

CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

A. Một số vấn đề về bất đẳng thức đại số:

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề lí thú nhất trong giải toán phổ thông. Trong mục này chúng ta sẽ ôn lại một số bất đẳng thức cổ điển và tiếp cận một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Do khối lượng kiến thức là tương đối lớn nên một số khái niệm, tính chất cơ bản đều được bỏ qua. Các bạn có thể tìm thấy những tính chất này trong Sách Giáo Khoa của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo.

Dưới đây là các nội dung trong chuyên đề này.

a) Bất đẳng thức Cauchy

i) Bất đẳng thức Cauchy có lẽ là đã quen thuộc với nhiều bạn. Ngay từ năm lớp 8, các bạn đã bắt gặp các bất đẳng thức như:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$$

Trong đó x, y, z, t là các số thực không âm

Những bất đẳng thức có dạng này được gọi là bất đẳng thức Cauchy. Bất đẳng thức Cauchy tổng quát có dạng như sau:

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Đại lượng $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ được gọi là trung bình cộng của các số $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Đại lượng $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ được gọi là trung bình nhân của các số $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Do đó bất đẳng thức Cauchy còn có tên gọi khác là bất đẳng thức TBC-TBN (bất đẳng thức giữa đại lượng trung bình cộng và đại lượng trung bình nhân).

Bất đẳng thức Cauchy có khá nhiều cách chứng minh. Tuy nhiên do khuôn khổ quyển sách nên ở đây, tác giả chỉ nêu ra cách chứng minh điển hình nhất. Phương pháp chứng minh này cũng đã gắn liền với một tên gọi: “Quy nạp Cauchy”. Các bạn có thể tham khảo thêm về phương pháp này trong phần phương pháp Quy Nạp.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cần chứng minh đúng khi $n = 2^k$

Trước hết ta chứng minh cho trường hợp cơ sở, $k = 1$.

Ta cần chứng minh $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$.

Bất đẳng thức tương đương là đúng do đó bất đẳng thức ban đầu cũng đúng.

Giải sử bất đẳng thức đã đúng cho $k = m$, tức là

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^m}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{x_1 x_2 \dots x_{2^m}}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cũng đúng cho $k = m + 1$.

$$\text{Ta có: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \geq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4} + \dots + \sqrt{x_{2^m-1} x_{2^m}}}{2^m} \geq \sqrt[2^{m+1}]{x_1 x_2 \dots x_{2^{m+1}}}$$

(Ở trên ta đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp số $x_{2k+1} + x_{2k+2} \geq 2\sqrt{x_{2k+1} x_{2k+2}}, \forall k = 1, 2^m - 1$ sau đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2^m số $\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_3 x_4}, \dots, \sqrt{x_{2^m-1} x_{2^m}}$.

Như vậy bất đẳng thức Cauchy đã đúng cho vô số số hạng. Bây giờ ta sẽ chứng minh nếu $n = m + 1$ đúng thì bất đẳng thức cũng đúng cho $n = m$. Thực vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho $m + 1$ số $x_1, x_2, \dots, x_m, \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m}$ ta có:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m + \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m} \geq (m + 1) \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_m + \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m} \geq (m + 1) \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m}.$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_m \geq m \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} \geq \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_m}.$$

Như vậy theo nguyên lý Quy nạp Cauchy ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét rằng bất đẳng thức cơ sở chỉ xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x = y$ do đó trong bất đẳng thức tổng quát của ta dấu bằng cũng chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Ta có nhiều cách nhìn nhận về bất đẳng thức Cauchy, ví dụ như cho các số thực dương có tổng không thay đổi thì giá trị lớn nhất của tích các số này là gì, hoặc ngược lại, tức là tìm giá trị nhỏ nhất của các số thực dương có tích không đổi.

Cũng cần lưu ý với các bạn rằng trong bất đẳng thức Cauchy, điều kiện các số thực không âm là quan trọng, ví dụ với $n = 2k + 1$, ta có thể chỉ ra ví dụ với các số thực gồm $2k$ số -1 và một số $2k$ thì bất đẳng thức không còn đúng nữa.

ii) Bất đẳng thức Cauchy mở rộng

Trong phần này ta hãy xem xét bất đẳng thức Cauchy có trong số. Ta hãy khởi đầu bằng bất đẳng thức cho hai số thực dương trước.

Cho các số nguyên dương a, b, c, d và hai số thực dương x, y . Khi đó:

$$\frac{\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}y}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} \geq \sqrt[ad+bc]{x^{ad}y^{bc}}$$

Bất đẳng thức trên còn được gọi là bất đẳng thức Young. Chứng minh bất đẳng thức được đề cập dưới đây:

$$\frac{\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}y}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} = \frac{adx + bcy}{ad + bc} \geq \sqrt[ad+bc]{x^{ad}y^{bc}}$$

Ở trên, ta đã áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho $ad + bc$ số hạng, bao gồm ad số x , bc số y . Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bằng một ý tưởng tương tự, ta có thể phát biểu bất đẳng thức Cauchy trong số trong trường hợp tổng quát như sau

Cho $2n$ số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ và n số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{a_2}{b_2}x_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}x_n}{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}} \geq \sqrt[a_1b_2\dots b_n + \dots + a_nb_1b_2\dots b_{n-1}]{x_1^{a_1b_2\dots b_n} \dots x_n^{a_nb_1b_2\dots b_{n-1}}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Ý tưởng chứng minh hoàn toàn tương tự trong trường hợp hai số, do đó xin nhường lại cho bạn đọc **J**.

Bây giờ ta hãy xét một số ví dụ ứng dụng bất đẳng thức Cauchy.

Bài toán : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của :

$$Z = x^2y(4 - x - y)$$

$$\text{Trong đó } \begin{cases} x, y \geq 0. \\ x + y \leq 4. \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội năm 1993)

Trước hết ta nhận xét rằng các số $x, y, 4 - x - y$ có một mối quan hệ nào đó, thật vậy tổng của chúng bằng 4. Đây chẳng phải là dấu hiệu nhận biết để sử dụng bất đẳng thức Cauchy hay sao.

