có $VT_{(*)}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{2z}{y}+\frac{2y}{z}\right)\geq 10$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{b}{3}=c$

▷ Nhận xét:một cách làm khác có sử dụng kĩ thuật thêm bớt được làm như sau

□ $VT=\left(\frac{a+3c}{a+b}+2\right)+\left(\frac{c+3a}{b+c}+2\right)+\left(\frac{4b}{c+a}+6\right)-10$ (phần còn lại bạn đọc tự chứng minh) cách làm trên có vẽ không nhanh bằng cách này nhưng cách này cần sử dụng chút kĩ thuật và cách làm trên có thể nói là "làm không cần suy nghĩ"

Bài 43: Cho a,b,c là 3 số thực dương

Tìm GTNN của $P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$

(Đề thi học sinh giỏi tỉnh Kiên Giang 2014-2015)

Lời giải

Một hình thích choáng khi nhìn vào bài toán có thể khiến ta "hoảng" và hướng đầu tiên là sử dụng cauchy để đoán điểm rơi nhưng hướng này có thể nói là vô vọng khi không biết nhân thể nào khi có dấu $-$ ở kia do đó ta nghĩ đến cách tiếp theo chính là đặt ẩn ở mẫu bởi ở đây cũng chỉ là bậc nhất nên thay vào cũng "không có gì ghê gớm"

□ Đặt $\begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = a + b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5y - x - 3z \\ b = z + x - 2y \\ c = z - y \end{cases}$

Do đó $P = \dfrac{(5y - x - 3z) + 3(z - y)}{x} + \dfrac{4(z + x - 2y)}{y} - \dfrac{8(z - y)}{z}$

$$= 2\left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4\left(\frac{2y}{z} + \frac{z}{y}\right) - 17 \ge 12\sqrt{2} - 17$$

Dấu bằng xảy ra khi $b = (1 + \sqrt{2})a, c = (4 + 3\sqrt{2})a$

Bài 44: Cho x, y, z là 3 số thực dương

CMR $\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y} \ge \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2}\right)$

Lời giải

Đây là bài toán chặt hơn của $\sum \dfrac{x^2}{y+z} \ge \dfrac{x+y+z}{2}$ và với hình thức VP nhìn có vẻ rối như vậy thì ta cứ đặt từng cái ở VP là ẩn để nhìn bớt cồng kềnh

□ Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+y^2} \\ b = \sqrt{y^2+z^2} \\ c = \sqrt{z^2+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ b^2 = y^2 + z^2 \\ c^2 = z^2 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ y^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ z^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \end{cases}$

Mà $y + z \le \sqrt{2(y^2 + z^2)} = b\sqrt{2}, z + x \le c\sqrt{2}, x + y \le a\sqrt{2}$

Do đó ta cần chứng minh $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{b}\right) \ge \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(a + b + c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} + \dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{b} \ge 2(a + b + c)$

Mà $\dfrac{a^2}{b} + b \ge 2a$ mấy cái khác tương tự cộng lại thì bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

Bài 45: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác

CMR $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\geq\sqrt{\frac{3}{ab+bc+ca}}$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

Đây là một bđt "khó xơi" khi ta sử dụng cauchy hay cauchy-schwarz một cách trực tiếp không được gì cả,nhận thấy ở VT các đại lượng hoán vị nên ta sẽ làm cho nó đối xứng bằng cách đặt ẩn

□ Đặt $\begin{cases} a+2b=x \\ b+2c=y \\ c+2a=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3a+b-c}{2} \\ y=\frac{3b+c-a}{2} \\ z=\frac{3c+a-b}{2} \end{cases}$ $(x,y,z>0)$

Do đó bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{9}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}}$

Tới đây cái căn làm ta "gai" và chả biết sử lí thế nào nên ta đành bình phương lên nên bđt

$\Leftrightarrow \sum\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{4(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{81}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$

Theo bđt Iran 96(được chứng minh ở bài 9) thì ta chỉ cần chứng minh

$\frac{9}{4(xy+yz+zx)}+\frac{4(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{81}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$

Hình thức có vẻ nhiều vậy nên ta chuẩn hóa để làm giảm mất các biến

Đặt $x+y+z=p, xy+yz+zx=q, xyz=r$ và chuẩn hóa $p=1$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{9}{4q}+\frac{4}{q-r}\geq\frac{81}{1+9q}$

Mà theo schur thì $p^3+9r\geq 4pq \Leftrightarrow r\geq\frac{4q-1}{9}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{9}{4q}+\frac{36}{5q+1}\geq\frac{81}{1+9q}\Leftrightarrow(3q-1)^2\geq 0$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét:cách làm trên là được kết hợp từ nhiều kinh nghiệm là đặt ẩn,biết về Iran 96,sử dụng pqr (sẽ được nói ở phần VII)

▲Ở các bài toán khi điều kiện là 3 cạnh của tam giác thì ta hoàn toàn có thể đặt

$\begin{cases} a=y+z \\ b=z+x \\ c=x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-a=x \\ p-b=y \\ p-c=z \end{cases}$ (với p là nửa chu vi tam giác)

Bài 46: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác và S là diện tích của nó

CMR $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$ (IMO 1961)

Lời giải

Việc có a,b,c và S thì làm ta liên tưởng đến Herong và làm ta thấy liên quan đến 2 cách đặt trên

Cách 1:

□ Đặt $a=x+y,b=y+z,c=z+x$ (với $x,y,z>0$)

Ta có $(a^2+b^2+c^2)^2=\left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right]^2\geq 16(yz+zx+xy)^2$

$$\geq 16.3xyz(x+y+z)=48S^2$$

Do đó bđt được chứng minh

Cách 2:

□ Đặt $p-a=x,p-b=y,p-c=z\Rightarrow x+y+z=p$

Ta có $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z)$

$$\geq\sqrt{3(x+y)(y+z)(z+x)\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]}$$

$$\geq\sqrt{3.8xyz(x+y)(y+z)(z+x)}=4\sqrt{3}S$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét:bài toán này là một bài toán hay bởi có nhiều cách giải (thường là xung quanh sử dụng herong,lượng giác,vẽ hình) và có nhiều mở rộng mình đưa ra hai mở rộng như sau

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác và S là diện tích của nó

1,Với mọi n nguyên

CMR $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}\geq 3\left(\dfrac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n+\left[(a-b)^{2n}+(b-c)^{2n}+(c-a)^{2n}\right]$

2,Với mọi x,y,z là 3 số thực dương

CMR $\dfrac{x}{y+z}a^2+\dfrac{y}{z+x}b^2+\dfrac{z}{x+y}c^2\geq 2\sqrt{3}S$

Bài 47: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác

CMR $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$ (IMO 1983)

Lời giải

Một bđt thì cho ta liên tưởng đến sử dụng bđt hoán vị nhưng bđt này thì cần phải chứng minh lại và mình cũng không thích dùng cái bđt này lắm ,ta đi đến cách khác là từ ba cạnh tam giác ,cái điều kiện này có ý nghĩa gì vậy ta đặt như trên

□ Đặt $a=x+y,b=y+z,c=z+x$ (với $x,y,z>0$)

Do đó cần chứng minh $xy^3+yz^3+zx^3\geq xyz(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$$

Mà ta có $\dfrac{x^2}{y}+y\geq 2x$ mấy cái kia tương tự cộng lại thì bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

▹ Nhận xét:như đã nói ở trên thì bđt này có thể sử dụng bđt hoán vị và sử dụng như sau

□ Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Giả sử $a \ge b \ge c$ thì ta chứng minh được $\begin{cases} bc \le ac \le ab \\ a^2+bc \ge b^2+ca \ge c^2+ab \end{cases}$

