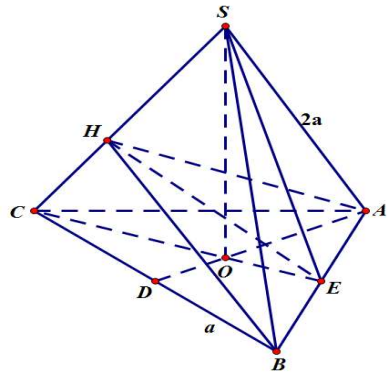
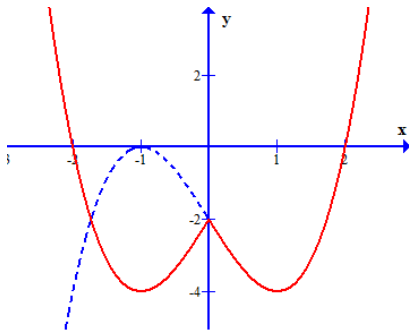


HOÀNG NGỌC THẾ

# PHÂN DẠNG

ĐỀ THI ĐẠI HỌC



# MÔN TOÁN

(2002 - 2015)

**PHÂN DẠNG  
ĐỀ THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN  
Từ năm 2002 đến năm 2015**

Hoàng Ngọc Thế

Ngày 20 tháng 7 năm 2015

## Lời nói đầu

Tài liệu nhỏ này giới thiệu Đề thi DH môn toán từ năm 2002 (năm đầu tiên toàn quốc thi đề chung) đến năm 2015. Các đề thi được phân dạng và sắp xếp theo các chủ đề lớn:

1. Khảo sát hàm số
2. Lượng giác
3. Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình
4. Tích phân và ứng dụng
5. Hình học tổng hợp trong không gian
6. Bất đẳng thức
7. Phương pháp tọa độ trong không gian
8. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng
9. Số phức
10. Tổ hợp - xác suất

Ở mỗi chủ đề, đề bài được sắp xếp theo năm thi và có đáp án hoặc hướng dẫn đi kèm giúp bạn đọc dễ theo dõi và kiểm tra kết quả của mình. Bạn đọc nên tự làm các đề thi sau đó so sánh với đáp án. Để làm được các đề thi này, đòi hỏi bạn đọc cần có một quá trình ôn tập kiên trì và có hiệu quả.

Trong quá trình tổng hợp vội vàng, hẳn là sẽ có nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp của các bạn.

**Hoàng Ngọc Thế**

# 1 Khảo sát hàm số

1. (A-2002) Cho hàm số

$$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2 \quad (1)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi  $m = 1$ .
- b) Tìm  $k$  để phương trình:  $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$  có 3 nghiệm phân biệt.
- c) Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của hàm số (1).

$$\text{ĐA: } b) -1 < k < 3, k \neq 0; k \neq 2; c) y = 2x - m^2 + m$$

2. (B-2002) Cho hàm số

$$y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10 \quad (2)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (2) khi  $m = 1$ .
- b) Tìm  $m$  để hàm số (2) có ba cực trị.

$$\text{ĐA: } 0 < m < 3; m < -3$$

3. (D-2002) Cho hàm số

$$y = \frac{(2m - 1)x - m^2}{x - 1} \quad (3)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (3) khi  $m = -1$ .
- b) Tính diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và 2 trục tọa độ.
- c) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (3) tiếp xúc với đường thẳng  $y = x$

$$\text{ĐA: } b) S = 4 \ln \frac{4}{3} - 1; c) m \neq 1$$

4. (A-2003) Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1} \quad (4)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (4) khi  $m = -1$ .
- b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (4) cắt  $Ox$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$$\text{ĐA: } -\frac{1}{2} < m < 0$$

5. (B-2003) Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + m \quad (5)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (5) khi  $m = 2$ .  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (5) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

$$\text{ĐA: } m > 0$$

6. (B-2003) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x + \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{ĐA: } \max y = 2\sqrt{2}; \min y = -2$$

7. (D-2003) Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \quad (6)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (6).  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (6) và đường thẳng  $d_m : y = mx + 2 - 2m$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

$$\text{ĐA: } m > 1$$

8. (D-2003) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

trên  $[-1; 2]$

$$\text{ĐA: } \max_{[-1; 2]} y = \sqrt{2}; \min_{[-1; 2]} y = 0$$

9. (A-2004) Cho hàm số

$$y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)} \quad (7)$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (7).

b) Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (7) và đường thẳng  $y = m$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = 1$

$$\text{ĐA: } m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

10. (B-2004) Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \quad (8)$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (8).

b) Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  của đồ thị hàm số (8) tại điểm uốn. Chứng minh  $d$  là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

$$\text{ĐA: } y = -x + \frac{8}{3}$$

11. (B-2004) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  trên đoạn  $[1; e^3]$

$$\text{ĐA: } \max_{[1; e^3]} y = \frac{4}{e^2}; \min_{[1; e^3]} y = 0$$

12. (B-2004) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm:

$$m \left( \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2 \right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{ĐA: } \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$$

13. (D-2004) Cho hàm số

$$y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1 \quad (9)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (9) khi  $m = 2$ .  
b) Tìm  $m$  để điểm uốn của đồ thị (9) thuộc đường thẳng  $y = x + 1$ .

**ĐA:**  $m = 0; \pm 2$

14. (A-2005) Cho hàm số

$$y = mx + \frac{1}{x} \quad (10)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (10) khi  $m = \frac{1}{4}$ .  
b) Tìm  $m$  để hàm số (10) có cực trị và khoảng cách từ cực tiểu đến tiệm cận xiên bằng  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**ĐA:**  $m = 1$

15. (B-2005) Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1} \quad (11)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (11) khi  $m = 1$ .  
b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$ , hàm số (11) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng  $\sqrt{20}$ .

16. (D-2005) Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3} \quad (12)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (12) khi  $m = 2$ .  
b) Gọi  $M$  là điểm thuộc đồ thị của hàm số (12) có hoành độ bằng  $-1$ . Tìm  $m$  để tiếp tuyến của đồ thị hàm số (12) tại  $M$  song song với đường thẳng  $5x - y = 0$ .

**ĐA:**  $m = 4$

17. (A-2006) Cho hàm số

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 \quad (13)$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (13).

b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt:

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$$

$$\text{ĐA: } 4 < m < 5$$

18. (B-2006) Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2} \quad (14)$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (14).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên.

$$\text{ĐA: } y = -x - 5 \pm 2\sqrt{2}$$

19. (B-2006) Tìm  $m$  để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$$

$$\text{ĐA: } m \geq \frac{9}{2}$$

20. (D-2006) Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x + 2 \quad (15)$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (15).

b) Gọi  $d$  là đường thẳng qua  $A(3; 20)$  có hệ số góc là  $m$ . Tìm  $m$  để  $d$  cắt đồ thị hàm số (15) tại 3 điểm phân biệt.

$$\text{ĐA: } m > \frac{15}{4}, m \neq 24$$

21. (A-2007) Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2} \quad (16)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (16) khi  $m = 1$ .  
b) Tìm giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (16) có điểm cực đại, cực tiểu và hai điểm đó tạo với gốc tọa độ  $O$  một tam giác vuông tại  $O$ .

$$\text{ĐA: } m = -4 \pm 2\sqrt{6}$$

22. (A-2007) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$$

$$\text{ĐA: } -1 < m \leq \frac{1}{3}$$

23. (B-2007) Cho hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1 \quad (17)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (17) khi  $m = 1$ .  
b) Tìm giá trị của tham số  $m$  để các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số cách đều gốc tọa độ  $O$ .

$$\text{ĐA: } m = \pm \frac{1}{2}$$

24. (D-2007) Cho hàm số

$$y = \frac{2x}{x+1} \quad (18)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (18).  
b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đồ thị sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại  $M$  cắt hai trục tọa độ tại  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{ĐA: } M_1\left(-\frac{1}{2}; -2\right), M_2(1; 1)$$

25. (A-2008) Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m} \quad (19)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (19) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm giá trị của tham số  $m$  để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị bằng  $45^0$

$$\text{ĐA: } m = \pm 1$$

26. (A-2008) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$$

$$\text{ĐA: } 2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 3\sqrt{2} + 6$$

27. (B-2008) Cho hàm số

$$y = 4x^3 - 6x^2 + 1 \quad (20)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (20).  
 b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M(-1; -9)$ .

$$\text{ĐA: } y = 24x + 15; y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{24}$$

28. (D-2008) Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad (21)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (21).  
 b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm  $I(1; 2)$  với hệ số góc  $k(k > -3)$  đều cắt đồ thị hàm số (21) tại ba điểm phân biệt  $I, A, B$  đồng thời  $I$  là trung điểm  $AB$ .

29. (A-2009) Cho hàm số

$$y = \frac{x+2}{2x+3} \quad (22)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (22).  
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến cắt  $Ox, Oy$  tại  $A, B$  và tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .

$$\text{ĐA: } y = -x - 2$$

30. (B-2009) Cho hàm số

$$y = 2x^4 - 4x^2 \quad (23)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (23).  
b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  sao cho phương trình sau có đúng 6 nghiệm thực:

$$x^2|x^2 - 2| = m$$

$$\text{ĐA: } 0 < m < 1$$

31. (B-2009NC) Cho

$$(C) : y = \frac{x^2 - 1}{x}; d : y = -x + m$$

Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt đồ thị hàm số  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB = 4$ .

$$\text{ĐA: } m = \pm 2\sqrt{6}$$

32. (D-2009) Cho hàm số

$$y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m \quad (24)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (24) khi  $m = 0$ .  
b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  sao cho đường thẳng  $y = -1$  cắt đồ thị hàm số (24) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

$$\text{ĐA: } -\frac{1}{3} < m < 0, 0 < m < 1$$

33. (D-2009) Cho

$$d : y = -2x + m; (C) : y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$$

Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho trung điểm  $AB$  thuộc trục tung.

$$\text{ĐA: } m = 1$$

34. (A-2010) Cho hàm số

$$y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m \quad (25)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (25) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (25) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4.$$

$$\text{ĐA: } -\frac{1}{4} < m < 0 \text{ và } 0 < m < 1.$$

35. (B-2010) Cho hàm số

$$y = \frac{2x + 1}{x + 1} \quad (26)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (26).  
 b) Tìm giá trị của tham số  $m$  sao cho đường thẳng  $y = -2x + m$  cắt đồ thị hàm số (26) tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  có diện tích bằng  $\sqrt{3}$ .

$$\text{ĐA: } m = \pm 2$$

36. (D-2010) Cho hàm số

$$y = -x^4 - x^2 + 6 \quad (27)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (27).  
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{6}x - 1$ .

**ĐA:**  $y = -6x + 10$

37. **(A-2011)** Cho hàm số

$$y = \frac{-x + 1}{2x - 1} \quad (28)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (28).  
 b) Đường thẳng  $y = x + m$  cắt đồ thị hàm số tại  $A, B$ . Tiếp tuyến tại  $A, B$  có hệ số góc lần lượt là  $k_1, k_2$ . Tìm  $m$  để  $k_1 + k_2$  lớn nhất.