Tuy nhiên đề bài lại là $x^2y(4 - x - y)$ chứ không phải là $xy(4 - x - y)$ **L**. Chẳng lẽ chịu thua? Ở đây ta sẽ sử dụng kỹ thuật tạo thành các số có tổng không đổi như sau:

$$x^2y(4 - x - y) = 4 \frac{x}{2} \frac{x}{2} y(4 - x - y). \text{ Chẳng phải lúc này } \frac{x}{2}; \frac{x}{2}; y; 4 - x - y \text{ có tổng là}$$

4 hay sao. Tuy nhiên ta còn cần $4 - x - y$ nhận giá trị không âm, do đó ta xét trường hợp $0 \leq x + y \leq 4$. Từ đó ta thu được lời giải sau:

Xét $0 \leq x + y \leq 4$, ta có:

$$Z = x^2 y(4 - x - y) = 4 \frac{x}{2} \frac{x}{2} y(4 - x - y) \leq 4 \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + 4 - x - y}{4} \right)^4 = 4$$

(Bất đẳng thức Cauchy)

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $x = 2, y = 1$.

Xét $4 \leq x + y$, ta có: $Z \leq 0 < 4$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $Z \leq 4$.

Vậy $Z_{\max} = 4$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn như $x = 2; y = 1$.

Đối với trường hợp giá trị nhỏ nhất, các bạn có thể nhận xét rằng điều kiện $x + y \leq 6$ vẫn chưa được sử dụng. Và đây là lúc để ta sử dụng điều kiện này.

Nếu các bạn thay $x + y = 6$ vào Z , các bạn có thể thấy $Z < 0$. Do đó giá trị nhỏ nhất của Z cũng phải nhận giá trị âm. Từ nhận xét này, để thuận tiện trong việc nghiên cứu, rõ ràng ta chỉ cần xét $4 \leq x + y \leq 6$. Trong trường hợp này, $4 - x - y \leq -2$, (đẳng thức xảy ra khi $x + y = 6$) nên ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x^2 y$ để Z thu được giá trị nhỏ nhất.

Lúc này có lẽ mọi chuyện đã trở nên tương đối quen thuộc với các bạn rồi chứ. Do tổng $x + y$ là 6 nên ta cần biến đổi $x^2 y$ thành tích các số hạng có tổng là $x + y$.

Và ta thu được kết quả mong muốn:

$$x^2 y = \frac{x \cdot x \cdot 2y}{2} \leq \frac{\left(\frac{x + x + 2y}{3} \right)^3}{2} = \frac{\left(\frac{2(x + y)}{3} \right)^3}{2} \leq \frac{4^3}{2} = 32.$$

Từ đây ta đi tới lời giải:

Xét $4 \leq x + y \leq 6$.

Ta có: $x + y - 4 \leq 6 - 4 \leq 2$.

$$x^2 y \leq \frac{x \cdot x \cdot 2y}{2} \leq \frac{\left(\frac{2(x + y)}{3} \right)^3}{2} \leq \frac{4^3}{2} = 32$$

$$\Rightarrow -x^2 y \geq -32$$

Nhân các bất đẳng thức trên về theo về ta thu được:

$x^2 y(4 - x - y) \geq -x^2 y \cdot 2 \geq -32 \cdot 2 = -64$ (Nhân hai vế cho số không dương, bất đẳng thức đổi chiều)

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $x = 4, y = 2$.

Xét $0 \leq x + y \leq 4$, ta có: $Z \geq 0 > -64$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $Z \geq -64 \Rightarrow Z_{\min} = -64$.

Đẳng thức xảy ra như $x = 4, y = 2$.

Sau đây là một số bài tập áp dụng:

Bài 1:

Cho x, y thỏa: $x^2 + y^2 = 4 + xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $t = x^2 + y^2$.

(Đề thi HSG lớp 9 TP.HCM năm 1995)

Bài 2:

Cho $a, b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$$

(Đề kiểm tra lớp 9 Chuyên Toán TP.HCM năm 1994)

Bài 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$S = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right), \text{ biết } \begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 PTTH chuyên Lê Hồng Phong TP.HCM năm 1994)

Bài 4:

Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9, bảng B, toàn quốc năm 1994)

Bài 5:

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2} \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

(Tập chí Toán học và Tuổi Trẻ).

b) Bất đẳng thức Bouniakovski

i) Bất đẳng thức Bouniakovski cũng là một trong những bất cổ điển nổi tiếng nhất. Bất đẳng thức còn gắn với nhiều tên gọi khác, như Cauchy, Schwarz. Cũng xin chú ý với bạn đọc rằng, những bất đẳng thức cổ điển thường được hình thành trong các vấn đề cuộc sống, trong các vấn đề về thiên văn, vật lý. Chúng đã xuất hiện từ rất lâu và Bouniakovski, Cauchy, Schwarz là những người gắn bó tên tuổi với các bất đẳng thức này nhất, không hẳn vì họ là những người đầu tiên phát minh ra bất đẳng thức này, nhưng có lẽ họ đã góp công sức rất lớn trong việc hệ thống chúng một cách chặt chẽ nhất.

Bây giờ ta hãy xem “hình thù” bất đẳng thức Bouniakovski này:

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$.

Bất đẳng thức Bouniakovski cũng có khá nhiều cách chứng minh. Tuy nhiên ở đây tác giả sẽ đề cập tới cách chứng minh sử dụng bất đẳng thức chúng ta vừa mới xem xét qua, bất đẳng thức Cauchy.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}} \leq 1$$

Ta có thể giả sử các số $a_i, b_i, i = \overline{1, n}$ đều là các số thực dương. Bởi lẽ khi đó chúng ta chỉ cần sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq |a_1| |b_1| + \dots + |a_n| |b_n|$$

Và lại áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski cho các số thực dương $|a_i|, |b_i|, i = \overline{1, n}$ và ta sẽ có điều phải chứng minh.

Quay lại vấn đề chính. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương ta được:

$$\frac{a_i b_i}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}} \leq \frac{a_i^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} + \frac{b_i^2}{2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}, \forall i = \overline{1, n}$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta thu được:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} = 1.$$

Và như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong.

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, \forall i = \overline{1, n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0.$$

Tương tự như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bouniakovski cũng có nhiều cách nhìn nhận. Nói chung các bạn nên cân trọng khi thấy các đại lượng có tổng bình phương là một hằng số, hoặc cũng có khi là tổng các căn bậc hai của các đại lượng nằm ở vế bé hơn trong bất đẳng thức cần chứng minh. Đây là những dấu hiệu để sử dụng bất đẳng thức Bouniakovski.