Do đó theo bđt hoán vị thì ta có

$bc(a^2+bc)+ca(b^2+ca)+ab(c^2+ab) \le bc(b^2+ca)+ca(c^2+ab)+ab(a^2+bc)$

$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le a^3b+b^3c+c^3a$

Do đó bđt được chứng minh

Bài 48: Cho a,b,c là ba cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác

CMR $a\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}+b\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{ca}}+c\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}} \ge p$ (Moldova 2006)

Lời giải

Ba cạnh tam giác và $p-a, p-b, p-c$ làm ta liên tưởng đến cách đặt một cách rõ ràng

□ Đặt $p-a=x, p-b=y, p-c=z \Rightarrow x+y+z=p$

Ta cần chứng minh $\sum (y+z)\sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}} \ge x+y+z$

$$\sum (y+z)\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} = \sum \frac{(y+z)\sqrt{yz(x+y)(x+z)}}{(x+y)(x+z)} \ge \sum \frac{(y+z)\sqrt{yz}(x+\sqrt{yz})}{(x+y)(x+z)}$$

$$= \sum \frac{yz(y+z)+x(y+z)\sqrt{yz}}{(x+y)(x+z)} \ge \sum \frac{yz(y+z)+2xyz}{(x+y)(x+z)}$$

$$= \sum \left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{z+x}\right) = x+y+z$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

Bài 49: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác

CMR $\left|\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}\right| < \dfrac{1}{16}$ (Iberoamerica 1989)

Lời giải

□ Ta có $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Do đó ta cần chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a) > 16|(a-b)(b-c)(c-a)|$

Tới đây thì việc đặt ẩn được làm rõ hơn bởi $a-b, b-c, c-a$ sẽ làm mất bớt biến

Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$

Do đó ta cần chứng minh $(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) > 16|(x-y)(y-z)(z-x)|$

Tới đây thì cách thường làm là ta sẽ làm mất một biến và để lại hai biến

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z$

Ta có $(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) > (2x+y)(2y+x)(x+y)$

$|(x-y)(y-z)(z-x)| = (x-y)(y-z)(x-z) < xy(x-y)$

Do đó ta cần chứng minh $(2x+y)(2y+z)(x+y)>16xy(x-y)$

Ta có $(2x+y)(2y+z)=2(x-y)^2+9xy\geq 6\sqrt{2xy}(x-y)$

$\Rightarrow (2x+y)(2y+x)(x+y)\geq 6\sqrt{2xy}(x-y)(x+y)\geq 12\sqrt{2}xy(x-y)>16(x-y)$

Do đó bđt được chứng minh

▹ Nhận xét:mấu chốt của bài này là ở đẳng thức

$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ và phần còn lại đến một cách tự nhiên qua các bài toán mà ta đã gặp qua quá trình học,việc sử dụng đẳng thức trên còn có thể sử dụng ở bài sau

Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $\left|\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}+\frac{b^3-c^3}{b^3+c^3}+\frac{c^3-a^3}{c^3+a^3}\right|\leq\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4}$ (Moldova 2004)

Bài 50: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác

CMR $\frac{a}{\sqrt{5a^2+13bc}}+\frac{b}{\sqrt{5b^2+13ca}}+\frac{c}{\sqrt{5c^2+13ab}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Việc có căn như thế này làm ta liên tưởng đến sử dụng bđt holder

□ Ta có $\left(\sum\frac{a}{\sqrt{5a^2+13bc}}\right)^2\left[\sum a(5a^2+13bc)\right]\geq(a+b+c)^3$

Do đó ta cần chứng minh

$2(a+b+c)^3\geq\sum a(5a^2+13bc)\Leftrightarrow 2\sum ab(a+b)\geq a^3+b^3+c^3+9abc$

Đến đây thì ta sử dụng điều kiện a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thôi

Đặt $a=y+z,b=z+x,c=x+y$

Do đó bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

Đây là bđt schur nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

VI/ Từ một đẳng thức

▲Ở đây là ta nói đến đẳng thức

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(b+a)(c+a)}+\frac{ca}{(c+b)(c+a)}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1$$

Ta có các phép biến đổi sau

$1, ab+bc+ca+2abc=1\Leftrightarrow a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y}$

$2, ab+bc+ca+abc=4\Leftrightarrow a=\frac{2x}{y+z},b=\frac{2y}{z+x},c=\frac{2z}{x+y}$

$$3, a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}, b=\dfrac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{(y+x)(z+x)}}, c=\dfrac{2\sqrt{zx}}{\sqrt{(z+y)(x+y)}} \\ a=\dfrac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b=\dfrac{2y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c=\dfrac{2z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \end{array}\right.$$

$$4, a^2+b^2+c^2+2abc=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}, b=\dfrac{\sqrt{yz}}{\sqrt{(y+x)(z+x)}}, c=\dfrac{\sqrt{zx}}{\sqrt{(z+y)(x+y)}} \\ a=\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b=\dfrac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c=\dfrac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \end{array}\right.$$

(với $x, y, z \geq 0$ và $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$)

Việc chứng tỏ các phép biến đổi trên là đúng thì ta giải thích như sau

1,

□ $ab+bc+ca+2abc=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=1$

Đặt $x=\dfrac{a}{a+1}, y=\dfrac{b}{b+1}, z=\dfrac{c}{c+1} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{y+z}{x}, \dfrac{1}{b}=\dfrac{z+x}{y}, \dfrac{1}{c}=\dfrac{x+y}{z}$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{x}{y+z}, b=\dfrac{y}{z+x}, c=\dfrac{z}{x+y}$

2,

□ $ab+bc+ca+abc=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1$

Tương tự như trên được $\dfrac{1}{a+2}=\dfrac{y+z}{2(x+y+z)}, \dfrac{1}{b+2}=\dfrac{z+x}{2(x+y+z)}, \dfrac{1}{c+2}=\dfrac{x+y}{2(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{2x}{y+z}, b=\dfrac{2y}{z+x}, c=\dfrac{2z}{x+y}$

3,

□ Đặt $m=\dfrac{2a}{bc}, n=\dfrac{2b}{ca}, p=\dfrac{2c}{ab} \Rightarrow a=\dfrac{2}{\sqrt{np}}, b=\dfrac{2}{\sqrt{pm}}, c=\dfrac{2}{\sqrt{mn}}$

Từ $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Rightarrow m+n+p+2=mnp \Rightarrow \dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{p+1}=1$

Do đó $m=\dfrac{x}{y+z}, n=\dfrac{y}{z+x}, p=\dfrac{z}{x+y}$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b=\dfrac{2\sqrt{zx}}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$

Đặt $x'=\sqrt{\dfrac{yz}{x}}, y'=\sqrt{\dfrac{zx}{y}}, z'=\sqrt{\dfrac{xy}{z}} \Rightarrow x=y'z', y=z'x', z=x'y'$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{2x'}{\sqrt{(x'+y')(y'+z')}}, b=\dfrac{2y'}{\sqrt{(y'+z')(y'+x')}}, c=\dfrac{2z'}{\sqrt{(z'+x')(z'+y')}}$

4,

□ Đặt $m=\frac{a}{bc},n=\frac{b}{ca},p=\frac{c}{ab}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{np}},b=\frac{1}{\sqrt{pm}},c=\frac{1}{\sqrt{mn}}$

Từ $a^2+b^2+c^2+2abc=1\Rightarrow m+n+p+2=mnp\Rightarrow \frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$

