

PHƯƠNG TRÌNH

A. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Phần này đề cập đến các phương pháp giải các phương trình có bậc nhỏ hơn 5

I. Phương trình bậc nhất

Dạng tổng quát : $ax + b = c$

Biện luận :

- $a \neq 0$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
- $a = 0$: phương trình có dạng $0x = -b$
 - $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm
 - $b = 0$: phương trình có vô số nghiệm

II. Phương trình bậc hai

Dạng tổng quát : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

Biện luận : Ta xét $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.
- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ví dụ. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + (a+b+c)x + ab+bc+ca = 0$ vô nghiệm với a, b, c là 3 cạnh của một tam giác .

Giải.

Ta có $\Delta = (a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca)$

Mà $\Delta < 0$ do a, b, c là ba cạnh tam giác (xem phần bất đẳng thức hình học)

Định lý Viet và một số ứng dụng

Giả sử $\Delta \geq 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) thì :

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Bằng định lý Viet chúng ta có thể xét dấu của các nghiệm như sau

- Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$ và $S > 0$
- Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P < 0$
- Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$ và $S < 0$

Thí dụ . Tìm m sao cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1 = 0$ (*) có hai nghiệm không nhỏ hơn 2

Giải

Đặt $t = x - 2$ thì phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2mt + 2m - 3 = 0 \quad (**)$$

Phương trình (*) có hai nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 3 \geq 0 \\ 2m \geq 0 \\ 2m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$$

Vậy $m \geq \frac{3}{2}$ thì phương trình (*) có hai nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2

III. Phương trình bậc ba

Dạng tổng quát : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)

Ta đưa về dạng : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (2)

Đặt $x = y - \frac{a}{3}$ thì phương trình (2) được viết lại dưới dạng $y^3 - py - q = 0$ (2') trong đó

$p = \frac{a^2}{3} - b$ và $q = \frac{-2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c$. Công thức nghiệm của phương trình (2') là :

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ được gọi là công thức Cardano, lấy tên của nhà}$$

toán học Italia. Cardan theo học trường đại học Pavie, rồi đại học Padoue và nhận bằng tốt nghiệp Y khoa năm 1526

Cardan viết khá nhiều về Toán, cũng như một số ngành khác. Ông đặt vấn đề giải phương trình bậc ba cụ thể là $x^3 + 6x = 20$. Bây giờ ta nói tổng quát là $x^3 + px = q$. Phương pháp của

Cardan như sau: thay $x = u - v$ và đặt u, v như thế nào đó để tích $uv = \frac{1}{3}$ (hệ số của x trong

phương trình bậc ba đang khảo sát). Nghĩa là $2 = uv$. Từ phương trình $x^3 + 6x = 20$ ta có $(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3 = 20$. Khử v từ $2 = uv$ và từ $u^3 - v^3 = 20$ ta có

$$u^6 = 20u^3 + 8 \Rightarrow u^3 = \sqrt{108} + 10. \text{ Từ } x = u - v \text{ và } u^3 - v^3 = 20, \text{ ta có}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Cardan cho một công thức tương đương đối với phương trình $x^3 + px = q$ là:

$$x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

✖ Các dạng phương trình bậc ba thường gặp và phương pháp giải

1. Giải phương trình khi biết một nghiệm của phương trình

Giả sử ta biết được nghiệm x_0 của phương trình (2) bằng cách đoán nghiệm (thường là các nghiệm nguyên đơn giản từ -3 đến $+3$) tức là $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$. Khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét } \Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c)$$

i) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = x_0$

ii) Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình (2) có các nghiệm

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Thí dụ. Giải phương trình $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$

Giải

Nhận thấy $x = 2$ là 1 nghiệm của phương trình

$$\text{Phương trình } (x - 2)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm $x = 2$

2. Phương trình bậc ba đối xứng

$$\text{Dạng tổng quát } ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0)$$

Phương trình bậc ba đối xứng luôn nhận $x = -1$ làm nghiệm

$$\text{Thật vậy, ta có phương trình } \Leftrightarrow (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0 \end{cases}$$

Mở rộng

Một số tính chất của phương trình hệ số đối xứng (PT HSDX)

$$\text{Dạng tổng quát của PT HSDX } a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n = a_0, a_{n-1} = a_1, \dots)$$

Tính chất 1. PT HSDX nếu có nghiệm x_0 thì $x_0 \neq 0$ và $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm

Tính chất 2. PT HSDX bậc lẻ ($n = 2k + 1$) nhận $x = -1$ là nghiệm

Tính chất 3. Nếu $f(x)$ là đa thức bậc lẻ có hệ số đối xứng thì $f(x) = (x + 1)g(x)$, trong đó $g(x)$ là đa thức bậc chẵn có hệ số đối xứng