**ĐA:**  $m = -1$

38. **(B-2011)** Cho hàm số

$$y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m. \quad (29)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (29) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (29) có 3 điểm cực trị  $A, B, C$  sao cho  $OA = OB$ ,  $A$  thuộc trục tung còn  $B, C$  là hai cực trị còn lại.

**ĐA:**  $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

39. **(D-2011)** Cho hàm số

$$y = \frac{2x + 1}{x + 1} \quad (30)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (30).  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $k$  để đường thẳng  $y = kx + 2k + 1$  cắt đồ thị hàm số trên tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho khoảng cách từ  $A, B$  đến trục hoành bằng nhau.

**ĐA:**  $k = -3$

40. **(D-2011)** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

trên  $[0; 2]$ .

$$\text{ĐA: } \min y = 3; \max y = \frac{17}{3}$$

41. (A-2012) Cho hàm số

$$y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 \quad (31)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (31) khi  $m = 0$ .  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số (31) có 3 cực trị là ba đỉnh của tam giác vuông.

$$\text{ĐA: } m = 0$$

42. (B-2012) Cho hàm số

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3 \quad (32)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (32) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số có hai cực trị  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng 48.

$$\text{ĐA: } m = \pm 2$$

43. (D-2012) Cho hàm số

$$y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3} \quad (33)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (33) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ .

$$\text{ĐA: } m = \frac{2}{3}$$

44. (A-2013) Cho hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1 \quad (34)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (34) khi  $m = 0$ .  
 b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số (34) nghịch biến trong  $(0; +\infty)$ .

**ĐA:**  $m \leq -1$

45. **(B-2013)** Cho hàm số

$$y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx \quad (35)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (35) khi  $m = -1$ .  
b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (35) có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$  sao cho đường thẳng  $AB$  vuông góc với đường thẳng  $y = x + 2$ .

**ĐA:**  $m = 0, m = 2$

46. **(D-2013)** Cho hàm số

$$y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1 \quad (36)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (36) khi  $m = 1$ .  
b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = -x + 1$  cắt đồ thị hàm số (36) tại ba điểm phân biệt.

**ĐA:**  $m < 0, m > \frac{8}{9}$

47. **(D-2013NC)** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x + 1} \text{ trên đoạn } [0; 2]$$

**ĐA:**  $\min y = 1; \max y = 3$

48. **(A-2014)** Cho hàm số

$$y = \frac{x+2}{x-1} \quad (37)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (37).  
b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $y = -x$  bằng  $\sqrt{2}$

**ĐA:**  $M(0; -2), M(-2; 0)$

49. **(B-2014)** Cho hàm số

$$y = x^3 - 3mx + 1 \quad (38)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (38) khi  $m = 1$ .  
b) Cho điểm  $A(2; 3)$ . Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (38) có hai điểm cực trị  $B$  và  $C$  sao cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

$$\text{ĐA: } m = \frac{1}{2}$$

50. **(D-2014)** Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x - 2 \quad (39)$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (39).  
b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đồ thị sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại  $M$  có hệ số góc bằng 9.

$$\text{ĐA: } M(2; 0), M(-2; -4)$$

51. **(2015)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x$ .

52. **(2015)** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên  $[1; 3]$ .

$$\text{ĐA: } \max y = 5; \min y = 4$$

## 2 Lượng giác

1. (A-2002) Giải phương trình:

$$5 \left( \sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$$

$$\text{ĐA: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

2. (B-2002) Giải phương trình:

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{k\pi}{9}; x = \frac{k\pi}{2}$$

3. (D-2002) Tìm  $x$  thuộc đoạn  $[0; 14]$  nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$$

$$\text{ĐA: } \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$$

4. (A-2003) Giải phương trình:

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

5. (B-2003) Giải phương trình:

$$\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\text{ĐA: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

6. (D-2003) Giải phương trình:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

7. (A-2004) Cho tam giác  $ABC$  không tù thỏa mãn điều kiện:

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3$$

Tính ba góc của tam giác.

$$\text{ĐA: } A = 90^\circ, B = C = 45^\circ$$

8. (B-2004) Giải phương trình:

$$5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

9. (D-2004) Giải phương trình:

$$(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

$$\text{ĐA: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

10. (A-2005) Giải phương trình:

$$\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$\text{ĐA: } x = k\frac{\pi}{2}$$

11. (B-2005) Giải phương trình:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\mathbf{DA:} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

12. **(D-2005)** Giải phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0$$

$$\mathbf{DA:} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

13. **(A-2006)** Giải phương trình:

$$\frac{2 \left( \cos^6 x + \sin^6 x \right) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$$

$$\mathbf{DA:} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

14. **(B-2006)** Giải phương trình:

$$\cot x + \sin x \left( 1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$$

$$\mathbf{DA:} \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

15. **(D-2006)** Giải phương trình:

$$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$\mathbf{DA:} \quad x = k\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

16. **(A-2007)** Giải phương trình:

$$(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

$$\mathbf{DA:} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi$$

17. (B-2007) Giải phương trình:

$$2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

18. (D-2007) Giải phương trình:

$$\left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

19. (A-2008) Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \left( x - \frac{3\pi}{2} \right)} = 4 \sin \left( \frac{7\pi}{4} - x \right)$$

$$\text{ĐA: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

20. (B-2008) Giải phương trình:

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

21. (D-2008) Giải phương trình:

$$2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$$

$$\text{ĐA: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

22. (A-2009) Giải phương trình:

$$\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

$$\text{ĐA: } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

23. (B-2009) Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

$$\text{ĐA: } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$$

24. (D-2009) Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

25. (A-2010) Giải phương trình:

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$\text{ĐA: } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

26. (B-2010) Giải phương trình:

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

27. (D-2010) Giải phương trình:

$$\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi;$$

28. (A-2011) Giải phương trình:

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

29. (B-2011) Giải phương trình:

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

30. (D-2011) Giải phương trình:

$$\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

31. (A-2012) Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

32. (B-2012) Giải phương trình:

$$2 \left( \cos x + \sqrt{3} \sin x \right) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3}$$

33. (D-2012) Giải phương trình:

$$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$$

34. (A-2013) Giải phương trình:

$$1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{ĐA: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

35. (B-2013) Giải phương trình:

$$\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$$

$$\text{ĐA: } x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}$$

36. (D-2013) Giải phương trình:

$$\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

37. (A-2014) Giải phương trình:

$$\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$$

$$\text{ĐA: } x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

38. (B-2014) Giải phương trình:

$$\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$$

$$\text{ĐA: } x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

39. (2015) Tính giá trị của biểu thức  $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$  biết  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

$$\text{ĐA: } \frac{14}{9}$$

### 3 Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình

1. (A-2002) Cho phương trình:

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (40)$$

- a) Giải phương trình với  $m = 2$   
b) Tìm  $m$  để phương trình (40) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

**ĐA:** a)  $x = 3^{\pm\sqrt{3}}$ ; b)  $0 \leq m \leq 2$

2. (B-2002) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

**ĐA:**  $(1; 1), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3. (B-2002) Giải bất phương trình:  $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$

**ĐA:**  $(\log_9 73; 2]$

4. (D-2002) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}.$$

**ĐA:**  $(0; 1), (2; 4)$

5. (D-2002) Giải bất phương trình:  $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

**ĐA:**  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

6. (A-2003) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (1; 1), \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right), \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

7. (B-2003) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2 + 2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (1; 1)$$

8. (D-2003) Giải phương trình:  $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

$$\text{ĐA: } x = -1, x = 2$$

9. (A-2004) Giải bất phương trình:

$$\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$$

$$\text{ĐA: } x > 10 - \sqrt{34}$$

10. (A-2004) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_1(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (3; 4)$$

11. **(D-2004)** Tìm  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$$

12. **(D-2004)** Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

13. **(A-2005)** Giải bất phương trình:

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$$

$$\text{ĐA: } [2; 10]$$

14. **(B-2005)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (1; 1), (2; 2)$$

15. **(D-2005)** Giải phương trình:  $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4$

$$\text{ĐA: } x = 3$$

16. **(A-2006)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (3; 3)$$

17. (A-2006PB) Giải phương trình:

$$3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$$

$$\text{ĐA: } x = 1$$

18. (B-2006PB) Giải bất phương trình:

$$\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\text{ĐA: } m \geq \frac{9}{2}$$

19. (D-2006) Giải phương trình:  $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\text{ĐA: } x = 1; x = 2 - \sqrt{2}$$

20. (D-2006) Chứng minh rằng với mọi giá trị  $a > 0$ , hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

21. (D-2006PB) Giải phương trình:

$$2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$$

$$\text{ĐA: } x = 0; x = 1$$

22. (A-2007PB) Giải phương trình:

$$2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$$

$$\text{ĐA: } \left(\frac{3}{4}; 3\right]$$

23. **(B-2007)** Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số  $m$ , phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$$

24. **(B-2007PB)** Giải phương trình:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \pm 1$$

25. **(D-2007)** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \text{ hoặc } m \geq 22$$

26. **(D-2007PB)** Giải phương trình:

$$\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$$

$$\text{ĐA: } x = \log_2 3$$

27. **(A-2008)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } \left( \sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \right), \left( 1; -\frac{3}{2} \right)$$

28. (A-2008PB) Giải phương trình:

$$\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$$

$$\text{ĐA: } x = 2; x = \frac{5}{4}$$

29. (B-2008) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } \left(-4; \frac{17}{4}\right)$$

30. (B-2008PB) Giải bất phương trình:

$$\log_{0,7} \left( \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$$

$$\text{ĐA: } (-4; -3) \cup (8; +\infty)$$

31. (D-2008) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (5; 2)$$

32. (D-2008PB) Giải bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 2$$

$$\text{ĐA: } [2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2; 2 + \sqrt{2}]$$

33. (A-2009) Giải phương trình:  $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$

**ĐA:**  $x = -2$

34. **(A-2009NC)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$$

**ĐA:**  $(2; 2), (-2; -2)$

35. **(B-2009)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

**ĐA:**  $\left(1; \frac{1}{3}\right), (3; 1)$

36. **(D-2009)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

**ĐA:**  $(1; 1), \left(2; -\frac{3}{2}\right)$

37. **(A-2010)** Giải bất phương trình

$$\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$$

**ĐA:**  $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

38. **(A-2010)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

39. (B-2010) Giải hệ phương trình:  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

$$\text{ĐA: } x = 5$$

40. (B-2010NC) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } \left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

41. (D-2010) Giải phương trình:

$$4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$$

$$\text{ĐA: } x = 1; x = 2$$

42. (D-2010NC) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 4x = y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (3; 1)$$

43. (A-2011) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (1; 1), (-1; -1), \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}; -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