Ngòai ra bất đẳng thức *Bouniakovski* cũng thường hay được sử dụng trong các bất đẳng thức có dạng phân thức. Do đó các bạn nên chú ý khi gặp những dạng này.

ii) Bất đẳng thức Bouniakovski mở rộng.

Cho m dãy số thực không âm $(a_1); (a_2); \dots; (a_m)$. Mỗi dãy gồm n số hạng $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[m]{(a_{1_1}^m + a_{1_2}^m + \dots + a_{1_n}^m) \dots (a_{m_1}^m + a_{m_2}^m + \dots + a_{m_n}^m)} \geq a_{1_1} a_{2_1} \dots a_{m_1} + \dots + a_{1_n} a_{2_n} \dots a_{m_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh bất đẳng thức Bouniakovski mở rộng có thể làm bằng ý tưởng tương tự trong trường hợp $m = 2$, do đó phần này xin dành cho bạn đọc.

Chú ý thêm với các bạn rằng trong trường hợp m là số tự nhiên chẵn thì ta có cho các dãy số thực là bất kì, không cần không âm, tuy nhiên khi ấy dấu bằng xảy ra thì các tỉ số vẫn phải bằng nhau và bằng một đại lượng không âm.

Dưới đây ta sẽ xét qua một ví dụ ứng dụng bất đẳng thức Bouniakovski.

Bài toán:

a) Cho x, y thỏa: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ (1)

Chứng minh: $x^2 + y^2 = 1$

b) Từ (2) có thể suy ra được (1) hay không.

(Đề thi vào lớp 10 PT Năng Khiếu TP.HCM năm 1999)

Bài toán được phát biểu dưới dạng đẳng thức, tuy nhiên biểu thức trong (1) lại khiến cho ta có cảm giác quen thuộc. Rõ ràng trong biểu thức ấy, ta có:

$$y^2 + (\sqrt{1-y^2})^2 = 1$$

$$x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = 1$$

Đây là những dấu hiệu rõ ràng nhất cho sự hiện diện của bất đẳng thức Bouniakovski. Từ đây ta đưa ra lời giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski cho hai dãy: $(x, \sqrt{1-x^2})$ và $(\sqrt{1-y^2}, y)$ ta thu được:

$$x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y \leq \sqrt{(x^2+1-x^2)(1-y^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-y^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1-y^2} = \frac{1-x^2}{y^2} = \frac{1-x^2+x^2}{1-y^2+y^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1-y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

b) Từ việc xét dấu bằng, chúng ta thấy ngay nếu $x, y \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ (2). Tuy nhiên ở đây do đề bài không cho x, y là các số thực dương nên ta dễ dàng chỉ ra trường hợp (2) $\nRightarrow$ (1), chẳng hạn như $x = 0, y = -1$.

Bài toán:

Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1.$$

Bài toán được nêu ra dưới dạng phân thức, đây là dấu hiệu khiến ta cảnh giác với bất đẳng thức Bouniakovski. Thông thường, ta sử dụng bất đẳng thức này để triệt tiêu mẫu thức. Ở đây ta sẽ áp dụng bất đẳng thức này bằng cách như sau:

Ta có:

$$[a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)]\left[\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\right]\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\right)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1.$$

Như vậy bài toán đã được giải quyết xong.

Sau đây là các bài tập để các bạn áp dụng:

Bài 1:

Cho $a, b, c, d > 0$ và $ab+bc+cd+da=1$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}.$$

(Đề thi chọn HSG khối PTCT-ĐHSP Hà Nội năm 1995)

Bài 2:

Cho $a, b, c > 0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=\frac{a^3}{a+2b+3c}+\frac{b^3}{b+2c+3a}+\frac{c^3}{c+2a+3b}.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4 lần 6, năm 2000)

Bài 3:

Cho $a, b, c, p, q > 0$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{p+q}{pa+qb}+\frac{p+q}{pb+qc}+\frac{p+q}{pc+qa}.$$

c) Bất đẳng thức Chebysev

i) Cho hai dãy số cùng tính đơn điệu

$$a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n\quad a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$$

$$b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n\quad \text{hay}\quad b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$$

Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

Trong trường hợp một dãy tăng một dãy giảm

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

Ta có bất đẳng thức ngược lại như sau:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

Bất đẳng trên cũng có nhiều cách chứng minh, nhưng cách chứng minh sau là ngắn gọn nhất mà tác giả biết được.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \\ &= \frac{n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}{n^2} \\ &= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j)}{n^2} \\ &= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - b_i)(a_j - b_j)}{n^2}. \end{aligned}$$

Trong trường hợp hai dãy cùng tính đơn điệu ta có các đại lượng $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ là không âm, do đó ta thu được bất đẳng thức như đã nói.

Trong trường hợp hai dãy khác tính đơn điệu ta có các đại lượng $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ là không âm, do đó ta thu được bất đẳng thức ngược chiều.

Dấu bằng của bất đẳng thức là tương đối phức tạp, ta chỉ có thể nói dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_{i_1} = \dots = a_{i_k}; a_{i_{k+1}} = \dots = a_{i_{k+t}}; \dots; a_{i_a} = \dots = a_{i_b}$ trong đó $i_m \neq j_n, \forall (i, j)$.
 $b_{j_1} = \dots = b_{j_l}; b_{j_{l+1}} = \dots = b_{j_{l+r}}; \dots; b_{j_c} = \dots = b_{j_{n-b}}$

Ta có thể hiểu một cách nôm na là dãy (a) chia thành từng đoạn bằng nhau. Còn những đoạn còn lại tương ứng là các đoạn bằng nhau của dãy (b).

ii) Bất đẳng thức với dãy hoán vị.

Trong phần i) của mục này, ta đã đề cập tới bất đẳng thức Chebysev. Từ bất đẳng thức này ta có thể suy ra được đối với hai dãy:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$$

Thì

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}{n} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Thế còn đối với tổng $a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n}$ trong đó $(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n})$ là một hoán vị của các số $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ (nghĩa là các số hạng $b_1, b_2, \dots, b_n$ thay đổi vị trí) thì sao nhỉ ? Đây là một câu hỏi khá tự nhiên, và cuốn hút chúng ta vào việc giải quyết chúng. Đây chính là cái vòng xoáy vô tận của Toán học.