Do đó $m=\frac{x}{y+z},n=\frac{y}{z+x},p=\frac{z}{x+y}$

$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{(x+y)(x+z)}},b=\frac{\sqrt{zx}}{\sqrt{(y+z)(y+x)}},c=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}$

Đặt $x'=\sqrt{\frac{yz}{x}},y'=\sqrt{\frac{zx}{y}},z'=\sqrt{\frac{xy}{z}}\Rightarrow x=y'z',y=z'x',z=x'y'$

$\Leftrightarrow a=\frac{x'}{\sqrt{(x'+y')(x'+z')}},b=\frac{y'}{\sqrt{(y'+z')(y'+x')}},c=\frac{z'}{\sqrt{(z'+x')(z'+y')}}$

▲Nếu nhìn thấy các biến đổi trên là điều kiện của bài toán thì ta biến đổi về các dạng như trên để đơn giản bài toán hơn từ cái giả thiết "rối" đó

Bài 51: Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca+2abc=1$

CMR $2(a+b+c)+1\geq 32abc$ (Mediteranean 2004)

Lời giải

□ Giả thiết như vậy thì đặt $a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y}$ (với $x,y,z>0$)

Do đó ta cần chứng minh $2\sum\frac{x}{y+z}+1\geq\frac{32xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3)+3\left[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\right]\geq 24xyz$

Điều này luôn đúng theo cauchy nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Bài 52: Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca+2abc=1$

CMR $\frac{1}{2bc+b+c}+\frac{1}{2ca+c+a}+\frac{1}{2ab+a+b}\geq 2$

Lời giải

□ Đặt $a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y}$ (với $x,y,z>0$)

Tới đây thay vào hơi choáng nhưng để ý việc nhân sau sẽ làm giảm biến

$\sum\frac{1}{2bc+b+c}=\sum\frac{a}{1-bc}$

Ta chứng minh $\sum \frac{a}{1-bc} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{x}{y+z}}{1-\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x+z)}{y+z} + \frac{(y+z)(y+x)}{z+x} + \frac{(z+x)(z+y)}{x+y} \geq 2(x+y+z)$

Mà $\frac{(x+y)(x+z)}{y+z} + \frac{(y+z)(y+x)}{z+x} \geq 2(x+y)$ tương tự cộng lại là bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Bài 53: Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca+abc=4$

CMR $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leq 3$

Lời giải

□ Đặt $a=\frac{2x}{y+z}, b=\frac{2y}{z+x}, c=\frac{2z}{x+y}$ (với $x,y,z>0$)

Do đó ta cần chứng minh $2\sum \sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}} \leq 3$

Ta có $2\sum \sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}} \leq \sum \left(\frac{y}{y+z}+\frac{x}{z+x}\right)=3$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 54: Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca+abc=4$

CMR $a+b+c \geq ab+bc+ca$ (VMO 1996)

Lời giải

□ Đặt $a=\frac{2x}{y+z}, b=\frac{2y}{z+x}, c=\frac{2z}{x+y}$ (với $x,y,z \geq 0$ và $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$)

Do đó ta cần chứng minh $\sum \frac{x}{y+z} \geq 2\sum \frac{yz}{(x+y)(x+z)}$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

Đây là bđt schur nên bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ và các hoán vị

▹ Nhận xét:một bài toán sử dụng kết quả bài toán trên như sau

Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c+1=4abc$

CMR $\frac{a+1}{a+b}+\frac{b+1}{b+c}+\frac{c+1}{c+a} \leq 3$

Bài 55: Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2+abc=4$

CMR $0 \leq ab+bc+ca-abc \leq 2$ (USA MO 2000)

Lời giải

□ Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow 4\ge 3c^2+c^3\Rightarrow c\le 1$

Ta có $ab+bc+ca-abc=ab(1-c)+bc+ca\ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi $a=2,b=c=0$ và các hoán vị

□ Trường hợp 1:có hai số bằng không giả sử là $b=c=0\Rightarrow a=2$

Ta có $ab+bc+ca-abc=0$

Trường hợp 2:có một số bằng không giả sử là $c=0\Rightarrow a^2+b^2=4$

Ta có $ab+bc+ca-abc=ab\le \dfrac{a^2+b^2}{2}=2$

Trường hợp 3: a,b,c dương

Đặt $a=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{(x+z)(y+z)}},b=\dfrac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{(y+x)(z+x)}},c=\dfrac{2\sqrt{zx}}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}$ (với $x,y,z>0$)

Ta cần chứng minh $\dfrac{2\sqrt{xyz}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}\left[\sum\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}}-\dfrac{2\sqrt{xyz}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}\right]\le 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}}+\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}}\le \dfrac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+6xyz}{2\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$

$\Leftrightarrow \sum 2x\sqrt{yz(x+y)(x+z)}\le xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+6xyz$

Ta có $2x\sqrt{yz(x+y)(x+z)}=2x\sqrt{(xy+yz)(xz+yz)}\le x(xy+xz+2yz)$

Tương tự cộng lại thì bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\sqrt{2},c=0$ và các hoán vị

Bài 56: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2+abc=4$

CMR $a^2+b^2+c^2\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Lời giải

□ Trường hợp 1:trong ba số tồn tại ít nhất một số bằng 0,giả sử là $a=0$

Ta có $b^2+c^2=4$,ta cần chứng minh $b^2c^2\le 4$

Điều này luôn đúng bởi $b^2c^2\le \dfrac{1}{4}(b^2+c^2)^2=4$

Trường hợp 2: a,b,c dương

Đặt $a=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{(x+z)(y+z)}},b=\dfrac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{(y+x)(z+x)}},c=\dfrac{2\sqrt{zx}}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}$ (với $x,y,z>0$)

Ta cần chứng minh $\sum\dfrac{xy}{(x+z)(y+z)}\ge \sum\dfrac{4xy^2z}{(x+y)(y+z)(z+x)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{z}+\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}\ge \dfrac{4x}{y+z}+\dfrac{4y}{z+x}+\dfrac{4z}{x+y}$

Ta có $\sum\dfrac{4x}{y+z}\le \sum\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}\right)=\sum\dfrac{x+y}{z}$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=0,b=c=\sqrt{2}$ và các hoán vị

▹ Nhận xét:một bài toán tương tự với bài toán trên là

Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

CMR $a^2+b^2+c^2\ge 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Bài 57: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=x+y+z+2$

a)CMR $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)$

b)CMR $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$

Lời giải

Giả thiết nhìn có vẻ là không liên quan đến các đẳng thức ở đầu bài nhưng ta thấy số 2 làm ta liên tưởng đến hai đẳng thức là $a^2+b^2+c^2+2abc=1, ab+bc+ca+2abc=1$ vậy thì ta chia đi để xem liệu có "điều gì đặc biệt"

$xyz=x+y+z+2\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{2}{xyz}=1$ tới đây thì thấy sự liên quan rồi

□ Đặt $\frac{1}{x}=\frac{a}{b+c},\frac{1}{y}=\frac{b}{c+a},\frac{1}{z}=\frac{c}{a+b}\Leftrightarrow x=\frac{b+c}{a},y=\frac{c+a}{b},z=\frac{a+b}{c}$

a)Ta cần chứng minh $\sum\frac{(a+c)(b+c)}{ab}\ge 2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$

$\Leftrightarrow\sum a(a+b)(a+c)\ge 2\sum ab(a+b)\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0$

Đây là bđt schur nên bđt được chứng minh

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\le\frac{3}{2}$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\le\frac{3}{2}$

$\sum\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\sum\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)=\frac{3}{2}$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=2$