44. (B-2011) Giải phương trình:

$$3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$$

$$\text{ĐA: } x = \frac{6}{5}$$

45. (D-2011) Giải phương trình:

$$\log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$$

$$\text{ĐA: } x = 0$$

46. (D-2011) Tìm  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

47. (A-2012) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x62 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

48. (B-2012) Giải bất phương trình:  $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$

$$\text{ĐA: } \left[0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$$

49. (D-2012) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (1; 1), \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5} \right), \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5} \right)$$

50. (A-2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (1; 0), (2; 1)$$

51. (B-2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (0; 1), (1; 2)$$

52. (B-2013NC) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ĐA: } (3; 1)$$

53. (D-2013) Giải phương trình:

$$2\log_2 x + \log_1(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$$

$$\text{ĐA: } 1 + \ln 2$$

54. (A-2014) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases}$$

**ĐA:** (3; 3)

55. **(B-2014)** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \end{cases}$$

$$\textbf{ĐA: } (3; 1), \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

56. **(D-2014)** Giải phương trình:

$$\log_2(x-1) - 2\log_4(3x-2) + 2 = 0$$

$$\textbf{ĐA: } x = 2$$

57. **(D-2014)** Giải bất phương trình:

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12$$

$$\textbf{ĐA: } [-2; 2]$$

58. **(2015)** Giải phương trình  $\log_2(x^2 + x + 2) = 3$ .

$$\textbf{ĐA: } x = 2; x = -3$$

59. **(2015)** Giải phương trình trên tập số thực:

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} = (x+1)(\sqrt{x+2} - 2)$$

$$\textbf{ĐA: } x = 2, x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

## 4 Tích phân và ứng dụng

1. (A-2002) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = |x^2 - 4x + 3|; y = x + 3$$

$$\text{ĐA: } S = \frac{109}{6}$$

2. (B-2002) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}; y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{ĐA: } S = 2\pi + \frac{4}{3}$$

3. (D-2002) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{-3x-1}{x-1}$  và hai trục tọa độ.

$$\text{ĐA: } -1 + 4 \ln \frac{4}{3}$$

4. (A-2003) Tính tích phân  $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

$$\text{ĐA: } \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$$

5. (B-2003) Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

$$\text{ĐA: } \frac{1}{2} \ln 2$$

6. **(D-2003)** Tính tích phân  $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$

**ĐA:** 1

7. **(A-2004)** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$

**ĐA:**  $\frac{11}{3} - 4 \ln 2$

8. **(B-2004)** Tính tích phân  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$

**ĐA:**  $\frac{116}{135}$

9. **(D-2004)** Tính tích phân  $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$

**ĐA:**  $3 \ln 3 - 2$

10. **(A-2005)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

**ĐA:**  $\frac{34}{27}$

11. **(B-2005)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$

**ĐA:**  $2 \ln 2 - 1$

12. **(D-2005)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$

**ĐA:**  $e + \frac{\pi}{4} - 1$

13. **(A-2006)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$

**ĐA:**  $x = \frac{2}{3}$

14. **(B-2006)** Tính tích phân  $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

**ĐA:**  $\ln \frac{3}{2}$

15. **(D-2006)** Tính tích phân  $I = \int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx$

**ĐA:**  $\frac{5 - 3e^2}{4}$

16. **(A-2007)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = (e + 1)x; y = (1 + e^x)x$$

**ĐA:**  $\frac{e}{2} - 1$

17. **(B-2007)** Cho hình phẳng  $H$  giới hạn bởi các đường:

$$y = x \ln x, y = 0, x = e$$

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $H$  quanh trục  $Ox$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}$$

18. **(D-2007)** Tính tích phân  $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$

$$\text{ĐA: } \frac{5e^4 - 1}{32}$$

19. **(A-2008)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$

$$\text{ĐA: } \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}}$$

20. **(B-2008)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{x}{4}\right) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$

$$\text{ĐA: } \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$$

21. **(D-2008)** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

$$\text{ĐA: } \frac{3 - 2 \ln 2}{16}$$

22. (A-2009) Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$

**ĐA:**  $\frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

23. (B-2009) Tính tích phân  $I = \int_0^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

**ĐA:**  $\frac{1}{4} \left( 3 + \ln \frac{27}{16} \right)$

24. (D-2009) Tính tích phân  $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1} dx$

**ĐA:**  $\ln(e^2 + e + 1) - 2$

25. (A-2010) Tính tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$

**ĐA:**  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$

26. (B-2010) Tính tích phân  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$

**ĐA:**  $-\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$

27. (D-2010) Tính tích phân  $I = \int_1^e \left( 2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx$

$$\mathbf{ĐA:} \frac{e^2}{2} - 1$$

$$28. \text{ (A-2011) Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$$

$$\mathbf{ĐA:} \frac{\pi}{4} + \ln \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) \right)$$

$$29. \text{ (B-2011) Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\mathbf{ĐA:} \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$30. \text{ (D-2011) Tính tích phân } I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$$

$$\mathbf{ĐA:} \frac{34}{3} + 10 \ln \frac{3}{5}$$

$$31. \text{ (A-2012) Tính tích phân } I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$$

$$\mathbf{ĐA:} \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$$

$$32. \text{ (B-2012) Tính tích phân } I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$\mathbf{ĐA:} \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$$

33. (D-2012) Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$

**ĐA:**  $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$

34. (A-2013) Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$

**ĐA:**  $\frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$

35. (B-2013) Tính tích phân  $I = \int_0^1 x\sqrt{2 - x^2} dx$

**ĐA:**  $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

36. (D-2013) Tính tích phân  $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$

**ĐA:**  $1 + \ln 2$

37. (A-2014) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x^2 - x + 3$  và đường thẳng  $y = 2x + 1$ .

**ĐA:**  $\frac{1}{6}$

38. (B-2014) Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$

**ĐA:**  $1 + \ln 3$

39. (D-2014) Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx$

**ĐA:**  $\frac{3}{4}$

40. (2015) Tính tích phân  $I = \int_0^1 (x-3)e^x dx$

**ĐA:**  $4 - 3e$

## 5 Hình học tổng hợp trong không gian

1. (**A-2002**) Cho hình chóp chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SB, SC$ . Mặt phẳng  $(AMN)$  vuông góc với  $(SBC)$ . Tính theo  $a$  diện tích tam giác  $AMN$ .

$$\text{ĐA: } \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$$

2. (**B-2002**) Cho lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $BB', CD, A'D'$ . Tính khoảng cách giữa  $A'B$  và  $B'D$ . Tính góc giữa  $MP$  và  $C'N$ .

$$\text{ĐA: } \frac{a}{\sqrt{6}}, 90^\circ$$

3. (**D-2002**) Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AD$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $AC = AD = 4\text{cm}$ ,  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $(BCD)$ .

$$\text{ĐA: } \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

4. (**A-2003**) Cho lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc phẳng nhị diện  $[B, A'C, D]$

$$\text{ĐA: } 120^\circ$$

5. (**B-2003**) Cho lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AA', CC'$ . Chứng minh rằng  $B', M, D, N$  đồng phẳng. Tính  $AA'$  theo  $a$  để  $B'MND$  là hình vuông.

$$\text{ĐA: } AA' = a\sqrt{2}$$

6. (**D-2003**) Hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Trên  $\Delta$  lấy  $AB = a$ . Trong  $(P)$  lấy  $C$ , trong  $(Q)$  lấy  $D$  sao cho  $AC = BD = AB$  và  $AC, BD$  cùng vuông góc với  $\Delta$ . Tính bán kính cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  và khoảng cách từ  $A$  đến  $(BCD)$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } R = \frac{a\sqrt{3}}{2}, d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

7. **(B-2004)** Cho chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , cạnh đáy bằng  $a$ . Góc giữa cạnh bên và đáy là góc nhọn  $\varphi$ . Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABCD)$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } \tan \alpha = \sqrt{2} \tan \varphi, V = \frac{a^3 \sqrt{2} \tan \phi}{6}$$

8. **(A-2006PB)** Cho hình trụ tâm đáy là  $O, O'$ . Bán kính đáy bằng chiều cao hình trụ và cùng bằng  $a$ . Trên đường tròn  $(O)$  lấy điểm  $A$ , trên đường tròn  $(O')$  lấy điểm  $B$  sao cho  $AB = 2a$ . Tính  $V_{OO'AB}$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

9. **(B-2006PB)** Cho chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $AB = SA = a, AD = a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với  $(ABCD)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD, SC$ . Đường thẳng  $BM$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $I$ . Chứng minh hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SMB)$  vuông góc. Tính  $V_{ANIB}$

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$$

10. **(D-2006PB)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với đáy. Giả sử  $M, N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB, SC$ . Tính  $V_{A.BCMN}$

$$\text{ĐA: } V = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50}$$

11. **(A-2007PB)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Tam giác  $SAD$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SB, BC, CD$ . Chứng minh  $AM \perp BP$  và tính  $V_{CMNP}$

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$$

12. **(B-2007PB)** Cho chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $D$  qua trung điểm của  $SA$ ;  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AE, BC$ . Chứng minh  $MN \perp BD$  và tính  $d_{(MN, AC)}$

$$\text{ĐA: } d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

13. **(D-2007PB)** Cho chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình thang,  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ ,  $BA = BC = a, AD = 2a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = a\sqrt{2}$ ,  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SB$ . Chứng minh  $SCD$  vuông và tính  $d = d_{(H, (SCD))}$ .

$$\text{ĐA: } d = \frac{a}{3}$$

14. **(A-2008PB)** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có cạnh bên bằng  $2a$ . Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu của  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm  $H$  của  $BC$ . Tính  $V_{A'.ABC}$  và cosin góc giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $B'C'$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3}{2}; \cos \varphi = \frac{1}{4}$$

15. **(B-2008PB)** Cho chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ ,  $(SAB)$  vuông góc với đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC$ . Tính  $V_{SBMDN}$  và cosin góc giữa hai đường thẳng  $SM, DN$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}; \cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

16. **(D-2008)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông,  $AB = BC = a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM, B'C'$

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}, d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

17. **(A-2009)** Cho chóp  $S.ABCD$ , có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $AB = AD = 2a$ ,  $CD = a$ , góc giữa  $(SBC)$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AD$ . Hai mặt phẳng  $(SBI)$  và  $(SCI)$  cùng vuông góc với  $(ABCD)$ . Tính  $V_{ABCD}$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$

18. **(B-2009)** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $BB' = a$ , góc giữa cạnh bên  $BB'$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ , tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Hình chiếu của  $B'$  lên  $(ABC)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tính  $V_{A'ABC}$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{9a^3}{208}$$

19. **(D-2009)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ ,  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ ,  $AC' = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $A'C'$ ,  $AM$  cắt  $A'C$  tại  $I$ . Tính  $V_{IABC}$  và  $d_{(A,(IBC))}$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{4a^3}{9}; d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