Chúng ta có thể đi tới được bất đẳng thức sau, được gọi là bất đẳng thức hoán vị:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$$

Ý tưởng trong chứng minh bất đẳng thức này là quy nạp.

Với $n = 2$, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức tương đương cuối cùng là đúng, do đó ta có điều phải chứng minh.

Giả sử bất đẳng thức đã đúng cho $n = k$, tức là

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k \geq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_kb_{i_k} \geq a_1b_k + a_2b_{k-1} + \dots + a_kb_1.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức cũng đúng cho $n = k + 1$.

Đối với bất đẳng thức đầu tiên, sử dụng bất đẳng thức quy nạp và ta chỉ cần chứng minh:

$$a_{k+1}b_{k+1} + a_ib_j \geq a_ib_{k+1} + a_{k+1}b_j$$

$$\Leftrightarrow (a_{k+1} - a_i)(b_1 - b_j) \geq 0.$$

Đối với bất đẳng thức thứ hai, sử dụng bất đẳng thức quy nạp và ta chỉ cần chứng minh:

$$a_{k+1}b_1 + a_ib_j \leq a_{k+1}b_j + a_ib_1$$

$$\Leftrightarrow (a_{k+1} - a_i)(b_1 - b_j) \leq 0.$$

Hai bất đẳng thức tương đương cuối cùng là đúng, do đó các bất đẳng thức ban đầu cũng vậy.

Tóm lại theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

d) Bất đẳng thức Bernoulli.

Cho $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$(1+x)^a \geq 1+ax$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hay $a = 0$ hay $x = -1$; $a = 1$.

Chúng ta cũng có khá nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức này. Tuy nhiên ở đây tác giả xin trình bày cách chứng minh bằng bất đẳng thức Cauchy, cách chứng minh này tuy không phải là ngắn gọn nhất trong trường hợp đã nêu, tuy nhiên nó sẽ còn giúp ích các bạn rất nhiều về mặt ý tưởng trong quá trình học cấp ba của mình.

Nếu $1+ax \leq 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $(1+x)^a \geq 0$.

Xét $1+ax \geq 0$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$1+x \geq \sqrt[a]{1+ax}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho a số hạng, gồm một số $1+ax$ và $a-1$ số 1 , ta thu được:

$$\frac{1+ax+(a-1)}{a} \geq \sqrt[a]{1+ax}$$

$$\Leftrightarrow 1+x \geq \sqrt[a]{1+ax}.$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Các bạn có thể dễ dàng kiểm tra được dấu bằng.

e) Một số ý tưởng từ bất đẳng thức $x^2 \geq 0$

Trong các phần ở trên, chúng ta đã biết cách ứng dụng các bất đẳng thức cổ điển vào việc chứng minh các bất đẳng thức. Tuy nhiên trong thực tế, không phải bao giờ chúng ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức một cách dễ dàng như vậy, những lúc ấy chúng ta phải làm gì.

Nếu chúng ta chú ý kĩ càng, bất đẳng thức Cauchy dường như là gốc gác của hầu hết các bất đẳng thức cổ điển khác. Như vậy, điều gì là khởi nguồn của bất đẳng thức. Câu trả lời không phải là bất đẳng thức Cauchy, bởi lẽ chúng ta đã sử dụng một kết quả khác để chứng minh bất đẳng thức này, đó là kết quả $x^2 \geq 0$, hay cụ thể hơn là ta đã đưa về $(a-b)^2 \geq 0$. Vậy phải chăng mọi bất đẳng thức hai biến a và b , dấu bằng xảy ra khi chúng bằng nhau luôn đưa về được dạng $(a-b)^2$, như vậy ta chỉ cần đưa chúng về dạng này thì chẳng phải là bài toán đã được giải quyết rồi ư?

Câu trả lời là đúng, và trong phần này chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức nguyên thủy này để thu hoạch được những kết quả độc đáo.

Trước hết ta hãy làm quen với việc đưa các bất đẳng thức hai biến về dạng $(a-b)^2 g(a,b)$. Khi đã đưa được về dạng này thì ta chỉ cần chứng minh $g(a,b) \geq 0$ nữa là xong. Bất đẳng thức $g(a,b) \geq 0$, thông thường là không có dấu bằng, tức là không “chặt” hoàn toàn, hoặc là không mấy phức tạp. Do đó việc giải quyết chúng là tương đối dễ dàng.

Ta hãy bắt đầu bằng một số hằng đẳng thức sau:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2$$

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2$$

$$a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) = (a^2 + ab + b^2)(a-b)^2$$

Trong trường hợp gặp phân thức hay căn thức, các bạn có thể quy đồng mẫu số hay nhân với lượng liên hợp để đưa về dạng quen thuộc đã biết. Ta xét một số ví dụ:

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a+b) = \frac{2(a^2 + b^2) - (a+b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a+b} = \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a+b} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}$$

Ý tưởng của phương pháp thật đơn giản phải không các bạn. Tuy nhiên ta có thể làm gì với phương pháp này. Chúng ta hãy thử xét một ví dụ xem, chẳng hạn đối với đẳng thức (1), nếu sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b \geq 2(a + b)$. Ta thu được bất đẳng thức:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) &\leq \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2(a^2 + b^2)} + \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} &\leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a + b} \\ \Leftrightarrow a + b + \frac{(a - b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)}} &\leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}\end{aligned}$$

Như vậy là ta đã thu được các bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức Bouniakovski rất lý thú sau :

$$a + b + \frac{(a - b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq a + b + \frac{(a - b)^2}{2(a + b)}$$

Các bạn có lẽ đã thấy được phần nào sự lý thú và sức mạnh của phương pháp này rồi chứ. **J**

Chúng ta hãy xét thêm một ví dụ nữa mà chúng ta bị ép vào thế tìm lời giải chứ không phải là sáng tạo toán học xem nào.

Bài toán:

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} + \frac{(a - b)^2(a + 3b)(b + 3a)}{16(a + b)^3}.$$

(Tập chí Toán Học và Tuổi Trẻ)

Ở đây dấu bằng xảy ra khi $a = b$, tuy nhiên biểu thức $\frac{(a - b)^2(a + 3b)(b + 3a)}{8(a + b)^3}$ đã

có chứa $(a - b)^2$ rồi, do đó ta chỉ cần phải đưa $\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab}$ về dạng $(a - b)^2 f(a, b)$.

