

Khoá giải đề THPT Quốc Gia – Thầy: Đặng Thành Nam

Môn: Toán; ĐỀ SỐ 16/50

Ngày thi : 14/03/2015

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Liên hệ đăng ký khoá học – Hotline: 0976 266 202 – Chi tiết: www.mathlinks.vn

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) với $m = 1$.
2. Tìm m để (1) có ba điểm cực trị cùng với gốc toạ độ tạo thành một tứ giác lồi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 2 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $\log_2 [x(x+8)] + 2\log_4 \frac{x+8}{x} = 4$.

b) Tìm x thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn phương trình $(1 + \tan x) \sin x = \sqrt{2} \cot x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^3 x} \cdot \cot x \, dx$.

Câu 4 (1,0 điểm).

- a) Cho số phức z thoả mãn $z + 2 - 4i = (2 - i) \cdot \overline{iz}$. Tìm phần ảo của số phức $w = z^3 - i$.
- b) Gọi X là tập hợp các số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau. Lấy ra ngẫu nhiên một số của X , tính xác suất để số được chọn có mặt các chữ số 6 và 9?

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 6a$, $AB = 3a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MS = \frac{1}{2}MC$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a và cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM .

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ và $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d , cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho IAB là tam giác vuông và $AB = 2\sqrt{11}$.

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với trục toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có $A(1;2)$. Gọi E là chân đường cao hạ từ đỉnh A , F là điểm đối xứng của E qua A và $H(1;-1)$ là trực tâm tam giác FBC . Tìm toạ độ các đỉnh B, C biết diện tích tam giác FBC bằng 78 và đỉnh B có hoành độ âm.

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} + y\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} = x+y \\ x^3 - 3x - 1 = \sqrt{5-y^2} \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $xy + yz + zx = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x| + |y| + |z| - \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2 + 4)}$.

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) với $m = 1$.
2. Tìm m để (1) có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một tứ giác lồi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

1. Học sinh tự giải.

2. Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Để (1) có ba điểm cực trị khi y' có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1), B(-\sqrt{m}; 1-m^2), C(\sqrt{m}; 1-m^2)$.

Tam giác ABC cân tại A và có B, C đối xứng qua Oy. Để A, B, C, O tạo thành một tứ giác lồi thì B, C nằm phía trên trục hoành và dưới đường thẳng $y=1 \Leftrightarrow 1 > 1-m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ (do $m > 0$).

+) Khi đó do OA vuông góc với BC nên $S_{OBAC} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \sqrt{m} \cdot 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ (t/m).

Câu 2 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $\log_2 [x(x+8)] + 2\log_4 \frac{x+8}{x} = 4$.

b) Tìm x thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn phương trình $(1 + \tan x) \sin x = \sqrt{2} \cot x$.

a) Điều kiện: $x(x+8) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -8 \end{cases}$.

Phương trình tương đương với:

$$\log_2 [x(x+8)] + \log_2 \frac{x+8}{x} = 4 \Leftrightarrow \log_2 (x+8)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+8)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x+8 = 4 \\ x+8 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 (l) \\ x = -12 (t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -12$.

b) Với x thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x(\sin x + \cos x)}{\cos x} &= \frac{\sqrt{2} \cos x}{\sin x} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \sin^2 x = \sqrt{2} \cos^2 x \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \sin^2 x &= \sqrt{2(\sin^2 x + \cos^2 x)} \cdot \cos^2 x \\ \Leftrightarrow \frac{(\sin x + \cos x) \sin^2 x}{\cos^3 x} &= \frac{\sqrt{2(\sin^2 x + \cos^2 x)} \cdot \cos^2 x}{\cos^3 x} \\ \Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x &= \sqrt{2(\tan^2 x + 1)} \\ \Leftrightarrow \tan^4 x (\tan x + 1)^2 &= 2(\tan^2 x + 1) \\ \Leftrightarrow \tan^6 x + 2 \tan^5 x + \tan^4 x - 2 \tan^2 x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^5 x + 3 \tan^4 x + 4 \tan^3 x + 4 \tan^2 x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^3 x} \cdot \cot x \, dx$.

Ta có: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^3 x} \cdot \cos x}{\sin x} \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^3 x} \cdot \sin^2 x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$.

Đặt $t = \sqrt{1 - \sin^3 x} \Rightarrow t^2 = 1 - \sin^3 x \Rightarrow -3 \sin^2 x \cos x \, dx = 2t \, dt$.

Và

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{t \cdot 2t \, dt}{1 - t^2} = -\frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{t^2}{t^2 - 1} \, dt = -\frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{7}{8}}} \left(1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) dt \\ &= -\frac{2}{3} \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Bigg|_0^{\sqrt{\frac{7}{8}}} = -\frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{7}}{2\sqrt{2} + \sqrt{7}} \right)\end{aligned}$$

Câu 4 (1,0 điểm).