VII/Phương pháp đổi biến qua p,q,r

▲Sử dụng phương pháp là một cách làm mới đầu làm ta sẽ không thấy hay bởi khi mới làm thấy nó "trâu bò" nhưng khi làm nhiều rồi thì ta mới thấy cái hay của nó cũng như khi mới học bđt vậy.Các bài toán dưới khá đơn thuần là thay vào và sử dụng vài kĩ thuật chứ chưa phải là sử dụng các mở rộng của schur.Sử dụng phương pháp này khá tự nhiên bởi nó dễ dàng nhận ra ,thường là khi bđt có $\sum a,\sum ab,abc,\sum a^2b^2,\prod(a+b),...$ hay nó xảy ra khi có một số bằng không

▲Đầu tiên thì p,q,r là cái gì đã: $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,abc=r$

Các bđt từ p,q,r có được là từ bđt schur

$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0$ (với $a,b,c\geq 0$ và $\forall r\geq 0$)

Các bđt thường được sử dụng sau khi sử dụng schur và cauchy như sau

$p^2\geq 3q$ $\quad p^2q+3pr\geq 4q^2$ $\quad p^3+9r\geq 4pq$

$q^2\geq 3pr$ $\quad pq^2+3qr\geq 4p^2r$ $\quad 2p^3+9r\geq 7pq$

$p^3\geq 27r$ $\quad p^4+3q^2\geq 4p^2q$ $\quad p^4+4q^2+6pr\geq 5p^2q$

Và bên cạnh đó là các đẳng thức thường được sử dụng

$a^2+b^2+c^2=p^2-2q$

$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$

$a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2pr$

$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=q^3-3pqr+3r^2$

$(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$

$(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)=p^2+q$

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r$

$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)=p^2q-2q^2-pr$

Việc sử dụng chính ở phương pháp này là thế sau đó là phân tích thành nhân tử hay xét khoảng và ta thường sử dụng việc thế bằng các bđt $r\geq \dfrac{p(4q-p^2)}{9}, r\geq \dfrac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}$

Nhưng các đại lượng này chưa chắc không âm nên ta thường dùng

$r\geq \max\left\{0,\dfrac{p(4q-p^2)}{9}\right\}, r\geq \max\left\{0,\dfrac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}\right\}$

Bài 58: Cho $x,y,z\geq 0$ sao cho không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0

CMR $(xy+yz+zx)\left[\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(y+z)^2}+\dfrac{1}{(z+x)^2}\right]\geq \dfrac{9}{4}$ (Iran 1996)

Lời giải

□ Bđt cần chứng minh tương đương $q\dfrac{(p^2+q)^2-4p(pq-r)}{(pq-r)^2}\geq \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2\geq 0$

$\Leftrightarrow 3pq(p^3-4pq+9r)+q(p^4-5p^2q+4q^2+6pr)+r(pq-9r)\geq 0$

Điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$ hoặc $x=0, y=z$ và các hoán vị

Bài 59: Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$

CMR $2(a^2+b^2+c^2)+12\geq 3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)$ (Balkan Contest)

Lời giải

□ Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow 2(p^2-2q)+12\ge 3p+3q \Leftrightarrow 2p^2-3p-7q+12\ge 0$
Thấy p bậc cao nhất và q chỉ có một mình nên ta thay q bằng p

Ta có $p^3+9r\ge 4pq \Leftrightarrow q\le \dfrac{p^3+9r}{4p}=\dfrac{p^3+9}{4p}$

Do đó ta cần chứng minh $2p^2-3p-\dfrac{7(p^3+9)}{4p}+12\ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(p^2-9p+21)\ge 0$

Điều này luôn đúng do $p\ge 3$ nên bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 60: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $ab+bc+ca=3$
CMR $a^3+b^3+c^3+7abc\ge 10$ (Vasile Cirtoaje)

Lời giải

□ Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow p^3-9p+10r\ge 10$

Ta có $r\ge \max\left\{0,\dfrac{p(4q-p^2)}{9}\right\}=\max\left\{0,\dfrac{p(12-p^2)}{9}\right\}$

Trường hợp 1: với $p\ge 2\sqrt{3}$
Ta có $p^3-9p+10r-10\ge p^3-9p-10\ge 12p-9p-10=3p-10>0$
Trường hợp 2: với $3\le p<2\sqrt{3}<4$

$$p^3-9p+10r-10\ge p^3-9p+\frac{10}{9}p(12-p^2)-10=\frac{1}{9}(p-3)\left[(16-p^2)+3(4-p)+2\right]\ge 0$$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▹ Nhận xét: Việc chia trường hợp ở trên là để $\dfrac{p(12-p^2)}{9}>0$, đây là một cách hay làm khi sử dụng phương pháp p,q,r

Bài 61: Cho a,b,c là 3 số không âm

CMR $a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)\le \dfrac{1}{12}(a+b+c)^5$ (Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Nhìn bậc cao thế này thì làm hơi mệt nên ta chuẩn hóa để giảm bậc cũng như làm bớt ẩn
□ Chuẩn hóa $a+b+c=1$
Ta có $\sum a^4(b+c)=\sum a^3(ab+ac)=\sum a^3.\sum ab-\left(\sum a^2\right)abc=(1-3q)q+(5q-1)r$

Ta cần chứng minh $(1-3q)q+(5q-1)r\le \dfrac{1}{12}$

Trường hợp 1: với $q\le \dfrac{1}{5}$

Ta có $(1-3q)q+(5q-1)r\le (1-3q)q\le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-3q+3q}{2}\right)^2=\dfrac{1}{12}$

Trường hợp 2:với $\frac{1}{5} < q \le \frac{1}{3}$

Ta có $(1-3q)q+(5q-1)r \le (1-3q)q+(5q-1)\frac{q}{9} = \frac{1}{36}(-88q^2+32q-3)+\frac{1}{12} < \frac{1}{12}$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=0, y=(2\pm\sqrt{3})z$ và các hoán vị

▹ Nhận xét:chuẩn hóa cũng là một trong các kĩ thuật của p,q,r nhằm giảm bớt bậc cũng như biến

Bài 62: Cho x,y,z là 3 số thực không âm

CMR $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3} \ge 5$

Lời giải

□ Không mất tính tổng quát giả sử $x+y+z=1$

Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow \frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \ge 5 \Leftrightarrow \frac{1-3q+4r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \ge 4$

Ta có $\frac{1-3q+4r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \ge \frac{1-3q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \ge 4$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}y, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng

▹ Nhận xét:bài toán tổng quát của bài trên với cách giải tương tự là

Cho a,b,c là các số thực không âm và $\forall k \ge 1$

CMR $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \ge 2\sqrt{k}+1$ (Phạm Sinh Tân)

Bài 63: Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa $a+b+c=3$

CMR $\frac{a^2b}{4-bc}+\frac{b^2c}{4-ca}+\frac{c^2a}{4-ab} \le 1$ (Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Nhìn hình thức khá "ảo diệu" mà lượng a^2b, b^2c, c^2a ở chỗ có phân thức thấy không làm ăn được gì nên ta làm mất nó ở phân thức

□ Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow 4-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \ge \sum_{cyc}\frac{a^2b^2c}{4-bc}$

Ta có bđt phụ sau $4-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) = \frac{27}{4}(a+b+c)^3-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \ge abc$

Do đó ta cần chứng minh $abc \ge \sum_{cyc}\frac{a^2b^2c}{4-bc} \Leftrightarrow 1 \ge \sum_{cyc}\frac{ab}{4-bc}$

$\Leftrightarrow 64-32\sum ab+8\sum a^2bc+4\sum a^2b^2 \ge abc\left(a^2b+b^2c+c^2a+abc\right)$