Ta có: $\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a - b)^2}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$. Như vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{(a - b)^2}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \geq \frac{(a - b)^2(a + 3b)(b + 3a)}{16(a + b)^3}$$

$$\Leftrightarrow 8(a + b)^3 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2(a + 3b)(b + 3a)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy và Bouniakovski, ta thu được:

$$(1 \cdot \sqrt{a} + 1 \cdot \sqrt{b})^2 \leq 2(a + b)$$

$$(a + 3b)(b + 3a) \leq \frac{(a + 3b + b + 3a)^2}{4} = 4(a + b)^2$$

Nhân vế theo vế ta thu được điều phải chứng minh.

Dưới đây là một số bài tập áp dụng :

Bài 1:

Cho các số thực dương a, b . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 7(a+b) \geq 8\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Bài 2:

Cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq \frac{a^2+b^2-2ab}{4}.$$

Xác định trường hợp đẳng thức xảy ra.

Gợi ý: Sử dụng hằng đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{(a+b+c)}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

f) Sức mạnh của phép biến đổi tương đương.

Thông thường khi gặp các bài toán về bất đẳng thức dạng phân thức, người ta luôn nghĩ đến các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy, Bouniakovski. Tuy nhiên việc áp dụng chúng đôi khi rất rắc rối và không phải lúc nào cũng thực hiện được.

Toán học ngày nay đã có nhiều bất đẳng thức tốt hơn, thuận tiện hơn trong việc đánh giá các biểu thức dạng đa thức. Do đó khi gặp các bài toán dạng phân thức, hay dạng tích các đa thức một phương pháp khá thể lực nhưng hiệu quả là quy đồng mẫu số, khai triển đưa về dạng đa thức và sau đó là sử dụng một số bất đẳng thức đã biết vào việc chứng minh.

Dưới đây tác giả xin liệt kê một số bất đẳng thức dạng đa thức ba biến thường gặp:

Cho a, b, c là các số thực dương. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau:

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

$$a^3+b^3 \geq ab(a+b)$$

$$a^4+b^4 \geq ab(a^2+b^2) \geq 2a^2b^2$$

$$a^4+b^4+2a^2b^2 \geq 2ab(a^2+b^2)$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq 6abc$$

$$3(a^4+b^4+c^4) \geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ac(a^2+c^2) \geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 3abc(a+b+c)$$

Các bất đẳng thức trên hầu hết đều có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Cauchy

Ngoài ra chúng ta còn hay sử dụng bất đẳng thức sau:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi ba số bằng nhau, hoặc hai số bằng nhau, một số bằng 0.

Bất đẳng thức trên có tên gọi là bất đẳng thức Schur. Chứng minh của bất đẳng thức được đề cập dưới đây:

Do tính đối xứng của bất đẳng thức mà ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] + c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(a-b) \geq 0.$$

Bất đẳng thức tương đương cuối cùng là đúng, do đó bất đẳng thức ban đầu cũng đúng.

Dưới đây ta sẽ xem xét ví dụ:

Bài toán:

Chứng minh rằng với mọi bộ số thực dương (a, b, c) , ta có bất đẳng thức sau:

$$9(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

Bất đẳng thức trên thật sự không ở dạng thuận tiện cho ta ứng dụng các bất đẳng thức cô điển đã học. Vì vậy một ý tưởng là khai triển, chúng ta hãy thử xem:

$$9(a+b)(a+c)(b+c) = 9[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc]$$

$$8(a+b+c)(ab+ac+bc) = 8[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc]$$

Do đó bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$9[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc] \geq 8[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc]$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

Bất đẳng thức thu được cuối cùng trong phép biến đổi tương đương là đúng, do đó bất đẳng thức ban đầu cũng vậy.

Ý tưởng của phương pháp này tuy đơn giản nhưng cũng không kém phần hiệu quả. Nó có thể sẽ giúp ích bạn nhiều khi bạn bị giới hạn thời gian để làm một vấn đề gì đó. Tìm một lời giải đẹp bằng các bất đẳng thức cô điển là rất tốt, nhưng điều này đôi khi sẽ ngốn của bạn rất nhiều thời gian. Những lúc ấy tại sao bạn không thử ứng dụng phương pháp này xem, tuy khổ cực ban đầu nhưng thành công đến với bạn là rất sớm. Chúc bạn đạt được những kết quả tốt. **J**

Dưới đây là một số bài tập áp dụng:

Bài 1:

Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 4, \forall x, y \neq 0.$$

(Đề thi HSG bảng A lớp 9, toàn quốc năm 1995)

Bài 2:

$$\text{Cho hệ } \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1. \end{cases}$$

Tìm k lớn nhất sao cho:

$$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \geq \frac{1}{9} + \frac{k}{27}$$

g) Một phương pháp tiếp cận đầu bằng.

Trong chương trình toán trung học, có lẽ các bạn cũng đã từng bắt gặp rất nhiều bài toán bất đẳng thức. Hầu hết trong chúng, các bạn đều có thể đoán ngay được các điểm cho ta đầu đẳng thức. Làm được như vậy, hầu như bạn đã đi được 20% chặng đường rồi. Việc cuối cùng là làm sao để tiếp cận được đầu bằng ấy nữa mà thôi.

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày cho các bạn một phương pháp tiếp cận dấu bằng sử dụng trong một lớp bất đẳng thức trong đó các biến của ta bị chặn trong từng khoảng. Ta sẽ phát biểu dạng tổng quát của bất đẳng thức:

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq (\leq) C$.

Gặp những tình huống như thế này, dấu bằng của bất đẳng thức thường xảy ra tại các giá trị biên, nghĩa là bằng a hay b . Trong trường hợp như vậy, ta sẽ cố gắng chứng minh, chẳng hạn như $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq (\leq) f(a, x_2, \dots, x_n)$. Và lại tiếp tục như vậy

$f(a, x_2, \dots, x_n) \geq (\leq) f(a, b, \dots, x_n)$. Và cuối cùng ta thu được giá trị nhỏ nhất của f , chẳng hạn như $f(a, b, b, b, a, \dots, a)$. Lúc này ta chỉ cần tính giá trị cụ thể của f và so sánh với C .