- a) Cho số phức z thỏa mãn $z + 2 - 4i = (2 - i) \cdot \overline{iz}$. Tìm phần ảo của số phức $w = z^3 - i$.
b) Gọi X là tập hợp các số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau. Lấy ra ngẫu nhiên một số của X , tính xác suất để số được chọn có mặt các chữ số 6 và 9?

a) Giả sử $z = x + y \cdot i (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow i \cdot z = -y + x \cdot i$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}x + yi + 2 - 4i &= (2 - i)(-y - xi) \\ \Leftrightarrow x + 2 + (y - 4)i &= -2y - x + (y - 2x)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -2y - x \\ y - 4 = y - 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - 3i\end{aligned}$$

Vì vậy $w = (2 - 3i)^3 - i = (2 - 3i)^2(2 - 3i) - i = (-5 - 12i)(2 - 3i) - i = -47 - 10i$.

Vậy phần ảo của w bằng -10.

b) Một số thuộc X có dạng: $\overline{abcd}$, $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Ta tìm số phần tử của X.

+) Nếu $d = 0$; $\overline{abc}$ có A_9^3 cách chọn.

+) Nếu $d \in \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow d$ có 4 cách chọn; a có 8 cách chọn và $\overline{bc}$ có A_8^2 cách chọn.

Vậy X có tất cả $A_9^3 + 4.8.A_8^2$ phần tử.

Ta tìm số phần tử có mặt chữ số 6 và 9:

Giả sử số cần lập là $\overline{abcd}$, $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Xét các trường hợp sau

* $d = 0$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có các chữ số 6 và 9 là $C_7^1.3! = 42$.

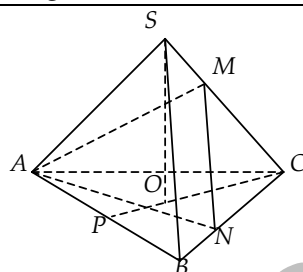
* $d = 6$ Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có chữ số 9 là $C_8^2.3! - C_7^1.2! = 154$.

* $d \in \{2, 4, 8\}$ Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có các chữ số 6 và 9 là $3.(C_7^1.3! - 2) = 120$.

Vậy số các số lập được là $42 + 154 + 120 = 316$.

Vì vậy xác suất cần tính là $P = \frac{316}{A_9^3 + 4.8.A_8^2}$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 6a$, $AB = 3a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MS = \frac{1}{2}MC$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a và cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM .



Gọi O là tâm tam giác đều ABC ; P là trung điểm AB .

Từ giả thiết suy ra $SO \perp (ABC)$, $CO = \frac{2}{3}CP$ (O thuộc đoạn CP).

$$AB = 3a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{4}, CP = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CO = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = a\sqrt{33} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{9\sqrt{11}}{4}a^3.$$

Kẻ $MN \parallel SB$ (N thuộc đoạn BC , $NB = \frac{1}{2}NC$).

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{SB, AM}) = \cos(\widehat{MN, AM}) = |\cos \widehat{AMN}|. \quad (1)$$

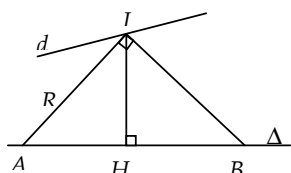
Ta có $MN = \frac{2}{3}SB = 4a$. Áp dụng định lý cosin cho các tam giác ANC , SAC , SAM ta có

$$AN = a\sqrt{7}, \cos \widehat{ASC} = \frac{7}{8}, AM = a\sqrt{19}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{AMN} = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2MA.MN} = \frac{7\sqrt{19}}{38}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } \cos(\widehat{SB, AM}) = \frac{7\sqrt{19}}{38}.$$

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ và $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d , cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho IAB là tam giác vuông và $AB = 2\sqrt{11}$.



ΔIAB có $IA = IB$ nên vuông tại I . Suy ra

$$IH = \frac{1}{2} AB = \sqrt{11} \quad (H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } \Delta)$$

$$\text{Suy ra } d(I, \Delta) = \sqrt{11}$$

(1)

$$\text{Khi đó bán kính mặt cầu } R = IH\sqrt{2} = \sqrt{22}.$$

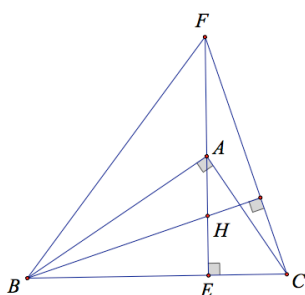
$$I \in d \Rightarrow I(2t; -t; -2t+1); \vec{u}_{\Delta} = (1; 1; -2) \text{ và } M(0; 1; 2) \in \Delta \Rightarrow \vec{MI} = (2t; -t-1; -2t-1)$$

$$\Rightarrow [\vec{u}_{\Delta}, \vec{MI}] = (-4t-3; -2t+1; -3t-1) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{|\vec{u}_{\Delta}, \vec{MI}|}{|\vec{u}_{\Delta}|} = \frac{\sqrt{29t^2 + 26t + 11}}{\sqrt{6}}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 29t^2 + 26t - 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{55}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(2; -1; -1) \\ I(-\frac{110}{29}; \frac{55}{29}; \frac{139}{29}) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra pt mặt cầu } (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 22 \text{ và } \left(x + \frac{110}{29}\right)^2 + \left(y - \frac{55}{29}\right)^2 + \left(z - \frac{139}{29}\right)^2 = 22.$$

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có $A(1;2)$. Gọi E là chân đường cao hạ từ đỉnh A , F là điểm đối xứng của E qua A và $H(1;-1)$ là trực tâm tam giác FBC . Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết diện tích tam giác FBC bằng 78 và đỉnh B có hoành độ âm.