20. **(A-2010)** Cho chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, AD$ ;  $H$  là giao điểm của  $CN$  và  $DM$ . Đường thẳng  $SH$  vuông góc với đáy và  $SH = a\sqrt{3}$ . Tính  $V_{S.CDMN}$  và  $d_{(DM,SC)}$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}; d = \frac{2a\sqrt{3}}{19}$$

21. **(B-2010)** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $A'BC$ . Tính  $V_{ABC.A'B'C'}$  và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $GABC$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{18}; R = \frac{7a}{12}$$

22. (D-2010) Cho chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA = a$ . Hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng đáy là điểm  $H$  trên  $AC$  sao cho  $AH = \frac{AC}{4}$ .  $CM$  là đường cao của tam giác  $SAC$ . Chứng minh rằng  $M$  là trung điểm  $AC$  và tính  $V_{SMBC}$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$

23. (A-2011) Cho chóp  $S.ABC$ , có tam giác  $BAC$  vuông cân,  $AB = BC = 2a$ . Hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$  cùng vuông góc với  $(ABC)$ ;  $M$  là trung điểm  $AB$ , mặt phẳng đi qua  $SM$  và song song với  $BC$  cắt  $AC$  tại  $N$ . Góc giữa  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính  $V_{S.BCNM}$  và  $d_{(AB,SN)}$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } V = a^3\sqrt{3}; d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

24. (B-2011) Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu của  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  trùng với giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ADD'A')$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm  $B'$  đến mặt phẳng  $(A'BD)$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{3a^3}{2}; d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

25. (D-2011) Cho chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BA = 3a$ ,  $BC = 4a$ . Mặt phẳng  $(SBC)$  vuông góc với đáy. Biết  $SB = 2a\sqrt{3}$ ,  $\widehat{SBC} = 30^\circ$ . Tính thể tích khối chóp và khoảng cách từ  $B$  đến  $(SAC)$ .

$$\text{ĐA: } V = 2a^3\sqrt{3}; d = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$$

26. **(A-2012)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là điểm  $H$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $HA = 2HB$ . Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$  và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$  theo  $a$

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}; d = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

27. **(B-2012)** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  với  $SA = 2a$ ,  $AB = a$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên cạnh  $SC$ . Chứng minh  $SC$  vuông góc với mp( $ABH$ ). Tính thể tích khối chóp  $S.ABH$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{7a^3\sqrt{11}}{96}$$

28. **(D-2012)** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông, tam giác  $A'AC$  vuông cân,  $A'C = a$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $ABB'C'$  và khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BCD')$  theo  $a$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}; d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

29. **(A-2013)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ,  $SBC$  là tam giác đều cạnh  $a$  và mặt bên  $SBC$  vuông góc với đáy. Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABC$  và khoảng cách từ  $C$  đến mặt phẳng  $(SAB)$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3}{16}; d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$$

30. **(B-2013)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo  $a$  thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  và khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}; d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

31. **(D-2013)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$  và  $\widehat{SMA} = 45^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  và khoảng cách từ điểm  $D$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3}{4}; d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

32. **(A-2014)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SD = \frac{3a}{2}$ , hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBD)$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3}{3}; d = \frac{2a}{3}$$

33. **(B-2014)** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , góc giữa đường thẳng  $A'C$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(ACC'A')$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}; d = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$$

34. **(D-2014)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ , mặt bên  $SBC$  là tam giác đều cạnh  $a$  và mặt phẳng  $(SBC)$  vuông góc với mặt đáy. Tính theo  $a$  thể tích của khối chóp  $S.ABC$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA, BC$ .

$$\text{ĐA: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}; d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

35. **(2015)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . góc giữa đường thẳng  $SC$  và  $(ABCD)$  bằng  $45^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$  và khoảng cách giữa  $SB, AC$ .

$$\mathbf{DA:} \ a)\frac{a^3\sqrt{2}}{3}; b)d = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

## 6 Bất đẳng thức

1. **(A-2003)** Cho  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $x + y + z \leq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

**HD:** Dùng phương pháp vector

2. **(A-2005)** Cho  $x, y, z$  là các số thực khác 0 thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1$$

**HD:** Sử dụng BĐT  $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3. **(B-2005)** Chứng minh rằng với mọi  $x$ , ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$$

**HD:** Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số

4. **(D-2005)** Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

**HD:** Sử dụng BĐT Cauchy:  $1 + x^3 + y^3 \geq 3xy$

5. **(A-2006)** Cho  $x, y$  khác 0 và  $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

**HD:** Đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ , ta có  $A = (a + b)^2$ ;  $\max A = 16$

6. **(B-2006)** Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$$

**HD:** Sử dụng phương pháp tọa độ. Xét hàm số  
 $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y$ ;  $\min A = 2 + \sqrt{3}$

7. **(A-2007)** Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $xyz = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

**HD:** Đánh giá  $x^2(y+z) \geq 2x^2\sqrt{yz} = 2x\sqrt{x}$ ;  $\min P = 2$

8. **(B-2007)** Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

**HD:** Biến đổi  $P = \sum \frac{x^2}{2} + \frac{\sum x^2}{xyz}$ . Dùng BĐT Cauchy. Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}; \min P = \frac{9}{2}$$

9. **(D-2007)** Cho các số thực  $a \geq b > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$$

**HD:** ln hai vế. Xét hàm số  $f(x) = \frac{\ln(1+4x)}{x}$

10. **(B-2008)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

**HD:** Quy về 1 biến. Đặt  $x = ty$ ;  $-6 \leq P \leq 3$

11. **(D-2008)** Cho  $x, y$  là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x - y)(1 - xy)}{(1 + x)^2(1 + y)^2}$$

$$\mathbf{HD:} \quad -\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$$

12. **(A-2009)** Cho  $x, y, z$  là số thực dương và  $x(x + y + z) = 3yz$ . Chứng minh rằng:

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$$

13. **(B-2009)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

**HD:** Đặt  $t = x^2 + y^2$  và xét hàm số  $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ ;  $\min A = \frac{9}{16}$

14. **(D-2009)** Cho  $x, y \geq 0$  và  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

**HD:** Đặt  $t = xy$ . Xét hàm số  $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ ;  $\frac{25}{2} \leq S \leq \frac{191}{16}$

15. **(B-2010)** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm và  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = 3(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2) + 3(ab + ac + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**HD:** Đặt  $t = ab + bc + ca$ . Xét hàm số  $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t}$  trên  $\left[0; \frac{1}{2}\right)$ ;  $\min M = 2$

16. **(D-2010)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$$

**ĐA:**  $\min y = \sqrt{2}$

17. **(A-2011)** Cho ba số thực  $x, y, z$  thuộc đoạn  $[1; 4]$  thỏa mãn:  $x \geq y, x \geq z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{x}{2x + 3y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x}$

**HD:** Áp dụng  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$  và xét hàm số  $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 + 3} + \frac{2}{1+t}$  trên  $[1; 2]$ ;  $\min P = \frac{34}{33}$

18. **(B-2011)** Cho  $a, b$  là các số thực dương thỏa mãn

$$2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

**HD:** Đặt  $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  và xét hàm số  $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ ;  
 $\min P = -\frac{23}{4}$

19. **(A-2012)** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$$

**HD:** Áp dụng  $3^t \geq t + 1, \forall t \geq 0$ ;  $\min P = 3$

20. **(B-2012)** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 0$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^5 + y^5 + z^5$$

**HD:**  $yz = x^2 - \frac{1}{2}$ ; xét hàm số  $f(x) = 2x^3 - x$  trên  $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ ;  
 $\max P = \frac{5\sqrt{6}}{36}$

21. **(D-2012)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$$

**HD:** Đặt  $t = x + y$  và xét hàm số  $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$  trên  $[0; 8]$ ;  $\min A = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$

22. **(A-2013)** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a + c)(b + c) = 4c^2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{32a^3}{(b + 3c)^3} + \frac{32b^3}{(a + 3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$$

**HD:** Đánh giá  $P \geq (x + y - 1)^3 - \sqrt{(x + y)^2 + 2(x + y) - 6}$ ,  
 $\min P = 1 - \sqrt{2}$

23. **(B-2013)** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

**HD:** Đặt  $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}$ . Xét hàm số  $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2 - 4)}$  trên  $(2; +\infty)$ ;  $\max P = \frac{5}{8}$

24. **(D-2013)** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy \leq y - 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$$

**HD:** Đặt  $t = \frac{x}{y}$ . Xét hàm số  $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$  trên  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ ;  $\max P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$

25. **(A-2014)** Cho  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{x^2 + xz + x + 1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}$$

**HD:** Đặt  $t = x + y + z$ . Khảo sát hàm số  $f(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36}$  trên  $[0; \sqrt{6}]$ ;  $\max P = \frac{5}{9}$

26. **(B-2014)** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn

$$(a+b)c > 0$$

. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}$$

**HD:** Đánh giá  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$ ;  $\min P = \frac{3}{2}$

27. **(D-2014)** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$ .  
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

**HD:** Đặt  $t = x + y$  và xét hàm số  $f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$  trên  
 $[2; 4]; \min P = \frac{7}{8}$

28. **(2015)** Cho các số thực  $a, b, c$  thuộc đoạn  $[1; 3]$  và  $a + b + c = 6$ . Tìm  
giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc.$$

**HD:** Đặt  $t = ab + bc + ca, t \in [11; 12]$ . Xét hàm số:  
 $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}, \max P = \frac{160}{11}$

## 7 Phương pháp tọa độ trong không gian

Các bài toán sau đều xét trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ .

1. **(A-2002)** Cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}, \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

- a) Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa  $\Delta_1$  và song song với  $\Delta_2$ .  
b) Cho điểm  $M(2; 1; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  thuộc  $\Delta_2$  để  $MH$  nhỏ nhất.

**ĐA:**  $H(2; 3; 3)$

2. **(D-2002)** Cho đường thẳng

$$d_m : \begin{cases} (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

( $m$  là tham số) và mặt phẳng  $(P) : 2x - y + 2 = 0$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $d_m$  song song với mặt phẳng  $(P)$ .

**ĐA:**  $m = -\frac{1}{2}$

3. **(A-2003)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(a; 0; 0)$ ,  $D(0; a; 0)$ ,  $A'(0; 0; b)$  với  $a > 0, b > 0$ .  
a) Tính theo  $a$  và  $b$  thể tích khối tứ diện  $BDA'M$   
b) Tìm tỉ số  $\frac{a}{b}$  để hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(MBD)$  vuông góc.

**ĐA:**  $V = \frac{a^2b}{4}; a = b$

4. **(B-2003)** Cho các điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 8)$  và  $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tính khoảng cách từ  $I$  đến đường thẳng  $OA$ .