Ta hãy xét một số ví dụ cụ thể sau:

Bài toán:

Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a, b, c) = a + b + c - ab - ac - bc$$

(Chuyên đề Toán học số 7- PTNK Tp.HCM)

Bài toán trên rõ ràng nằm trong phương pháp mà ta đã đề cập, ta hãy thử áp dụng phương pháp này xem:

Ta sẽ chứng minh:

$$f(a, b, c) \leq \max \{ f(a, b, 0), f(a, b, 1) \}. \text{ Thực vậy}$$

Nếu $1 - a - b \geq 0$ thì

$$f(a, b, c) = a + b - ab + c(1 - a - b) \leq a + b - ab + (1 - a - b) = f(a, b, 1)$$

Nếu $1 - a - b \leq 0$ thì $f(a, b, c) = a + b - ab + c(1 - a - b) \leq a + b - ab = f(a, b, 0)$

Như vậy $f(a, b, c) \leq \max \{ f(a, b, 1), f(a, b, 0) \}$

Ở đây ta có thể lý luận một cách tương tự như trên để suy ra rằng:

$$f(a, b, c) \leq \max \{ f(0, 0, 0); f(0, 0, 1); f(0, 1, 1); f(1, 1, 1) \} \text{ và tính toán trực tiếp các giá}$$

trị trên để suy ra $f(a, b, c) \leq 1$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $a = b = 0, c = 1$.

Hoặc là ta sẽ đánh giá $f(a, b, 1); f(a, b, 0)$.

$$f(a, b, 1) = 1 - ab \leq 1.$$

$$f(a, b, 0) = a + b - ab = (a - 1)(1 - b) + 1 \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $a = b = 0, c = 1$.

Vậy $f(a, b, c)_{\max} = 1$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $a = b = 0, c = 1$.

Bài toán:

Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10$$

(Toán học và Tuổi trẻ)

Ta cũng sẽ sử dụng phương pháp tương tự như đã nói ở trên. Đặt:

$$f(a, b, c) = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Do tính đối xứng của bất đẳng thức mà ta có thể giả sử: $a \geq b \geq c$.

Ta sẽ chứng minh:

$f(a, b, c) \leq f(a, b, 1)$. Thực vậy ta có:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, b, 1) &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - (a+b+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 \right) \\ &= (a+b) \left(\frac{1}{c} - 1 \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (c-1) \\ &= (c-1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \right) \end{aligned}$$

Ta có:

$$c-1 \geq 0.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \leq 1 \leq \frac{a}{c} \\ \frac{1}{b} \leq 1 \leq \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \leq 0.$$

$$\text{Do đó } (c-1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \right) \leq 0 \Rightarrow f(a, b, c) \leq f(a, b, 1)$$

Ta lại tiếp tục chứng minh: $f(a, b, 1) \leq f(2, b, 1)$. Thực vậy:

$$\begin{aligned} f(a, b, 1) - f(2, b, 1) &= (a+b+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 \right) - (2+b+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + 1 \right) \\ &= (a-2) \left(\frac{1}{b} + 1 \right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right) (b+1) \\ &= (a-2) \left(\frac{1}{b} + 1 - \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a} \right) \end{aligned}$$

Ta có:

$$a-2 \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{b} > \frac{1}{2a} \\ 1 > \frac{b}{2a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} + 1 - \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a} > 0.$$

$$\text{Do đó: } f(a, b, 1) \leq f(2, b, 1).$$

Bây giờ ta xét $f(2, b, 1)$.

$$\begin{aligned} f(2, b, 1) &= (3+b) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{b} \right) = \frac{11}{2} + \frac{3}{b} + \frac{3b}{2} \\ &= \frac{11}{2} + 3 \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2} \right) = \frac{11}{2} + 3 \left(\frac{(b-1)(b-2)}{2b} + \frac{3}{2} \right) \leq \frac{11}{2} + \frac{9}{2} = 10. \end{aligned}$$

Vậy tóm lại $f(a, b, c) \leq f(a, b, 1) \leq f(2, b, 1) \leq 10$.

Các bạn hãy thử áp dụng phương pháp này vào một số bài toán sau nhé **J**

Bài 1:

Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc}$$

Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ.

Bài 2:

Cho $a, b, c, d, e \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$B = a(1-b) + b(1-c) + c(1-d) + d(1-a).$$

Bài 3:

Cho $x, y, z \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$C = \frac{xy}{xz + yz} + \frac{xz}{xy + yz} + \frac{yz}{xy + xz}$$

Bài 4:

Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3.$$

Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ.

h) Sử dụng tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức.

Tam thức bậc hai có rất nhiều ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức. Các kỹ thuật sử dụng tam thức bậc hai là khá nhiều, tuy nhiên do khuôn khổ cuốn sách có hạn nên tác giả chỉ nêu ra các phương pháp thường hay được sử dụng.

i) Phương pháp tam thức hóa

Để chứng minh $f \geq g$. Ta có thể chuyển $f - g = h(x) = ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x$. Khi

đo việc bất đẳng thức đúng tương đương với với
$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

Các bạn nên chú ý các bài toán mà bậc của một biến nào đó là bậc hai, chúng ta có thể xét tam thức bậc hai theo biến này.

Ta hãy xem xét một số ví dụ cụ thể

Bài toán:

Cho a, b, c là ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2, \forall p, q: p + q = 1.$$

Bất đẳng thức có vẻ không quen thuộc lắm với các phương pháp đã biết của ta. Tuy nhiên điều kiện có vẻ là đơn giản, ta có thể loại bỏ luôn điều kiện này bằng cách thế $q = 1 - p$, ta được:

$$pa^2 + (1-p)b^2 \geq p(1-p)c^2, \forall p.$$

$$\Leftrightarrow c^2 p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0, \forall p.$$

Như vậy là ta đã thu được một bất đẳng thức có các biến đều bậc 2, tuy nhiên bất đẳng thức cần chứng minh đúng với mọi p nên ta chọn xét tam thức $f(p)$ là hợp lý nhất.

$$\text{Xét } f(p) = c^2 p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$$

$$f(p) > 0, \forall p \Leftrightarrow \Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = -(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng, như vậy bài toán đã được giải quyết.
ii) Phương pháp tạo tam thức.