Sử dụng bđt phụ nên ta cần chứng minh $64-32\sum ab+8\sum a^2bc+4\sum a^2b^2 \ge 4abc$

$\Leftrightarrow 16-8q+q^2-r \ge 0$

Ta có $q^2 \ge 9r$ nên ta cần chứng minh $16-8q+q^2-\dfrac{q^2}{9} \ge 0 \Leftrightarrow (q-3)(q-6) \ge 0$

Điều này luôn đúng do $q \le 3$ nên bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▹ Nhận xét:bđt phụ được sử dụng ở trên là

$(a+b+c)^3 \ge \dfrac{27}{4}(a^2b+b^2c+c^2a+abc)$ với $a,b,c \ge 0$

□ Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và $c \Rightarrow c(b-a)(b-c) \le 0$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \le b(a+c)^2 = 4b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2} \le 4\frac{\left(b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}\right)^3}{27} = \frac{4(a+b+c)^3}{27}$$

Bđt này cũng có nhiều ứng dụng khá hay,sau đây là bài toán với cách xử lí khá tương tự bài trên

Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa $a+b+c=3$

CMR $\dfrac{1}{ab^2+8}+\dfrac{1}{bc^2+8}+\dfrac{1}{ca^2+8} \ge \dfrac{1}{3}$

Bài 64: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=3$

CMR $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \ge ab+bc+ca$

Lời giải

Việc có cái căn bậc ba như vậy làm ta “gai” nên ta tìm cách “giải quyết” nó

□ Ta có $\sqrt[3]{a} = \dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}} \ge \dfrac{3a}{2a+1}$

Do đó ta cần chứng minh $3\sum \dfrac{a}{2a+1} \ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow 4q^2-5q-9+r(8q-36) \le 0$

Ta có $r \ge \max\left\{0,\dfrac{p(4q-p^2)}{9}\right\} = \max\left\{0,\dfrac{4q-9}{3}\right\}$

Trường hợp 1:với $q \le \dfrac{9}{4}$

Thì $4q^2-5q-9+r(8q-36) < 4q^2-5q-9 \le 9q-5q-9 = 4q-9 \le 0$

Trường hợp 2:với $\dfrac{9}{4} < q \le 3$

Thì $4q^2-5q-9+r(8q-36) \le 4q^2-5q-9+\dfrac{4q-9}{3}(8q-36) = \dfrac{11}{3}(4q-9)(q-3) \le 0$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▹ Nhận xét:bài trên còn có một cách làm khác là sử dụng holder nhưng cách làm có vẻ không hay,với cách làm trên ta có hai bài toán tương tự sau
Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=3$
1,CMR $5\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 4(ab+bc+ca)+3$
2,CMR $11\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}\right)\geq 12(ab+bc+ca)-3$

VIII/Lượng giác hóa

▲Việc sử dụng lượng giác ở các bài toán khá rõ ràng ở các bài toán dạng như không đối xứng hoàn toàn,điều kiện đầu bài liên quan đến các công thức lượng giác như

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

$\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A.\tan B-1}$

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

Bài 65: Cho $x,y,z\in\left[0,1\right]$

Tìm GTLN $P=\sqrt{xyz}+\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}$

Lời giải

Cái dấu căn và $1-x$ làm ta liên tưởng đến $\sin^2\alpha,\cos^2\alpha$

□ Đặt $x=\sin^2 A,y=\sin^2 B,z=\sin^2 C$ (với $A,B,C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

Do đó

$$P=\sqrt{\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C}+\sqrt{\cos^2 A.\cos^2 B.\cos^2 C}=\sin A.\sin B.\sin C+\cos A.\cos B.\cos C$$
$$\leq\sin A.\sin B+\cos A.\cos B=\cos(A-B)\leq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=z=0$

Bài 66: Cho $x,y,z\in\left(0,1\right)$ thỏa $xy+yz+zx=1$

Tìm GTNN $P=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$

Lời giải

$xy+yz+zx=1$ thì ta liên tưởng đến $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

□ Đặt $x=\tan\frac{A}{2},y=\tan\frac{B}{2},z=\tan\frac{C}{2}$ (với $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$)

Từ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}=1\Rightarrow A+B+C=\pi$

Ta có $P = \frac{1}{2}\sum\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\sum\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B + \tan C)$

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \le \left(\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3}\right)^3 \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$

Do đó $P \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 67: Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = xyz$

CMR $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{9}{4}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên 2014-2015)

Lời giải

$x + y + z = xyz$ thì ta liên tưởng đến $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

□ Đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$

Từ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \Rightarrow A + B + C = \pi$

Do đó ta cần chứng minh $2\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{9}{4}$

$$2\cos A + \cos B + \cos C = 2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$= -2\left(2\sin^2\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) + 2$$

$$= -2\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} + 2 \le \frac{9}{4}$$

Vậy bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\sqrt{15}}{7}, y = z = \sqrt{15}$

Bài 68: Cho $x, y, z > 0$ thỏa $xy + yz + zx = 1$

CMR $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \le 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (Đề nghị Olimpic 30-4 2013)

Lời giải

□ Đặt $x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2}$ với $A + B + C = \pi$

Ta cần chứng minh $\cos A+\cos B+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{C}{2}$

Do đó ta cần chứng minh $2\sin\frac{C}{2}+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)\le \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Ta có $\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)\le \left(\frac{\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}+1}{2}\right)^2=\left[\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\right]^2\le\frac{9}{4}$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=2-\sqrt{3},z=\sqrt{3}$

Bài 69: Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca=1$

CMR $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}\le\sqrt{10}$

Lời giải

□ Đặt $a=\tan\frac{A}{2},b=\tan\frac{B}{2},c=\tan\frac{C}{2}$ với $A+B+C=\pi$

Ta cần chứng minh $\sin A+\sin B+6\sin\frac{C}{2}\le 2\sqrt{10}$

$\sin A+\sin B+6\sin\frac{C}{2}\le 2\left(\cos\frac{C}{2}+3\sin\frac{C}{2}\right)\le 2\sqrt{\left(1+3^2\right)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)}=2\sqrt{10}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\sqrt{10}-3,c=3$

Bài 70: Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc+a+c=b$

CMR $\frac{2}{1+a^2}-\frac{2}{1+b^2}+\frac{3}{1+c^2}\le\frac{10}{3}$ (TST Vietnam 2003)

Lời giải

Nhìn bài toán có vẻ "choáng" này từ giả thiết cho đến phần cần chứng minh nhưng ta để ý thấy từ giả thiết có $b=\frac{a+c}{1-ac}$ liên quan đến công thức $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ và ta được lời giải

□ Đặt $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$ với $A+B+C=\pi$

Ta cần chứng minh $2\cos^2 A-2\cos^2 B+3\cos^2 C\le\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned}2\cos^2 A-2\cos^2 B+3\cos^2 C&=\cos 2A-\cos 2B+3-3\sin^2 C\\&=-3\sin^2 C-2\sin C\sin(A-B)+3\end{aligned}$$

$$= -3\left[\sin C - \frac{1}{3}\sin(A-B)\right]^2 - \frac{1}{3}\cos^2(A-B) + \frac{10}{3} \le \frac{10}{3}$$

Vậy bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

▹ Nhận xét:một bài toán khá tương tự với bài toán trên là

Cho $x, y, z > 0$ thỏa $xyz + x + z = y$

Tìm GTLN $P = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$

Bài 71: Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 1$

Tìm GTLN $P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{\sqrt{xyz}}{z+xy}$ (Đề nghị 30-4 2006)