**ĐA:**  $d = 5$

5. **(D-2003)** Cho đường thẳng  $d_k : \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  ( $k$  là tham số). Tìm  $k$  để đường thẳng  $d_k$  vuông góc với mặt phẳng

$$(P) : x - y - 2z + 5 = 0$$

**ĐA:**  $k = 1$

6. **(A-2004)** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm là gốc tọa độ  $O$ . Biết  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 2\sqrt{2})$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $SC$ .
- a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$ ,  $BM$ .
- b) Đường thẳng  $SD$  cắt mặt phẳng  $(ABM)$  tại  $N$  tính thể tích khối chóp  $S.ABMN$

**ĐA:** a)  $30^\circ$ ,  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ; b)  $\sqrt{2}$

7. **(B-2004)** Cho điểm  $A(-4; -2; 4)$  và đường thẳng  $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ .

Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A$  cắt và vuông góc với đường thẳng  $d$ .

**ĐA:**  $d' : \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$

8. **(D-2004)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(-a; 0; 0)$ ,  $C(0; 1; 0)$ ,  $B'(-a; 0; b)$  với  $a > 0, b > 0$ .
- a) Tính theo  $a, b$  khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B'C$ ,  $AC'$ .
- b) Khi  $a + b = 4$  tìm  $a, b$  để khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B'C$ ,  $AC'$  lớn nhất.

$$\text{ĐA: } a) \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; b) a = b = 2$$

9. (**D-2004**) Cho ba điểm  $A(2; 0; 1)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 1; 1)$  và mặt phẳng  $(P) : x + y + z - 2 = 0$ . Viết phương trình mặt cầu qua  $A, B, C$  và có tâm thuộc mặt phẳng  $(P)$

$$\text{ĐA: } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

10. (**A-2005**) Cho đường thẳng

$$d : \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 3}{1}$$

và mặt phẳng

$$(P) : 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

- a) Tìm điểm  $I$  thuộc đường thẳng  $d$  sao cho khoảng cách từ  $I$  đến mặt phẳng  $(P)$  bằng 2  
 b) Tìm giao điểm  $A$  của  $d$  và  $(P)$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$ , đi qua  $A$  và vuông góc với  $d$ .

$$\text{ĐA: } a) I_1(-3; 5; 7), I_2(3; -7; 1); b) \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$$

11. (**B-2005**) Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $A(0; -3; 0)$ ,  $B(4; 0; 0)$ ,  $C(0; 3; 0)$ ,  $B'(4; 0; 4)$ .  
 a) Tìm tọa độ  $A', C'$ ; viết phương trình mặt cầu tâm  $A$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(BCC')$   
 b) Gọi  $M$  là trung điểm  $A'B'$  viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A, M$  và song song với  $BC'$ . Gọi  $N$  là giao điểm của  $A'C'$  và  $(P)$ . Tính độ dài  $MN$ .

$$\text{ĐA: } a) x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25};$$

$$b) (P) : x + 4y - 2z + 12 = 0, MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

12. (D-2005) Cho 2 đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}; d_2 : \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}.$$

- a) Chứng minh hai đường thẳng  $d_1, d_2$  song song.  
 b) Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa  $d_1, d_2$ .  
 c) Gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của  $d_1, d_2$  với mặt phẳng  $(Oxy)$ .  
 Tính diện tích tam giác  $OAB$ .

**ĐA:** b)  $15x + 11y - 17z - 10 = 0$ ; c)  $S = 5$

13. (A-2006) Cho lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , có  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $D(0;1;0)$ ,  $A'(0;0;1)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ .

- a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'C$  và  $MN$ .  
 b) Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa  $A'C$  và tạo với mặt phẳng  $(Oxy)$  một góc  $\alpha$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

**ĐA:** a)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ; b)  $(P_1) : 2x - y + z - 1 = 0, (P_2) : x - 2y - z + 1 = 0$

14. (B-2006) Cho điểm  $A(0;1;2)$  và hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}, d_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}.$$

- a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua  $A$  và song song với hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .  
 b) Tìm  $M, N$  lần lượt thuộc  $d_1, d_2$  sao cho  $A, M, N$  thẳng hàng.

**ĐA:** a)  $x + 3y + 3z - 13 = 0$ ; b)  $M(0;1;-1), N(0;1;1)$

15. (D-2006) Cho điểm  $A(1;2;3)$  và hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, d_2 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}.$$

- a) Tìm tọa độ  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $d_1$ .  
 b) Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$ .

$$\text{ĐA: } a) A'(-1; -4; 1); b) d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$$

16. (A-2007) Cho 2 đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}, d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

- a) Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.  
 b) Viết phương trình đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng

$$(P): 7x + y - 4z = 0$$

và cắt cả hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

$$\text{ĐA: } \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}.$$

17. (B-2007) Cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$$

và mặt phẳng

$$(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$$

- a) Viết phương trình mặt phẳng  $(Q)$  chứa trục  $Ox$  và cắt  $(S)$  theo một đường tròn có bán kính bằng 3.  
 b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt cầu  $(S)$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$  lớn nhất.

$$\text{ĐA: } a) y - 2z = 0; b) M(-1; -1; -3)$$

18. **(D-2007)** Cho hai điểm  $A(1; 4; 2)$ ,  $B(-1; 2; 4)$  và đường thẳng:

$$\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$$

- a) Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua trọng tâm  $G$  của tam giác  $OAB$  và vuông góc với mặt phẳng  $(OAB)$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất.

$$\text{ĐA: } a) \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}; b) M(-1; 0; 4)$$

19. **(A-2008)** Cho hai điểm  $A(2; 5; 3)$  và đường thẳng:

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

- a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên đường thẳng  $d$ .  
b) Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến  $(\alpha)$  lớn nhất.

$$\text{ĐA: } a) H(3; 1; 4); b) x - 4y + z - 3 = 0$$

20. **(B-2008)** Cho ba điểm  $A(0; 1; 2)$ ,  $B(2; -2; 1)$ ,  $C(-2; 0; 1)$ .

- a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm  $(ABC)$ .  
b) Tìm tọa độ của điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $2x + 2y + z - 3 = 0$  sao cho  $MA = MB = MC$ .

$$\text{ĐA: } a) x + 2y - 4z + 6 = 0; b) M(2; 3; -7)$$

21. **(D-2008)** Cho bốn điểm  $A(3; 3; 0)$ ,  $B(3; 0; 3)$ ,  $C(0; 3; 3)$ ,  $D(3; 3; 3)$ .

- a) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm  $A, B, C, D$ .  
b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

$$\text{ĐA: } a) x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0; b) H(2; 2; 2)$$

22. **(A-2009CB)** Cho mặt phẳng

$$(P) : 2x - 2y - z - 4 = 0$$

và mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

Chứng minh rằng mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và bán kính đường tròn đó.

$$\text{ĐA: } H(3; 0; 2), r = 4$$

23. **(A-2009NC)** Cho mặt phẳng  $(P) : x - 2y + 2z - 1 = 0$  và hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}, \Delta_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Xác định tọa độ điểm  $M$  thuộc  $\Delta_1$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta_2$  và khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$  bằng nhau.

$$\text{ĐA: } M \left( \frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35} \right)$$

24. **(B-2009CB)** Cho tứ diện  $ABCD$  có các đỉnh  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-2; 1; 3)$ ,  $C(2; -1; 1)$  và  $D(0; 3; 1)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A, B$  sao cho khoảng cách từ  $C$  đến  $(P)$  bằng khoảng cách từ  $D$  đến  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } 4x + 2y + 7z - 15; 2x + 3z - 5 = 0$$

25. **(B-2009NC)** Cho mặt phẳng hai điểm  $A(-3; 0; 1)$ ,  $B(1; -1; 3)$  và mặt phẳng

$$(P) : x - 2y + 2z - 5 = 0$$

Trong các đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $(P)$ , hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ  $B$  đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

$$\text{ĐA: } \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$$

26. **(D-2009CB)** Cho các điểm  $A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0)$  và mặt phẳng

$$(P) : x + y + z - 20 = 0$$

Xác định tọa độ điểm  $D$  thuộc đường thẳng  $AB$  sao cho đường thẳng  $CD$  song song với  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$$

27. **(D-2009NC)** Cho mặt phẳng

$$(P) : x - 2y + 2z - 1 = 0$$

và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$$

Viết phương trình đường thẳng  $d$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  sao cho  $d$  cắt và vuông góc với  $\Delta$ .

$$\text{ĐA: } \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$$

28. **(A-2010CB)** Cho mặt phẳng

$$(P) : x - 2y + z = 0$$

và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

Gọi  $C$  là giao điểm của  $(P)$  và  $\Delta$  còn  $M$  là một điểm thuộc  $\Delta$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến  $(P)$  biết  $MC = a\sqrt{6}$

$$\text{ĐA: } \frac{1}{\sqrt{6}}$$

29. **(A-2010NC)** Cho điểm  $A(0; 0; -2)$  và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$$

Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $\Delta$ . Viết phương trình mặt cầu tâm  $A$  cắt  $\Delta$  tại  $B, C$  sao cho  $BC = 8$ .

$$\text{ĐA: } 3; x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$$

30. **(B-2010CB)** Cho ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$  với  $b, c > 0$  và mặt phẳng  $(P) : y - z + 1 = 0$ . Tìm  $b, c$  sao cho mặt phẳng  $(ABC)$  vuông góc với  $P$ , và khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

$$\text{ĐA: } b = c = \frac{1}{2}$$

31. **(B-2010NC)** Cho đường thẳng  $\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta$  bằng độ dài  $OM$ .

$$\text{ĐA: } M_1(-1; 0; 0), M_2(2; 0; 0)$$

32. **(D-2010CB)** Cho 2 mặt phẳng

$$(P) : x + y + z - 3 = 0, (Q) : x - y + z - 1 = 0$$

Viết phương trình mặt phẳng  $(R)$  vuông góc với cả  $(P), (Q)$  và cách  $O$  một khoảng bằng 2

$$\text{ĐA: } x + z \pm 2\sqrt{2} = 0$$

33. **(D-2010NC)** Cho hai đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

Tìm tọa độ điểm  $M$  trên đường thẳng  $d_1$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $d_2$  bằng 1.

**ĐA:**  $M_1(4; 1; 1), M_2(7; 4; 4)$

34. **(A-2011CB)** Cho điểm  $A(2; 0; 1), B(0; -2; 3)$  và mặt phẳng

$$(P) : 2x - y - z + 4 = 0$$

Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $(P)$  sao cho  $MA = MB = 3$ .

**ĐA:**  $M_1(0; 1; 3), M_2\left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$

35. **(A-2011NC)** Cho điểm  $A(4; 4; 0)$  và mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$$

Viết phương trình mặt phẳng  $(OAB)$ , biết điểm  $B$  thuộc  $(S)$  và tam giác  $OAB$  đều.

**ĐA:**  $x - y + z = 0, x - y - z = 0$

36. **(B-2011CB)** Cho đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$$

và mặt phẳng

$$(P) : x + y + z - 3 = 0$$

Gọi  $I$  là giao điểm của  $\Delta$  và  $(P)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $(P)$  sao cho  $MI$  vuông góc với  $\Delta$  và  $MI = 4\sqrt{14}$ .