+) Do AE vuông góc với BC nên H thuộc đường thẳng AE và có pt là $x-1=0$.

+) Đường thẳng BC vuông góc với AE có pt là $y-m=0$. Tọa độ điểm E là giao điểm của AE và BC nên $E(1;m)$, có A là trung điểm của EF nên $F(1;4-m)$.

+) Gọi $B(b;m)$ và $C(c;m)$ với $b < 0$ theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{FC} \cdot \vec{BH} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \vec{AB} = (b-1; m-2), \vec{AC} = (c-1; m-2); \vec{BH} = (1-b; -1-m), \vec{FC} = (c-1; 2m-4).$$

$$\text{Vì vậy ta có hệ phương trình: } \begin{cases} (b-1)(c-1) + (m-2)^2 = 0 \\ (1-b)(c-1) - (1+m)(2m-4) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Trừ theo vế 2 pt ta được: } (m-2)^2 - (1+m)(2m-4) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2; m = -4.$$

Điều kiện: $|y| \leq \sqrt{5}$.

Bình phương hai vế phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & \left(x\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} + y\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} \right)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \\ & \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{1+x^2}{1+y^2} + y^2 \cdot \frac{1+y^2}{1+x^2} + 2xy = x^2 + y^2 + 2xy \\ & \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{1+x^2}{1+y^2} + y^2 \cdot \frac{1+y^2}{1+x^2} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} - 1 \right) + y^2 \left(\frac{1+y^2}{1+x^2} - 1 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - y^2)}{1+y^2} + \frac{y^2(y^2 - x^2)}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2) \left(\frac{x^2}{1+y^2} - \frac{y^2}{1+x^2} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{(x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2 + 1)}{(1+x^2)(1+y^2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có $y^2 = x^2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x - 1 = \sqrt{5 - x^2} \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 3x - 2) = (\sqrt{5 - x^2} - 1) \\ & \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = \frac{4 - x^2}{\sqrt{5 - x^2} + 1} \\ & \Leftrightarrow (x - 2) \left(x^2 + 2x + 1 + \frac{x + 2}{\sqrt{5 - x^2} + 1} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x - 2)((x + 1)^2 \sqrt{5 - x^2} + x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Bởi vì $(x + 1)^2 \sqrt{5 - x^2} \geq 0, x^2 + 3x + 3 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$.

Bình luận: Phương trình đầu của hệ có rất nhiều cách biến đổi khác như sau:

Quy đồng rút gọn ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{x(1+x^2) + y(1+y^2)}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} = x + y \\ & \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 1) = (x + y)\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - xy + y^2 + 1 = \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối với phương trình

$$\begin{aligned} & x^2 - xy + y^2 + 1 = \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1+x^2 + 1+y^2}{2} \\ & \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Vậy ta cũng có $x = y \vee x = -y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

Câu 9 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $xy + yz + zx = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x| + |y| + |z| - \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2 + 4)}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (|x| + |y| + |z|)^2 - 2(|xy| + |yz| + |zx|), \\|xy| + |yz| + |zx| &\geq |xy + yz + zx| = 1 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4} &\leq \sqrt{(|x| + |y| + |z|)^2 + 2}\end{aligned}$$

Đặt $t = |x| + |y| + |z|$, $P \geq f(t) = t - \sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2 + 2}$.

$$f'(t) = 1 - \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2 + 2}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}.$$

Tuy nhiên dấu bằng lại không xảy ra tại $t = \sqrt{2}$ bởi vì

$$t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2(|xy| + |yz| + |zx|)} \geq \sqrt{-(xy + yz + zx) + 2|xy + yz + zx|} = \sqrt{3}.$$

Tuy nhiên đây cũng không phải chặn dưới tốt nhất của t , ta chặn miền giá trị của t như sau bằng cách sử dụng điều kiện:

Trong ba số x, y, z luôn tồn tại hai số cùng dấu và ta giả sử đó là x và y khi đó:

$$\text{Ta có } t = |x| + |y| + |z| \geq |x + y| + |z| = \left| \frac{1+xy}{z} \right| + |z| \geq \left| \frac{1}{z} \right| + |z| \geq 2.$$

Do đó $f(t)$ đồng biến với $t \geq 2$.

Suy ra $P \geq f(t) \geq f(2) = 2 - 2\sqrt{3}$. Dấu bằng đạt tại $(x; y; z) = (1; 0; -1)$ hoặc các hoán vị.

Bình luận: Ta có thể chứng minh $t = |x| + |y| + |z| \geq 2$ bằng cách khác sau đây:

$$\begin{aligned}t^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2\sum |xy| = (x + y + z)^2 + 2\left(\sum |xy| - xy\right) \\ &= (x + y + z)^2 + 2\sum |xy| + 2 \geq 4 \Rightarrow t \geq 2\end{aligned}$$