Lời giải

Đặt $\sqrt{\frac{yz}{x}} = \tan\frac{A}{2}, \sqrt{\frac{zx}{y}} = \tan\frac{B}{2}, \sqrt{\frac{xy}{z}} = \tan\frac{C}{2}$

Ta có $\sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{yz}{x}} = 1$ do đó $A + B + C = \pi$

Khi đó $P = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{2}\sin C$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\cos A + \cos B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin A.\cos B + \sqrt{3}\sin B.\cos A\right)$$

$$\le 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2} + \cos^2 A + \cos^2 B\right) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(3\sin^2 A + 3\sin^2 B + \cos^2 A + \cos^2 B\right)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sin^2 A + \cos^2 A\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sin^2 B + \cos^2 B\right) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 2\sqrt{3} - 3, z = 7 - 4\sqrt{3}$

Bài 72: Cho $x, y, z > 0$ thỏa $xy = 1 + z(x+y)$

Tìm GTLN $P = \frac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z}{1+z^2}$ (THTT)

Lời giải

Lại một bài toán có hình thức "ảo" thì ta nghĩ đến cách dễ sử dụng nhất là lượng giác hóa và để ý từ giả thiết ta có $\frac{1}{xy} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 1$ nên ta có được lời giải

□ Đặt $\frac{1}{x}=\tan\frac{A}{2},\frac{1}{y}=\tan\frac{B}{2},z=\tan\frac{C}{2}$ với $A+B+C=\pi$

Ta có $P\le\frac{2x^2y^2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{z}{1+z^2}=\frac{1+\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{y^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}+\frac{z}{1+z^2}=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin C$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)$$

Tương tự bài 67 ta có $\cos A+\cos B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow P\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=2+\sqrt{3},z=\sqrt{3}$

IX/Các bài toán đổi biến khác

▲Các bài toán trong phần này sẽ có những phép đổi biến hay và lạ

Bài 73: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=1$

Tìm GTLN $P=\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{y}{(y+1)^2}+\frac{z}{(z+1)^2}-\frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

Lời giải

□ Đặt $a=\frac{1-x}{1+x},b=\frac{1-y}{1+y},c=\frac{1-z}{1+z}\Rightarrow a,b,c\in(-1,1)$

$\Rightarrow x=\frac{1-a}{1+a},y=\frac{1-b}{1+b},z=\frac{1-c}{1+c}$ từ $xyz=1\Rightarrow a+b+c+abc=0$

Ta có $P=\sum\frac{x}{(x+1)^2}-4\prod\frac{1}{x+1}=\sum\frac{1-a^2}{4}-\frac{1}{2}\prod(1+a)$

$$=\frac{1}{4}\left[3-(a^2+b^2+c^2)-2(1+a)(1+b)(1+c)\right]=\frac{1}{4}\left[1-(a+b+c)^2\right]\le\frac{1}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi x,y,z thỏa mãn $\frac{1-x}{1+x}+\frac{1-y}{1+y}+\frac{1-z}{1+z}=0$ và $xyz=1$

▹ Nhận xét:một bài toán với cách giải tương tự bài trên là

Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=1$

Tìm GTNN $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

Bài 74: Cho a,b,c là 3 số thực không âm

CMR $2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge(a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1-x}{1+x},b=\frac{1-y}{1+y},c=\frac{1-z}{1+z}\Rightarrow x,y,z\in(-1,1]$

Bđt cần chứng minh tương đương $2\prod\frac{a^2+1}{a+1}\ge abc+1$

$\Leftrightarrow 2\prod\frac{x^2+1}{x+1}\ge\frac{2(xy+yz+zx+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}\Leftrightarrow\sum x^2y^2+\sum x^2\ge\sum xy$

Ta có $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx,x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge 0$ do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 75: Cho a,b,c là 3 số thực thỏa $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$

CMR $\frac{|a-b|}{\sqrt{2ab+c^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{2bc+a^2}}+\frac{|c-a|}{\sqrt{2ca+b^2}}\ge 2$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

Các đại lượng $|a-b|,|b-c|,|c-a|$ cho ta sự "choáng"

Nhưng ta để ý $\frac{|a-b|}{\sqrt{2ab+c^2}}=\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{2ab+c^2}}$ các đại lượng trong căn thức này đều xuất hiện ở cái giả thiết "ảo diệu" nên ta sẽ tìm cách biến đổi nhưng biến đổi cái nào,tử hay mẫu?

Ở tử có cái gì đó "gai" nên ta sẽ thử biến đổi cái mẫu và ta có $2ab+c^2=(\text{b}-\text{c})^2+(c-a)^2$

Và đến đây ta đã thấy được sự rõ ràng trong việc đặt ẩn

□ Đặt $x=(a-b)^2,y=(b-c)^2,z=(c-a)^2$

Ta cần chứng minh $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ge 2$

$$\sum\sqrt{\frac{x}{y+z}}=\sum\frac{x}{\sqrt{x(y+z)}}\ge\sum\frac{2x}{x+y+z}=2$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=4b=4c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị

Bài 76: Cho a,b,c là 3 số thực với $c>0$ và thỏa $a^2+ab+b^2=3c^2$

CMR $a^3+b^3+4abc\le 6c^3$

Lời giải

□ Đặt $x=\frac{a}{c},y=\frac{b}{c}$ do đó từ giả thiết ta có $x^2+xy+y^2=3$

Ta cần chứng minh $x^3+y^3+4xy\le 6$

Từ giả thiết ta có $xy=(x+y)^2-3$

$$x^3+y^3+4xy=(x+y)(\text{x}^2+y^2-xy)+4xy=(x+y)\left\{(x+y)^2-2\left[(x+y)^2-3\right]\right\}+4\left[(x+y)^2-3\right]$$

Bt cần chứng minh tương đương $\left[2-(x+y)\right]\left[2(x+y)^2-9\right]\le 0$

Ta có $3=x^2+xy+y^2\ge\frac{3}{4}(x+y)^2\Rightarrow x+y\le 2$

Nên $2-(x+y)\ge 0,2(x+y)^2-9\le 2.2^2-9<0$ do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

▹ Nhận xét:việc chia ở trên là một việc làm thường làm khi có một đại lượng riêng lẻ nào đó ở một vế,những bài toán kiểu này thường hay xuất hiện trong kì thi học sinh giỏi,tuyển sinh đại học và cũng là một cách hay sử dụng của các bài hệ

Bài 77: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=1$

CMR $\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2-ca+a^2)}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$

Lời giải

□ Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow xy+yz+zx=xyz$

Do đó ta cần chứng minh $\sum\frac{z^3}{x^2-xy+y^2}\geq\frac{3xyz}{x+y+z}$

$$\sum\frac{x^3}{y^2-yz+z^2}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum x(y^2-yz+z^2)}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x+y+z)(xy+yz+zx)-6xyz}$$

Mà theo bđt schur thì $(x^2+y^2+z^2)^2+6xyz(x+y+z)\geq(x+y+z)^2(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x+y+z)(xy+yz+zx)-6xyz}\geq x+y+z\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}=\frac{3xyz}{x+y+z}$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

▹ Nhận xét:Việc đổi biến $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ có vẻ như không hợp lí khi làm cho giả thiết mất đẹp nhưng chính điều này đã làm mất đại lượng c^3 ở mẫu và biến nó lên tử để dễ biến đổi

Bài 78: Cho $a,b,c\geq1$ thỏa $a^2+b^2+c^2=4$

CMR $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{9}{2\left(\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}+\sqrt{c^2-1}\right)}$ (Mathscope)