Để chứng minh $f \geq g$. Ta có thể chuyển $f - g = b^2 - 4ac = b'^2 - ac \geq 0$ Khi đó ta sẽ tạo ra tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ và chứng minh $f(x)$ luôn có nghiệm bằng cách chứng minh tồn tại a sao cho $af(a) \leq 0$ hay tồn tại a, b sao cho $f(a)f(b) \leq 0$.

Ta xét ví dụ sau:

Bài toán:

Cho $a_1^2 \geq a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$. Chứng minh rằng:

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$$

Bất đẳng thức trên có tên gọi là bất đẳng thức Aczela.

Bất đẳng thức đã nằm ở một dạng rất đẹp mà t among muốn: $ac \leq b'^2, a \geq 0$.

Trước hết ta xét trường hợp $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$, khi đó bất đẳng thức là hiển nhiên vì vế phải luôn không âm.

Trường hợp $a_1^2 > a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$, ta xét tam thức bậc hai:

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)x + (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \\ &= (a_1x - b_1)^2 - (a_2x - b_2)^2 - (a_3x - b_3)^2 - \dots - (a_nx - b_n)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } f\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -\left[\left(\frac{a_2}{a_1}b_1 - b_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}b_1 - b_n\right)^2\right] \leq 0$$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm, do đó:

$$\Delta' = (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2 - (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq 0.$$

$$\Rightarrow (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$$

Sau đây sẽ là phần bài tập dành cho các bạn:

Bài 1:

Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e), \forall a, b, c, d, e.$$

Bài 2:

Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2), \forall a_i \in [0, 1]$$

Bài 3:

Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Bài toán số 3 là một bài toán ứng dụng tam thức bậc hai cực khó, bạn nào làm được bài toán này xin hãy gửi thư cho chúng tôi, “nhóm chuyên đề 12 Toán trường Phổ thông Năng Khiếu-Đại học Quốc Gia, Thành phố Hồ Chí Minh”. Năm bạn gửi lời giải

sớm nhất sẽ được gửi tặng một món quà của chúng tôi, các bạn nhớ ghi địa chỉ rõ ràng trong thư gửi đến để thuận tiện trong việc gửi quà cho các bạn **J**.

ì) Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Các biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối luôn gây khó khăn cho chúng ta trong việc tính toán, do đó bất đẳng thức với dấu giá trị tuyệt đối không phải là một vấn đề đơn giản. Trước hết chúng ta hãy điểm qua một số bất đẳng thức trị tuyệt đối cơ bản:

$$|x| \geq 0$$

$$|x| \geq x$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

Các bất đẳng thức trên tuy cơ bản và đơn giản nhưng chúng ứng dụng vào việc giải quyết các bài toán về dấu giá trị tuyệt đối rất tốt, chúng ta hãy xét qua một số ví dụ

Bài toán:

Cho $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường PTNK Tp.HCM)

Giải:

Ta xét 2 trường hợp, n chẵn và n lẻ.

Với n chẵn, đặt $n = 2k$. Ta có:

$$A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |a_{k+1} - x| + |a_{k+2} - x| + \dots + |a_{2k} - x|$$

$$\geq x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + a_{k+1} - x + a_{k+2} - x + \dots + a_{2k} - x$$

$$= -a_1 - a_2 - \dots - a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}.$$

Dấu bằng có thể xảy ra, chặn hạn như $x = a_k$.

Với n lẻ, đặt $n = 2k + 1$. Ta có:

$$A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |x - a_{k+1}| + |a_{k+2} - x| + |a_{k+3} - x| + \dots + |a_{2k+1} - x|$$

$$\geq x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + 0 + a_{k+2} - x + a_{k+3} - x + \dots + a_{2k+1} - x$$

$$= -a_1 - a_2 - \dots - a_k + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{2k+1}$$

Dấu bằng có thể xảy ra, chặn hạn như $x = a_{k+1}$.

Lời giải của bài toán trên có lẽ là khá kỹ thuật, tuy nhiên mọi thứ đều có nguồn gốc của nó. Tác giả đã phải làm với các trường hợp n nhỏ rồi mới có thể giải một cách tổng quát. Đây cũng là một kinh nghiệm trong học và làm Toán, chúng ta nên bắt đầu từ những cái nhỏ và khái quát lên cho cái lớn.

Ngoài việc áp dụng bất đẳng thức $|x| \geq x$, ta còn có thể sử dụng bất đẳng thức:

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \geq |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \text{ để giải quyết bài toán trên.}$$

Một phương pháp cũng hay sử dụng đối với dấu giá trị tuyệt đối nói chung là xét từng khoảng để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Đôi khi, chúng ta cũng thường xuyên sử dụng các bất đẳng thức cổ điển trong việc chứng minh các bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, nhất là bất đẳng thức

Bouniakovski. Bởi lẽ áp dụng bất đẳng thức này, các giá trị tuyệt đối sẽ được bình phương làm mất dấu giá trị tuyệt đối.

Ta thử xét một ví dụ

Bài toán:

Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$(|a+1|+|b+1|)+(|a-1|+|b-1|) \leq 2\sqrt{6}$$

Lời giải dựa trên bất đẳng thức Bouniakovski. Ta làm như sau:

$$1. |a+1|+1. |a-1| \leq \sqrt{2[(a-1)^2+(a-1)^2]} = 2\sqrt{a^2+1}$$

$$1. |b+1|+1. |b-1| \leq \sqrt{2[(b-1)^2+(b+1)^2]} = 2\sqrt{b^2+1}$$

$$2.\sqrt{a^2+1}+2.\sqrt{b^2+1} \leq \sqrt{8(a^2+b^2+2)} = 2\sqrt{6}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về, ta có điều phải chứng minh.

Sau đây là các bài tập áp dụng dành cho bạn đọc:

Bài 1:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau, biết $x \in [-2, 3]$

a) $A = |2x+1|+3.$

b) $B = |x+1|+|2x-1|$

c) $C = |x^2-2x|$

Bài 2:

Chứng minh rằng:

$$3(|ab+1|+|ab-1|)+4(|a+b|+|a-b|) \leq 10\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$$

Bài 3:

Cho các số thực $x, y, z \in [1, 2]$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{|2-xy|}{z(x+y)} + \frac{|2-yz|}{x(y+z)} + \frac{|2-xz|}{y(x+z)}$$

B. Một số vấn đề về cực trị phân thức.

a) Một số kiến thức cần nhớ:

$$\text{Tam thức bậc hai } f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

i) Nếu $a > 0$, $f_{\min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$

ii) Nếu $a < 0$, $f_{\max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$

Định lý: Nếu tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm thì phân tích được thành nhân tử.

b) Một số dạng toán:

i) Dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$

Phương pháp giải và các kết quả về dạng bất đẳng thức này đã được nêu trong phần một số kiến thức cần nhớ.