**ĐA:**  $M_1(5; 9; -11), M_2(-3; -7; 13)$

37. **(B-2011NC)** Cho hai điểm  $A(-2; 1; 1), B(-3; -1; 2)$  và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$$

Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  sao cho tam giác  $MAB$  có diện tích bằng  $3\sqrt{5}$

$$\text{ĐA: } M_1(-2; 1; 5), M_2(-14; -35; 1)$$

38. (D-2011CB) Cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và đường thẳng:

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$ , vuông góc với đường thẳng  $d$  và cắt trục  $Ox$ .

$$\text{ĐA: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

39. (D-2011NC) Cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$$

và mặt phẳng

$$(P): 2x - y + 2z = 0$$

Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng  $\Delta$ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } (x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$$

40. (A-2012CB) Cho điểm  $I(0; 0; 3)$  và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$$

Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $I$  và cắt  $d$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $ABI$  vuông tại  $I$ .

$$\text{ĐA: } x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$$

41. (A-2012NC) Cho điểm  $A(1; -1; 2)$  đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$ :

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}, (P): x + y - 2z + 5 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt  $d$  và  $(P)$  lần lượt tại  $M$  và  $N$  sao cho  $A$  là trung điểm  $MN$

$$\text{ĐA: } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$$

42. **(B-2012CB)** Cho hai điểm  $A(2; 1; 0)$ ,  $B(-2; 3; 2)$  và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

Viết phương trình mặt cầu đi qua  $A, B$  có tâm thuộc đường thẳng  $d$ .

$$\text{ĐA: } (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$$

43. **(B-2012NC)** Cho  $A(0; 0; 3)$ ,  $M(1; 2; 0)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  và cắt các trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $B, C$  sao cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm thuộc đường thẳng  $AM$ .

$$\text{ĐA: } 6x + 3y + 4z - 12 = 0$$

44. **(D-2012CB)** Cho điểm  $I(2; 1; 3)$  và mặt phẳng

$$(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$$

Viết phương trình mặt cầu tâm  $I$  và cắt  $(P)$  theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

$$\text{ĐA: } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$$

45. **(D-2012NC)** Cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(2; -1; 0)$  và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Xác định tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho tam giác  $AMB$  vuông tại  $M$ .

$$\text{ĐA: } M_1(1; -1; 0), M_2\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

46. **(A-2013CB)** Cho điểm  $A(1; 7; 3)$  và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  và vuông góc với  $\Delta$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $\Delta$  sao cho  $AM = 2\sqrt{30}$ .

$$\text{ĐA: } M_1(3; -3; -1), M_2\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{17}{7}\right)$$

47. **(A-2013NC)** Cho mặt phẳng  $(P) : 2x + 3y + z - 11 = 0$  và mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$$

Chứng minh  $(P)$  tiếp xúc  $(S)$ . Tìm tọa độ tiếp điểm của  $(P)$  và  $(S)$ .

$$\text{ĐA: } M(3; 1; 2)$$

48. **(B-2013CB)** Cho điểm  $A(3; 5; 0)$  và mặt phẳng

$$(P) : 2x + 3y - z - 7 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $(P)$ . Tìm tọa độ điểm đối xứng của  $A$  qua  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } (-1; -1; 2)$$

49. **(B-2013NC)** Cho các điểm  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(-1; 2; 3)$  và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với hai đường thẳng  $AB$  và  $\Delta$ .

$$\text{ĐA: } \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

50. **(D-2013CB)** Cho các điểm  $A(-1; -1; -2)$ ,  $B(0; 1; 1)$  và mặt phẳng

$$(P) : x + y + z - 1 = 0$$

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $(P)$ . Viết phương trình mặt phẳng đi qua  $A, B$  và vuông góc với  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } x - 2y + z + 1 = 0$$

51. **(D-2013NC)** Cho điểm  $A(-1; 3; -2)$  và mặt phẳng

$$(P) : x - 2y - 2z + 5 = 0$$

Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $(P)$ . Viết phương trình mặt phẳng đi qua  $A$  và song song với  $(P)$

$$\text{ĐA: } x - 2y - 2z + 3 = 0$$

52. **(A-2014)** Cho mặt phẳng  $(P) : 2x + y - 2z - 1 = 0$  và đường thẳng

$$d : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$$

Tìm tọa độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$ . Viết phương trình mặt phẳng chứa  $d$  và vuông góc với  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } x + 8y + 5z + 13 = 0$$

53. **(B-2014)** Cho điểm  $A(1; 0; -1)$  và đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$$

Viết phương trình mặt phẳng qua  $A$  và vuông góc với  $d$ . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $d$ .

$$\text{ĐA: } \left( \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right)$$

54. **(D-2014)** cho mặt phẳng  $(P) : 6x + 3y - 2z - 1 = 0$  và mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z - 11 = 0$$

Chứng minh rằng mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn  $(C)$ . Tìm tọa độ tâm  $(C)$ .

$$\text{ĐA: } \left( \frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{13}{7} \right)$$

55. **(2015)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 1)$ ,  $B(2; 1; 3)$  và mặt phẳng

$$P : x - y + 2z - 3 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng  $AB$  và tìm giao điểm của  $AB$  với mặt phẳng  $(P)$ .

$$\text{ĐA: } (0; -5; -1)$$

## 8 Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

Các bài toán sau đều xét trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ .

1. **(A-2002)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , hai đỉnh  $A, B$  thuộc trục  $Ox$ , bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 2, phương trình đường thẳng  $BC : \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$

$$\text{ĐA: } \left( \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \right), \left( \frac{-4\sqrt{3} - 1}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3} \right)$$

2. **(B-2002)** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $I \left( \frac{1}{2}; 0 \right)$ ,  $AB = 2AD$ , phương trình đường thẳng  $AB : x - 2y + 2 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết hoành độ đỉnh  $A$  âm.

$$\text{ĐA: } A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1; -2)$$

3. **(D-2002)** Cho elip

$$(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm thuộc tia  $Ox, Oy$  sao cho  $MN$  tiếp xúc với  $(E)$ . Tìm  $M, N$  để  $MN$  nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

$$\text{ĐA: } M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21}), MN = 7$$

4. **(B-2003)** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $M(1; -1)$  là trung điểm  $BC$ ,  $G \left( \frac{2}{3}; 0 \right)$  là trọng tâm tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

$$\text{ĐA: } A(0; 2)B(4; 0), C(-2; -2)$$

5. **(D-2003)** Cho đường tròn

$$(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

và đường thẳng  $d : x - y - 1 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C')$  đối xứng với đường tròn  $(C)$  qua đường thẳng  $d$ . Tìm tọa độ giao điểm của  $(C)$  và  $(C')$ .

$$\text{ĐA: } (C') : (x - 3)^2 + y^2 = 4; A(1; 0), B(3; 2)$$

6. **(A-2004)** Cho  $A(0; 2), B(-\sqrt{3}; -1)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$ , tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $OAB$

$$\text{ĐA: } H(\sqrt{3}; -1), I(-\sqrt{3}; 1)$$

7. **(B-2004)** Cho hai điểm  $A(1; 1), B(4; -3)$  và đường thẳng

$$d : x - 2y - 1 = 0$$

Tìm tọa độ điểm  $C$  nằm trên đường thẳng  $d$  sao cho khoảng cách từ  $C$  đến  $AB$  bằng 6.

$$\text{ĐA: } C_1(7; 3), C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$$

8. **(D-2004)** Cho  $A(-1; 0), B(4; 0), C(0, m), m \neq 0$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ . Tìm giá trị của  $m$  để  $\widehat{AGB} = 90^\circ$

$$\text{ĐA: } G\left(1; \frac{m}{3}\right), m = \pm 3\sqrt{6}$$

9. **(A-2005)** Cho hình vuông  $ABCD$  có đỉnh  $A$  thuộc đường thẳng  $d_1 : x - y = 0$ , đỉnh  $C$  thuộc đường thẳng  $d_2 : 2x + y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết  $B, D$  thuộc trục  $Ox$ .

$$\text{ĐA: } A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$$

10. **(B-2005)** Cho hai điểm  $A(2; 0), B(6; 4)$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  tiếp xúc  $Ox$  tại  $A$  và khoảng cách giữa  $B$  và tâm của  $(C)$  bằng 5.

$$\text{ĐA: } (C_1) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1, (C_2) : (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49$$

11. **(D-2005)** Cho điểm  $C(2; 0)$  và elip  $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm  $A, B$  thuộc  $(E)$  sao cho  $B$  đối xứng  $A$  qua trục  $Ox$  và tam giác  $ABC$  đều

**ĐA:**

$$A_1 \left( \frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7} \right), B_1 \left( \frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7} \right); A_2 \left( \frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7} \right); B_2 \left( \frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7} \right)$$

12. **(A-2006)** Cho ba đường thẳng

$$d_1 : x + y + 3 = 0, d_2 : x - y - 4 = 0, d_3 : x - 2y = 0$$

Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d_3$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $d_1$  bằng 2 lần khoảng cách từ  $M$  đến  $d_2$ .

**ĐA:**  $M_1(-22; -11), M_2(2; 1)$

13. **(B-2006)** Cho điểm  $M(-3; 1)$  và đường tròn

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

Gọi  $T_1, T_2$  là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ  $M$  đến  $(C)$ . Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$

**ĐA:**  $2x - y - 3 = 0$

14. **(D-2006)** Cho đường tròn

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

và đường thẳng  $d : x - y + 3 = 0$ .

Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  để đường tròn tâm  $M$  tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(C)$  có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn  $(C)$ .

**ĐA:**  $M_1(1; 4), M_2(-2; 1)$

15. **(A-2007)** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0; 2), B(-2; -2), C(4; -2)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC$ ,  $H$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $B$ . Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $H, M, N$

$$\text{ĐA: } x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

16. **(B-2007)** Cho điểm  $A(2; 2)$  và hai đường thẳng

$$d_1 : x + y - 2 = 0, d_2 : x + y - 8 = 0$$

Tìm tọa độ điểm  $B$  thuộc đường thẳng  $d_1$ , điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $d_2$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

$$\text{ĐA: } B(-1; 3), C(3; 5) \text{ hoặc } B(3; 1), C(5; 3)$$

17. **(D-2007)** Cho đường tròn

$$(C) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

và đường thẳng  $d : 3x - 4y + m = 0$ .