Lời giải

Cái căn này làm ta không thích lắm bởi có -1 nhưng ta thấy ở giả thiết cũng có a^2 như ở căn nên ta nghĩ tới đặt để làm tránh rườm rà

□ Đặt $x=\sqrt{a^2-1},y=\sqrt{b^2-1},z=\sqrt{c^2-1}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$

Do đó ta cần chứng minh $(x+y+z)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)\leq\frac{9}{2}$

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\leq\sqrt{\sum\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2}}\leq\sqrt{\frac{3}{4}\sum\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+z^2}\right)}=\frac{3}{2}$$

$$\sum\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}}\le\sqrt{\sum\frac{3(y+z)^2}{2x^2+y^2+z^2}}\le\sqrt{3\sum\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)}=3$$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Bài 79: Cho tam giác ABC

Tìm GTNN $S=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$ (TST Vietnam 2007)

Lời giải

Nhìn vào đề thế này thì ta nghĩ đến ngay là việc đặt $\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}$ làm ẩn

Nhưng ta thấy các bđt mà liên quan đến $\cos$ như

$\sum\cos A\le\frac{3}{2},\prod\cos A\le\frac{1}{8},\sum\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{3},\prod\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ thì chỉ toàn là dấu bé hơn thì khó mà có thể sử dụng nên ta nghĩ đến việc đặt một đại lượng khác mà có được biểu thức chứ không phải là có được bđt đó chính là đại lượng $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}$

□ Đặt $x=\tan\frac{A}{2},y=\tan\frac{B}{2},z=\tan\frac{C}{2}$ với $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$

Do đó ta có $S=\sum\frac{x^2+1}{(y^2+1)(z^2+1)}=\sum\frac{x^2+\sum xy}{\left(y^2+\sum xy\right)\left(z^2+\sum xy\right)}=\sum\frac{1}{(x+y)^2}$

Theo bđt Iran 1996 thì $\sum\frac{1}{(x+y)^2}\ge\frac{9}{4(xy+yz+zx)}\Rightarrow S\ge\frac{9}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều

Bài 80: Cho tam giác ABC nhọn

Tìm GTNN $P=\frac{\cos^2 A}{\cos A+1}+\frac{\cos^2 B}{\cos B+1}+\frac{\cos^2 C}{\cos C+1}$ (China 2005)

Lời giải

Như bài trên thì ta nghĩ đến việc đặt và tạo ra cái điều kiện nhưng ở đây là $\cos A$ chứ không phải $\cos\frac{A}{2}$ nên ta nghĩ đến viêc đặt $\cot$ làm ẩn bởi $\sum\cot A\cot B=1$

□ Đặt $x=\cot A,y=\cot B,z=\cot C$ với $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$

Ta có $\frac{\cos^2 A}{\cos A+1}=\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= x^2 - \frac{x^3}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \ge x^2 - \frac{x^3}{2(x+y)} - \frac{x^3}{2(x+z)}$$

Do đó $P \ge \sum\left[x^2 - \frac{x^3}{2(x+y)} - \frac{x^3}{2(x+z)}\right] = \sum x^2 - \frac{1}{2}\sum\left(x^2 - xy + y^2\right) = \frac{1}{2}\sum xy = \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều

▹ Nhận xét:một cách khác tự nhiên hơn là ta sử dụng định lí cosin để thay cos bằng các cạnh của tam giác

Bài 81: Cho a,b,c là 3 số thực dương

CMR $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$ (USA MO 2003)

Lời giải

□ Đặt $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$

Do đó ta cần chứng minh $\sum \frac{(2+x)^2}{2+x^2} \le 8$ với $xyz = x+y+z+2$ và $xyz \ge 8$

Bđt cần chứng minh tương đương $\sum \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \ge \frac{1}{2}$

$\sum \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \ge \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$ nên ta chứng minh $2(x+y+z-3)^2 \ge x^2+y^2+z^2+6$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 12(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 12 \ge 0$

$\left(\sum x\right)^2 - 12\sum x + 2\sum xy + 12 \ge \left(\sum x\right)^2 - 12\sum x + 36 = \left(\sum x - 6\right)^2 \ge 0$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

Bài 82: Cho $x,y,z \ge 0$ thỏa $x+y+z=1$

CMR $\frac{x^2+1}{y^2+1} + \frac{y^2+1}{z^2+1} + \frac{z^2+1}{x^2+1} \le \frac{7}{2}$

Lời giải

□ Đặt $a = x^2+1, b = y^2+1, c = z^2+1 \Rightarrow a,b,c \in [1,2]$

Ta cần chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{7}{2}$

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c

$\Rightarrow (b-a)(b-c) \le 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \le \frac{a}{c} + 1$

Vì $a,b,c \in [1,2] \Rightarrow (2a-c)(2c-a) \ge 0 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) + \frac{c}{a} \le \frac{a}{c} + 1 + \frac{c}{a} \le \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $x=1, y=z=0$ và các hoán vị

▹ Nhận xét: việc đặt ở trên làm cho cái ẩn ở biểu thức đơn giản hơn và phần còn lại là dạng bài toán biến đổi hoán vị và sau đây là một bài toán với cách giải tương tự

Cho $x,y,z \ge 0$ thỏa $x+y+z=1$

CMR $(x^2+y^2+z^2+3)\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right) \le 10$

Bài 83: Cho a,b,c là 3 số thực thỏa $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=10$

CMR $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \ge \frac{27}{2}$ (Đề thi thử Đại học Tổng hợp 2007)

Lời giải

□ Từ giả thiết ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=7$

Đặt $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}, y=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \Rightarrow x+y=7$

Ta có $x^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+2y, y^2=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+2x$

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)=\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2}+\sum_{cyc}\frac{b^2}{a^2}+3=x^2+y^2-2(x+y)+3 \ge \frac{(x+y)^2}{2}-2(x+y)+3=\frac{27}{2}$$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=2b=2c$ hoặc $2a=b=c$ và các hoán vị

Bài 84: Cho $x,y,z>0$ thỏa $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

CMR $(xy+yz+zx)\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2 \ge 27$ (Trần Quốc Anh)

Lời giải

□ Đặt $x=\sqrt{\frac{bc}{a}}, y=\sqrt{\frac{ca}{b}}, z=\sqrt{\frac{ab}{c}}$ (với $a,b,c>0$)

Từ giả thiết ta có $a+b+c=ab+bc+ca$

Ta cần chứng minh $(a+b+c)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \ge 27$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c}} \Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{a}{a+b+c}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}=\frac{3\sqrt{3}(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Đây là một bđt thuần nhất và đối xứng nên bỏ qua điều kiện đề bài ta chuẩn hóa $a+b+c=3$

Do đó ta chứng minh $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge ab+bc+ca$ (Russia 2002) (*)

Bđt (*) mình đưa ra hai cách chứng minh sau

Cách 1:

□ Bđt cần chứng minh tương đương $a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 9$

Ta có $a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\ge 3a$ tương tự cộng lại bđt được chứng minh

Cách 2:

□ Ta có $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2(a^2+b^2+c^2)\ge (a+b+c)^3=27$

Do đó ta cần chứng minh $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2\le 27$

Ta có $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2\le\left[\dfrac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{3}\right]^3=27$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài 85: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=27$

CMR $(x^2+3)(y^2+3)(z^2+3)\ge\dfrac{3}{4}\left(xy+yz+zx+\dfrac{xyz}{3}\right)^2$

Lời giải

□ Bđt cần chứng minh $\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{x^2}+3\right)\left(\dfrac{9}{y^2}+3\right)\left(\dfrac{9}{z^2}+3\right)\ge 4\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{3}{z}+1\right)^2$