Dưới đây là một số bài tập áp dụng.

Bài 1: Tìm cực trị các đa thức sau:

a. Tìm min $A = 4x^2 - 4x + 6$.

b. Tìm $\max B = -x + 3\sqrt{x} - 7$

c. Tìm min và max của $f(x) = x^2 - 4x + 6$ khi $x \in [-3, 4]$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 6)$

ii) Dạng $f(x) = \frac{m}{ax^2 + bx + c}$

Phương pháp chủ đạo trong việc tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $g(x) = ax^2 + bx + c$, sau đó tương ứng thành giá trị lớn nhất của $\frac{1}{g(x)}$, sau đó nhân vào m để đạt được điều cần

tìm với $\frac{m}{g(x)}$.

Dưới đây là một số bài tập áp dụng.

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = \frac{-6}{x - 3\sqrt{x} + 7}$

iii) Dạng $f(x) = \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$

Phương pháp tổng quát để hạ bậc những phân thức dạng này là:

Bước 1: (Đổi biến)

Đặt $mx + n = y$.

Bước 2: (Chuyển biến)

Chuyển $f(x)$ thành $f(y)$ bằng cách chuyển $ax^2 + bx + c = a'y^2 + b'y + c'$ (thay $x = \frac{y - n}{m}$)

Khi đó: $f(x) = f(y) = \frac{y}{a'y^2 + b'y + c'}$

Thông thường $a'c' > 0$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$|a'y^2 + c'| \geq 2\sqrt{a'c'}y$ để đánh giá. Tuy nhiên nhớ cẩn thận các trường hợp $y < 0$.

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức $B = \frac{4x + 3}{x^2 + x + 1}$

iv) Dạng $f(x) = \frac{mx^2 + nx + d}{ax^2 + bx + c}$, $am \neq 0$.

Phương pháp giải là đưa về dạng iii), cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} \frac{mx^2 + nx + d}{ax^2 + bx + c} &= \frac{\frac{m}{a}(ax^2 + bx + c) + \left(n - \frac{mb}{a}\right)x + \left(d - \frac{mc}{a}\right)}{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{m}{a} + \frac{\left(n - \frac{mb}{a}\right)x + \left(d - \frac{mc}{a}\right)}{ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

Ta xét qua một số bài tập sau:

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất $B = \frac{3x^2 + 14}{x^2 + 4}$

C. Từ một đẳng thức đại số.

Bài viết này sẽ cung cấp cho các bạn một số bất đẳng thức được hình thành từ các đẳng thức đại số:

Trước hết ta nêu lại một số đẳng thức hay của đại số:

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{(x+y)(y+z)}{(x-y)(y-z)} + \frac{(y+z)(z+x)}{(y-x)(z-x)} + \frac{(z+x)(x+y)}{(z-x)(x-y)} = -1 \quad (2)$$

Trong đó (a, b, c) và (x, y, z) là các bộ số khác nhau phân biệt.

Lưu ý với các bạn rằng hai đẳng thức này là tương đương nhau, chẳng hạn trong (2), đặt $x+y=a, y+z=b, z+x=c$ ta sẽ thu được đẳng thức (1)

Từ các đẳng thức trên ta rút ra một số hệ quả trực tiếp sau đây:

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2 + \left(\frac{z+x}{z-x}\right)^2 \geq 2$$

Đề thi vào lớp 10 PTTH Chuyên Lê Hồng Phong TP.HCM năm 1999.

$$\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(y-z)^2} + \frac{z^2 + x^2}{(z-x)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

$$\frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{yz}{(y-z)^2} + \frac{zx}{(z-x)^2} \geq -\frac{1}{4}$$

Ta hãy xét một số bài toán liên quan đến các bất đẳng thức thú vị này.

Bài toán dưới đây là bài toán về bất đẳng thức Nesbit ở dạng hiệu:

Bài toán:

Cho a, b, c là các số thực phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \geq 2.$$

Rõ ràng các bạn cũng thấy được mối liên hệ với các bất đẳng thức ta đang xét rồi chứ, để mối quan hệ thêm rõ ràng ta bình phương hai vế của bất đẳng thức, và ta thu được:

$$\left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \left(\left| \frac{ab}{(b-c)(c-a)} \right| + \left| \frac{bc}{(c-a)(a-b)} \right| + \left| \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \right| \right) \geq 4$$

Mặc khác ta đã có:

$$\left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 \geq 2$$

$$2 \left(\left| \frac{ab}{(b-c)(c-a)} \right| + \left| \frac{bc}{(c-a)(a-b)} \right| + \left| \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \right| \right) \geq 2 \left| \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \right| = 2$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo vế và ta thu được điều cần chứng minh.

Sau đây là một số bài tập dành cho các bạn đọc:

Bài 1: Cho các số thực x, y, z khác nhau đôi một. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^3 - y^3}{(x-y)^3} + \frac{y^3 - z^3}{(y-z)^3} + \frac{z^3 - x^3}{(z-x)^3}.$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$B = (x^2 + y^2 + z^2) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right]$$

Trong đó x, y, z là các số thực phân biệt.

Bài 3: (Dành cho các bạn học sinh lớp 10 hoặc cao hơn)

Chứng minh rằng nếu $x + y + z = \frac{p}{2}$ thì ta có bất đẳng thức sau:

$$\left| \frac{\cos x}{\sin(y-z)} \right| + \left| \frac{\cos y}{\sin(z-x)} \right| + \left| \frac{\cos z}{\sin(x-y)} \right| \geq 2.$$

Tài liệu tham khảo

- Bất Đẳng Thức
- Giới thiệu tóm tắt cuộc đời và sự nghiệp các nhà Toán Học-Tập 1,2
- Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ
- Các bài toán cực trị của hàm số-Tập 1

Trần Phương.
GS.Nguyễn Cang
PGS.Nguyễn Đăng Phát.

Phan Huy Khải.