Tìm  $m$  để trên đường thẳng  $d$  có duy nhất điểm  $P$  mà từ đó kẻ được các tiếp tuyến  $PA, PB$  đến đường tròn sao cho tam giác  $PAB$  đều.

$$\text{ĐA: } m = 19, m = -41$$

18. **(A-2008)** Viết phương trình chính tắc elip  $(E)$  có tâm sai bằng  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 20

$$\text{ĐA: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

19. **(B-2008)** Cho tam giác  $ABC$  có  $H(-1; -1)$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ , đường thẳng phân giác trong góc  $A$  có phương trình  $x - y + 2 = 0$ , đường cao đỉnh  $B$  có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$ . Tọa độ đỉnh  $C$ .

$$\text{ĐA: } \left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$$

20. **(D-2008)** Cho parabol  $(P) : y^2 = 16x$  và điểm  $A(1;4)$ . Hai điểm phân biệt  $B, C$  ( $B, C$  khác  $A$ ) di động trên  $(P)$  sao cho  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BC$  luôn đi qua điểm cố định.
21. **(A-2009)** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ .  $AC$  cắt  $BD$  tại  $I(6;2)$ . Điểm  $M(1;5)$  thuộc cạnh  $AB$ , trung điểm  $E$  của  $CD$  thuộc đường thẳng:  $x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $AB$ .

$$\text{ĐA: } y - 5 = 0; x - 4y + 19 = 0$$

22. **(A-2009NC)** Cho đường tròn

$$(C) : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = \frac{4}{5}$$

tâm  $I$  và đường thẳng  $\Delta : x + my - 2m + 3 = 0$ .

Tìm  $m$  để đường tròn  $(C)$  cắt đường thẳng  $\Delta$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $IAB$  lớn nhất.

$$\text{ĐA: } m = 0, m = \frac{8}{15}$$

23. **(B-2009)** Cho đường tròn

$$(C) : (x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$$

và hai đường thẳng

$$d_1 : x - y = 0, d_2 : x - 7y = 0$$

Xác định tâm  $K$  và bán kính đường tròn  $(C_1)$  tiếp xúc với cả  $d_1, d_2$  biết  $K$  thuộc  $(C)$ .

$$\text{ĐA: } K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right); R = \frac{2}{5}$$

24. **(B-2009NC)** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A(-1;4)$ , hai đỉnh  $B, C$  thuộc đường thẳng:  $d : x - y - 4 = 0$ . Tìm tọa độ các điểm  $B, C$  biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng 18

$$\text{ĐA: } B_1 \left( \frac{11}{2}; \frac{3}{2} \right), C_1 \left( \frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right) \text{ hoặc } B_2 \left( \frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right), C_2 \left( \frac{11}{2}; \frac{3}{2} \right)$$

25. **(D-2009)** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $M(2;0)$  là trung điểm  $AB$ . Đường trung tuyến, đường cao đỉnh  $A$  lần lượt có phương trình

$$7x - 2y - 3 = 0, 6x - y - 4 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng  $AC$ .

$$\text{ĐA: } 3x - 4y + 5 = 0$$

26. **(D-2009NC)** Cho đường tròn  $(C) : (x-1)^2 + y^2 = 1$ , tâm  $I$ . Xác định tọa độ điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C) : \text{sao cho } \widehat{IMO} = 30^\circ$ .

$$\text{ĐA: } M \left( \frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

27. **(A-2010)** Cho 2 đường thẳng

$$d_1 : \sqrt{3}x + y = 0, d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$$

Đường tròn  $(T)$  tiếp xúc với  $d_1$  tại  $A$ , cắt  $d_2$  tại  $B, C$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Viết phương trình đường tròn  $(T)$  biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

$$\text{ĐA: } \left( x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left( y + \frac{3}{2} \right)^2 = 1$$

28. **(A-2010NC)** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A(6;6)$ , đường thẳng đi qua trung điểm của  $AB, AC$  có phương trình:  $x + y - 4 = 0$ . Tìm tọa độ  $B, C$ , biết  $E(1; -3)$  nằm trên đường cao qua đỉnh  $C$ .

$$\text{ĐA: } B(0; -4), C(-4; 0) \text{ hoặc } B(-6; 2), C(2; -6)$$

29. **(B-2010)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đỉnh  $C(-4; 1)$ , phương trình phân giác trong góc  $A$  là:  $x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $BC$ . Biết điểm  $A$  có hoành độ dương và diện tích tam giác  $ABC$  bằng 24.

$$\text{ĐA: } 3x - 4y + 16 = 0$$

30. **(B-2010NC)** Cho điểm  $A(2; \sqrt{3})$  và elip  $(E) : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Gọi  $F_1, F_2$  là các tiêu điểm của  $(E)$  ( $F_1$  có hoành độ âm).  $M$  là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng  $AF_1$  với  $(E)$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $F_2$  qua  $M$ . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$ .

$$\text{ĐA: } (x - 1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

31. **(D-2010)** Cho tam giác  $ABC$ , có  $A(3; -7)$ , trực tâm  $H(3; -1)$ , tâm đường tròn ngoại tiếp  $I(-2; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  biết điểm  $C$  có hoành độ dương.

$$\text{ĐA: } (-2 + \sqrt{65}; 3)$$

32. **(D-2010NC)** Cho  $A(0; 2)$  và đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $O$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  biết khoảng cách từ  $H$  đến trục hoành bằng  $AH$ .

$$\text{ĐA: } (\sqrt{5} - 1)x \pm 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}y = 0$$

33. **(A-2011)** Cho điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $\Delta : x + y + 2 = 0$ . và đường tròn

$$(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

tâm  $I$ . Từ  $M$  kẻ các tiếp tuyến  $MA, MB$  ( $A, B$  là tiếp điểm) đến  $(C)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ , biết diện tích tứ giác  $MAIB$  bằng 10.

$$\text{ĐA: } M(2; -4), M(-3; 1)$$

34. **(A-2011NC)** Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm  $A, B$  thuộc  $(E)$  có hoành độ dương sao cho tam giác  $OAB$  cân tại  $O$  có diện tích lớn nhất.

$$\text{ĐA: } A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

35. **(B-2011)** Cho hai đường thẳng

$$\Delta : x - y - 4 = 0; d : 2x - y - 2 = 0$$

Tìm tọa độ điểm  $N$  thuộc đường thẳng  $d$  sao cho đường thẳng  $ON$  cắt đường thẳng  $\Delta$  tại điểm  $M$  thỏa mãn  $OM.ON = 8$ .

$$\text{ĐA: } N_1(0; -2), N_2\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

36. **(B-2011)** Cho tam giác  $ABC$  có đỉnh  $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại  $D, E, F$ . Cho  $D(3; 1)$  và đường thẳng  $EF$  có phương trình:  $y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A$  biết  $A$  có tung độ dương.

$$\text{ĐA: } A\left(3; \frac{13}{3}\right)$$

37. **(D-2011)** Cho tam giác  $ABC$  có đỉnh  $B(-4; 1)$ , trọng tâm  $G(1; 1)$  và đường thẳng chứa phân giác trong góc  $A$  có phương trình:

$$x - y - 1 = 0$$

Tìm tọa độ các đỉnh  $A, C$ .

$$\text{ĐA: } A(4; 3), C(3; -1)$$

38. **(D-2011NC)** Cho điểm  $A(1; 0)$  và đường tròn

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $M, N$  sao cho tam giác  $AMN$  vuông cân tại  $A$ .

$$\text{ĐA: } y = 1; y = -3$$

39. **(A-2012)** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $CN = 2ND$ . Giả sử  $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$  và đường thẳng  $AN$  có phương trình  $2x - y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $A$

$$\text{ĐA: } A_1(1; -1), A_2(4; 5)$$

40. **(A-2012NC)** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 = 8$ . Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$ , biết rằng  $(E)$  có độ dài trục lớn bằng 8 và  $(E)$  cắt  $(C)$  tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

$$\text{ĐA: } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

41. **(B-2012)** Cho các đường tròn

$$(C_1) : x^2 + y^2 = 4; (C_2) : x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$$

và đường thẳng  $d : x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc  $(C_2)$ , tiếp xúc với  $d$  cắt  $(C_1)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB$  vuông góc với  $d$

$$\text{ĐA: } (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

42. **(B-2012NC)** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 2BD$  và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi là  $x^2 + y^2 = 4$ . Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  đi qua các đỉnh  $A, B, C, D$  của hình thoi. Biết  $A$  thuộc  $Ox$ .

$$\text{ĐA: } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

43. **(D-2012)** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Các đường thẳng  $AC$  và  $AD$  lần lượt có phương trình là  $x + 3y = 0$  và  $x - y + 4 = 0$ ; đường thẳng  $BD$  đi qua điểm  $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật  $ABCD$ .

$$\text{ĐA: } A(-3; 1), B(1; -3), C(3; -1), D(-1; 3)$$

44. **(D-2012NC)** Cho đường thẳng  $d : 2x - y + 3 = 0$ . Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc  $d$ , cắt  $Ox$  tại  $A$  và  $B$ , cắt  $Oy$  tại  $C$  và  $D$  sao cho  $AB = CD = 2$ .

$$\text{ĐA: } (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 10$$

45. **(A-2013)** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $d : 2x + y + 5 = 0$  và  $A(-4; 8)$ . Gọi  $M$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $C$ ,  $N$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên đường thẳng  $MD$ . Tìm tọa độ các điểm  $B$  và  $C$ , biết rằng  $N(5; -4)$ .

$$\text{ĐA: } B(-4; -7), C(1; -7)$$

46. **(A-2013NC)** Cho đường thẳng  $\Delta : x - y = 0$ . Đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R = \sqrt{10}$  cắt  $\Delta$  tại hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $AB = 4\sqrt{2}$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A$  và  $B$  cắt nhau tại một điểm thuộc tia  $Oy$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$ .

$$\text{ĐA: } (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

47. **(B-2013)** Cho hình thang cân  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau và  $AD = 3BC$ . Đường thẳng  $BD$  có phương trình  $x + 2y - 6 = 0$  và tam giác  $ABD$  có trực tâm là  $H(-3; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $C$  và  $(D)$ .

$$\text{ĐA: } C(-1; 6), D_1(4; 1), D_2(-8; 7)$$

48. **(B-2013NC)** Cho tam giác  $ABC$  có chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  là  $H\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ , chân đường phân giác trong của góc  $A$  là  $D(5; 3)$  và trung điểm của cạnh  $AB$  là  $M(0; 1)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$ .

**ĐA:**  $C(9; 11)$

49. **(D-2013)** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $M\left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$  là trung điểm cạnh  $AB$ , điểm  $H(-2; 4)$  và điểm  $I(-1; 1)$  lần lượt là chân đường cao kẻ từ  $B$  và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$ .

**ĐA:**  $C(-1; 6)$

50. **(D-2013NC)** Cho đường tròn

$$(C) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

và đường thẳng  $\Delta : y - 3 = 0$ . Tam giác  $MNP$  có trọng tâm trùng với tâm của  $(C)$ , các đỉnh  $N$  và  $P$  thuộc  $\Delta$ , đỉnh  $M$  và trung điểm cạnh  $MN$  thuộc  $(C)$ . Tìm tọa độ điểm  $P$ .