Đặt $a=\dfrac{3}{x},b=\dfrac{3}{y},c=\dfrac{3}{z}\Rightarrow xyz=1$

Ta cần chứng minh $(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3)\ge 4(a+b+c+1)^2$

$\Leftrightarrow 5\sum a^2+3\sum a^2b^2+a^2b^2c^2+23\ge 8\left(\sum a+\sum ab\right)$

Ta có bđt phụ $a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$

Do đó ta cần chứng minh $4\sum a^2+3\sum a^2b^2+21\ge 8\sum a+6\sum ab$

$\Leftrightarrow 3\sum(ab-1)^2+4\sum(a-1)^2\ge 0$

Điều này luôn đúng do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3$

▹ Nhận xét: bđt phụ được sử dụng ở trên là

$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$ với $a,b,c>0$

□ Ta có $2abc+1\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge\dfrac{9abc}{a+b+c}$

Do đó ta cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c}\ge 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

Điều này luôn đúng do đó bđt được chứng minh

Bđt này có khá nhiều ứng dụng,sau đây là 2 bài toán ứng dụng của bđt trên

Cho a,b,c là 3 số thực dương

1,CMR $1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge 2\sqrt{1+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}}$

2,CMR $4\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 9(a+b+c)$

Bài 86: Cho a,b,c,d là 4 số thực không âm

CMR $\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3}\geq\frac{243}{2(a+b+c+d)^3}$

Lời giải

□ Không mất tính tổng quát giả sử $d=\min\{a,b,c,d\}$ .Ta có

$a^3+b^3\leq\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(b+\frac{d}{3}\right)^3, a^3+c^3\leq\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(c+\frac{d}{3}\right)^3, b^3+c^3\leq\left(b+\frac{d}{3}\right)^3+\left(c+\frac{d}{3}\right)^3$

$a^3+d^3\leq\left(a+\frac{d}{3}\right)^3, b^3+d^3\leq\left(b+\frac{d}{3}\right)^3, c^3+d^3\leq\left(c+\frac{d}{3}\right)^3$

Đặt $x=a+\frac{d}{3}, y=b+\frac{d}{3}, z=c+\frac{d}{3}$ do đó ta cần chứng minh

$$\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{y^3+z^3}+\frac{1}{z^3+x^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\geq\frac{243}{2(x+y+z)^3}$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{2}{x^3+y^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)\geq\frac{243}{(x+y+z)^3}$$

Ta có

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{2}{(x+y)^3}\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{x^3y^3(x^2-xy+y^2)(x+y)}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{\left[\frac{3xy+\left(x^2-xy+y^2\right)}{4}\right]^4(x+y)}}=\frac{24}{(x+y)^3}$$

do đó $\sum\left(\frac{2}{x^3+y^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)\geq 24\sum\frac{1}{(x+y)^3}\geq\frac{84}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{243}{(x+y+z)^3}$

Do đó bđt được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c, d=0$ và các hoán vị

▹ Nhận xét:bài toán này có hình thức và ý tưởng làm khá giống với các bài ở phần IV

Bài 87: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=3$

CMR $\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+2}+\frac{c^2}{c+2}\leq\frac{3}{ab+bc+ca}$ (Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

□ Đặt $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$ với $0\leq t<1$ thì ta có $ab+bc+ca=3(1-t^2)$

Bđt cần chứng minh tương đương $4\sum\frac{1}{a+2}\leq\frac{1}{1-t^2}+3$

Ta có $\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3-2t}-\frac{a+2t-1}{(3-2t)(a+2)}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{4}{3-2t}\sum\frac{a+2t-1}{a+2}\ge\frac{12}{3-2t}-3-\frac{1}{1-t^2}$

$$\sum\frac{a+2t-1}{a+2}\ge\frac{\left[\sum(a+2t-1)\right]^2}{\sum(a+2)(a+2t-1)}=\frac{36t^2}{\sum a^2+(2t+1)\sum a+6(2t-1)}=\frac{6t}{t+3}$$

Ta cần chứng minh $\frac{24t}{(3-2t)(t+3)}\ge\frac{12}{3-2t}-3-\frac{1}{1-t^2}$

$\Leftrightarrow 6t^2-3t+1>0$ điều này luôn đúng nên bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 88: Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$

CMR $\frac{1}{\sqrt{5a+4}}+\frac{1}{\sqrt{5b+4}}+\frac{1}{\sqrt{5c+4}}\le 1$

Lời giải

□ Vì $\frac{1}{\sqrt{5a+4}},\frac{1}{\sqrt{5b+4}},\frac{1}{\sqrt{5c+4}}<\frac{1}{2}$

Do đó ta đặt $\frac{1}{\sqrt{5a+4}}=\frac{1-x}{2},\frac{1}{\sqrt{5b+4}}=\frac{1-y}{2},\frac{1}{\sqrt{5c+4}}=\frac{1-z}{2}$ với $x,y,z\in(0,1)$

Nên ta có $5a=\frac{4}{(1-x)^2}-4, 5b=\frac{4}{(1-y)^2}-4, 5c=\frac{4}{(1-z)^2}-4$

Vì $abc=1\Rightarrow\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1\right]\left[\frac{1}{(1-y)^2}-1\right]\left[\frac{1}{(1-z)^2}-1\right]=\frac{125}{64}$

Ta cần chứng minh $x+y+z\ge 1$

Giả sử $x+y+z<1$ thì ta có $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^2<\left(1+\frac{x}{y+z}\right)^2$

$$\Rightarrow\prod\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1\right]<\prod\left[\left(\frac{x+y+z}{y+z}\right)^2-1\right]=\frac{xyz\prod x(x+2y+2z)}{\prod(x+y)^2}\le\frac{xyz\frac{125}{27}(x+y+z)^3}{\prod(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{125}{64}<\frac{125xyz(x+y+z)^3}{27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}\Rightarrow 27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2<64xyz(x+y+z)^3$$

Điều này vô lí do $27\prod(x+y)^2\ge 27\left(\frac{8}{9}\sum x.\sum xy\right)^2\ge\frac{64}{3}\left(\sum x\right)^2.3xyz\sum x=64xyz\left(\sum x\right)^3$

Do đó bđt được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$
▷ Nhận xét: một bài toán với ý tưởng đặt ẩn tương tự như trên là

Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $\frac{1}{a^2+47}+\frac{1}{b^2+47}+\frac{1}{c^2+47}=\frac{1}{24}$

CMR $a+b+c\ge 10\sqrt{\frac{47}{23}}$

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Phương,*Những viên kim cương trong bất đẳng thức Toán học*,Nhà xuất bản Tri Thức,2009

[2] Trần Phương,Võ Quốc Bá Cẩn,Trần Quốc Anh,*Vẻ đẹp bất đẳng thức trong các kì thi Olimpic Toán học*,Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội,2010

[3] Võ Quốc Bá Cẩn,Trần Quốc Anh,*Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*,Nhà xuất bản Đại học Sư phạm,2010

[4] Võ Quốc Bá Cẩn,Trần Quốc Anh,*Sử dụng AM-GM để chứng minh bất đẳng thức*,Nhà xuất bản Đại học Sư phạm,2013

[5] Phạm Kim Hùng,*Sáng tạo bất đẳng thức*,Nhà xuất bản Tri thức,2006

[6] Titu Andreescu,Vasile Cirtoaje,Gabriel Dospinescu,Mircea Lascu,*Old and New Inequalities*,GIL Publishing House,2004

[7] Vasile Cirtoaje,*Algebraic Inequalities:Old and New Methods*,GIL Publishing House,2006

[8] *Crux Mathematicorum*

[9] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*