**ĐA:**  $P_1(-1; 3), P_2(3; 3)$

51. **(A-2014)** Cho hình vuông  $ABCD$  có điểm  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là điểm thuộc đoạn  $AC$  sao cho  $AN = 3NC$ . Viết phương trình đường thẳng  $CD$ , biết rằng  $M(1; 2)$  và  $N(2; -1)$ .

**ĐA:**  $3x - 4y - 15 = 0$

52. **(B-2014)** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Điểm  $M(-3; 0)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $H(0; -1)$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $AD$  và điểm  $G\left(\frac{4}{3}; 3\right)$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Tìm tọa độ các điểm  $B$  và  $D$ .

**ĐA:**  $B(-2; 3); D(2; 0)$

53. **(D-2014)** Cho tam giác  $ABC$  có chân đường phân giác trong của góc  $A$  là điểm  $D(1; -1)$ . Đường thẳng  $AB$  có phương trình

$$AB : 3x + 2y - 9 = 0$$

tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có phương trình  $x + 2y - 7 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $BC$ .

$$\text{ĐA: } x - 2y - 3 = 0$$

54. **(2015)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $H$ ,  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên cạnh  $AD$ . Giả sử  $H(-5; -5)$ ,  $K(9; -3)$  và trung điểm của cạnh  $AC$  thuộc đường thẳng  $x - y + 10 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $A$ .

$$\text{ĐA: } A(-15; 5)$$

## 9 Số phức

1. (A-2009) Cho  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình:

$$z^2 + 2z + 10 = 0$$

$$\text{Tính } A = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

**ĐA:** 20

2. (B-2009) Tìm số phức  $z$  thỏa mãn:  $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$  và  $z.\bar{z} = 25$

$$\text{ĐA: } z = 3 + 4i, z = 5$$

3. (D-2009) Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn

$$|z - (3 - 4i)| = 2$$

$$\text{ĐA: Đường tròn tâm } I(3; -4), R = 2$$

4. (A-2010CB) Tìm phần ảo của số phức  $z$ , biết

$$\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - i\sqrt{2})$$

$$\text{ĐA: } -\sqrt{2}$$

5. (A-2010NC) Cho số phức  $z$ , biết

$$\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$$

Tìm modun số phức  $\bar{z} + iz$ .

$$\text{ĐA: } 8\sqrt{2}$$

6. (B-2010) Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn

$$|z - i| = |(1 + i)z|$$

$$\text{ĐA: } x^2 + (y + 1)^2 = 2$$

7. (D-2010) Tìm số phức  $z$ , biết  $|z| = \sqrt{2}$  và  $z^2$  là số thuần ảo.

$$\text{ĐA: } \pm 1 \pm i$$

8. (A-2011CB) Tìm số phức  $z$ , biết

$$z^2 = |z|^2 + \bar{z}$$

$$\text{ĐA: } -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i, 0$$

9. (A-2011NC) Tìm modun số phức  $z$ , biết

$$(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i.$$

$$\text{ĐA: } \frac{2}{\sqrt{3}}$$

10. (B-2011CB) Tìm số phức  $z$ , biết

$$\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0.$$

$$\text{ĐA: } -1 - i\sqrt{3}; 2 - i\sqrt{3}$$

11. (B-2011NC) Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$z = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^3$$

$$\text{ĐA: } 2; 2$$

12. (D-2011CB) Tìm số phức  $z$ , biết

$$z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$$

$$\text{ĐA: } z = 2 - i$$

13. (A-2012NC) Cho số phức  $z$  thỏa mãn

$$\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i$$

Tính mô-đun của số phức  $w = 1 + z + z^2$ .

**ĐA:**  $\sqrt{13}$

14. (B-2012NC) Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là hai nghiệm của phương trình

$$z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$$

Viết dạng lượng giác của  $z_1$  và  $z_2$ .

$$\text{ĐA: } z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), z_2 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

15. (D-2012CB) Cho số phức  $z$  thỏa mãn

$$(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$$

Tìm mô-đun của số phức  $w = z + 1 + i$ .

**ĐA:** 5

16. (D-2012NC) Giải phương trình sau trên tập số phức

$$z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$$

**ĐA:**  $-1 - 2i, -2 - i$

17. (A-2013NC) Cho số phức  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Viết dạng lượng giác của số phức  $z$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $w = (1 + i)z^5$

**ĐA:**  $16(\sqrt{3} + 1), 16(1 - \sqrt{3})$

18. **(D-2013CB)** Cho số phức  $z$  thỏa mãn

$$(1+i)(z-i) + 2z = 2i$$

Tìm môđun của số phức  $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$ .

**ĐA:**  $\sqrt{10}$

19. **(A-2014)** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện

$$z + (2+i)\bar{z} = 3 + 5i$$

Tìm phần thực và phần ảo của  $z$ .

**ĐA:**  $2; -3$

20. **(B-2014)** Cho số phức  $z$  thỏa mã điều kiện

$$2z + 3(1-i)\bar{z} = 1 - 9i$$

Tính môđun của  $z$ .

**ĐA:**  $\sqrt{13}$

21. **(D-2014)** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện

$$(3z - \bar{z})(1+i) - 5z = 8i - 1$$

Tính môđun của của  $z$ .

**ĐA:**  $\sqrt{13}$

22. **(2015)** Cho số phức  $z$  thoả mãn  $(1-i)z - 1 + 5i = 0$ . Tìm phần thực và phần ảo của  $z$ .

**ĐA:** phần thực 3, phần ảo  $-2$ .

## 10 Tổ hợp - xác suất

1. (A-2002) Cho khai triển:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \dots + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

Tìm  $n, x$  biết  $C_n^3 = 5C_n^1$  và số hạng thứ tư bằng  $20n$ .

**ĐA:**  $n = 7, x = 4$

2. (B-2002) Cho đa giác đều  $A_1A_2\dots A_{2n}$ , ( $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Số tam giác nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật lập từ  $2n$  đỉnh  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ . Tìm  $n$

**ĐA:**  $n = 8$

3. (D-2002) Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  biết

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$$

**ĐA:**  $n = 5$

4. (A-2003) Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển

$$P(x) = \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$$

biết  $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

**ĐA:** 495

5. (B-2003) Tính tổng  $C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2} C_n^1 + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} C_n^n$ .

**ĐA:**  $\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$

6. (D-2003) Gọi  $a_{3n-3}$  là hệ số của số hạng chứa  $x_{3n-3}$  trong khai triển  $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$ . Tìm  $n$  biết  $a_{3n-3} = 26n$

**ĐA:**  $n = 5$

7. **(A-2004)** Tìm hệ số chứa  $x^8$  trong khai triển của  $(1 + x^2(1 - x))^8$

**ĐA:** 238

8. **(B-2004)** Có 30 câu hỏi khác nhau, trong đó có 5 câu hỏi khó, 10 câu trung bình, 15 câu dễ. Có thể lập được bao nhiêu đề gồm 5 câu có đủ 3 mức độ và số câu dễ không ít hơn 2.

**ĐA:** 56875

9. **(D-2004)** Tìm các số hạng không chứa  $x$  trong khai triển

$$P(x) = \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^7$$

với  $x > 0$

**ĐA:** 35

10. **(A-2005)** Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^1 + 3 \cdot 2^3 C_{2n+1}^1 - 4 \cdot 2^4 C_{2n+1}^1 + \dots + (2n+1)C_{2n+1}^1 = 2005$$

**ĐA:** 1002

11. **(B-2005)** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công thanh niên tình nguyện về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh gồm 4 nam và 1 nữ.

**ĐA:** 207900

12. **(D-2005)** Tính  $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$ , biết

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

**ĐA:**  $\frac{3}{4}$

13. **(A-2006)** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{26}$  trong khai triển

$$P(x) = \left( \frac{1}{x^4} + x^7 \right)^n$$

biết

$$\sum_{k=1}^n C_{2n+1}^k = 20^{20} - 1$$

**ĐA:**  $C_{10}^6$

14. **(B-2006)** Cho tập  $A$  gồm  $n(n \geq 4)$  phần tử. Số tập con gồm 4 phần tử của  $A$  bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của  $A$ . Tìm  $k$  sao cho số tập con gồm  $k$  phần tử của  $A$  lớn nhất.

**ĐA:**  $k = 9$

15. **(D-2006)** Đội thanh niên xung kính của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh để thực hiện một nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này không thuộc quá 2 trong 3 lớp trên.

**ĐA:** 225

16. **(A-2007)** Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n + 1}$$

17. **(B-2007)** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển  $(2 + x)^n$  biết

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k 3^{n-k} C_n^k = 2048$$

**ĐA:** 22

18. **(D-2007)** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^5$  trong khai triển

$$P(x) = x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$$

**ĐA:**  $3^3 C_{10}^3$

19. **(A-2008)** Cho khai triển  $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx_n$  và

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$$

Tìm số lớn nhất trong các số  $a_0, a_1, \dots, a_n$

**ĐA:**  $a_8$

20. **(B-2008)** Chứng minh rằng:  $\frac{n+1}{n+2} \left( \frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}, k \leq n$

21. **(A-2012)** Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $5C_n^{n-1} = C_n^3$ . Tìm số hạng chứa  $x^5$  trong khai triển nhị thức Newton của  $\left( \frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x} \right)^n, x \neq 0$ .

**ĐA:**  $-\frac{35}{16}x^5$

22. **(B-2012)** Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

**ĐA:**  $\frac{443}{506}$

23. **(A-2013)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của  $S$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

**ĐA:**  $\frac{3}{7}$

24. **(B-2013)** Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu.

**ĐA:**  $\frac{10}{21}$

25. **(A-2014)** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh dấu từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

**ĐA:**  $\frac{1}{26}$

26. **(B-2014)** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta phải gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích nẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

**ĐA:**  $\frac{3}{11}$

27. **(D-2014)** Cho một đa giác đều  $n$  đỉnh,  $n \in \mathbb{N}$  và  $n \geq 3$ . Tìm  $n$  biết rằng đa giác đã cho có 27 đường chéo.

**ĐA:**  $\left( \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \right), \left( \frac{-4\sqrt{3} - 1}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3} \right)$

28. **(2015)** Trong đợt ứng phó dịch Mers- Cov, Sở ý tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống cơ động trong số 5 đội từ trung tâm ý tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm ý tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất 2 đội của các trung tâm ý tế cơ sở.

**ĐA:**  $\frac{209}{230}$

## Mục lục

|    |                                                 |    |
|----|-------------------------------------------------|----|
| 1  | Khảo sát hàm số                                 | 4  |
| 2  | Lượng giác                                      | 17 |
| 3  | Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình | 24 |
| 4  | Tích phân và ứng dụng                           | 35 |
| 5  | Hình học tổng hợp trong không gian              | 43 |
| 6  | Bất đẳng thức                                   | 51 |
| 7  | Phương pháp tọa độ trong không gian             | 58 |
| 8  | Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng              | 73 |
| 9  | Số phức                                         | 85 |
| 10 | Tổ hợp - xác suất                               | 89 |