Thật vậy, ta xét đa thức bậc 5 làm thí dụ

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = (x + 1)(ax^4 + (b - a)x^3 + (c + a - b)x^2 + (b - a)x + a)$$

Vậy việc giải một phương trình có hệ số đối xứng bậc n lẻ tương ứng với việc giải một phương trình có hệ số đối xứng bậc $n-1$ chẵn

3. Phương trình bậc ba hồi quy

Dạng tổng quát $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a, d \neq 0, ac^3 = db^3$)

q Từ điều kiện ta thấy nếu $c = 0$ thì $b = 0 \Rightarrow$ phương trình (2b) có nghiệm $x = \sqrt[3]{\frac{-d}{a}}$

q Nếu $c \neq 0$ thì $b \neq 0$, điều kiện $\Leftrightarrow \frac{d}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^3$.

Đặt $\frac{c}{b} = -t$ thì $c = -bt$ và $d = -at^3$

khi đó phương trình trở thành $ax^3 + bx^2 - btx - at^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-t)[ax^2 + (at+b)x + at^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ ax^2 + (at+b)x + at^2 = 0 \end{cases}$$

Vậy $x = -\frac{c}{b}$ là 1 nghiệm của phương trình. Nếu $\Delta = (at+b)^2 - 4a^2 \geq 0$ thì phương trình có

thêm các nghiệm là $x = \frac{-(at+b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Thí dụ. Giải phương trình $8x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$

Đáp số. $x = -\frac{1}{2}$

IV. Phương trình bậc bốn

Dạng tổng quát $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0$ ($a \neq 0$)

Ta đưa về dạng $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ (3)

Đặt $t = x - \frac{a}{4}$ thì phương trình (3) được đưa về dạng $x^4 = px^2 + qx + r$ (3') trong đó

$$\begin{cases} p = \frac{3a^2}{8} - b \\ q = -\frac{a^3}{8} + \frac{1}{2}ab - c \\ r = \frac{1}{256}(3a^4 - 16a^2b + 64ac - 256d) \end{cases}$$

Phương trình (3') $x^4 + 2ax^2 + a^2 = (p+2a)x^2 + qx + (r+a^2)$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow (x^2 + a)^2 = (p+2a)x^2 + qx + (r+a^2) \quad (3^*)$$

Ta tìm a thỏa hệ thức $q^2 = 4(p+2a)(r+a^2)$ để viết vế phải thành

$$(p+2a) \left[x + \frac{q}{2(p+2a)} \right]^2$$

Khi đó ta được $(x^2 + a)^2 = (p + 2a) \left[x + \frac{q}{2(p + 2a)} \right]^2$ (3**)

§ Nếu $p + 2a = 0$ thì phương trình (3*) $\Leftrightarrow (x^2 + a)^2 = r + a^2$ (Bạn đọc tự biện luận tiếp)

§ Nếu $p + 2a < 0$ thì phương trình (3**) vô nghiệm (do VT ≥ 0 và VP < 0)

§ Nếu $p + 2a > 0$ thì phương trình (3**) $\Leftrightarrow x^2 = \pm \sqrt{p + 2a} \left[x + \frac{q}{2(p + 2a)} \right] - a$

Đây là phương trình bậc 2 theo x , các bạn tự biện luận

Thí dụ. Giải phương trình $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$ (*)

Giải.

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x^4 = 2x^2 + 8x + 3$

Ta chọn a thỏa $64 = 4(2 + 2a)(3 + a^2)$. Dễ dàng nhận thấy $a = 1$ thỏa

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 8x + 4$ (cộng mỗi vế một lượng $2x^2 + 1$)

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 4(x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2(x + 1) \\ x^2 + 1 = -2(x + 1) \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1 \pm \sqrt{5}$

✖ Các dạng phương trình bậc bốn thường gặp và phương pháp giải

1. Phương trình bậc bốn trùng phương:

Dạng tổng quát $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải rất đơn giản bằng cách đặt $y = x^2 \geq 0$ để đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai $ay^2 + by + c = 0$ và biện luận

2. Phương trình bậc bốn đối xứng

Dạng tổng quát $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$)

Do $a \neq 0$ nên $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, ta có thể chia cả 2 vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ và được $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0 \quad (*)$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ (điều kiện : $|y| \geq 2$) $\Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Khi đó phương trình (*) trở thành $ay^2 + by + c - 2a = 0$ và dễ dàng giải được

Lưu ý

Ngoài kiểu phương trình bậc bốn đối xứng như trên còn có phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng lệch $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải tương tự như trên, xin giành cho bạn đọc

Thí dụ: Cho phương trình : $8x^4 - 5x^3 + mx^2 + 5x + 8 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = -16$.

b) Tìm m để phương trình vô nghiệm .

Đáp số: a) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{5 + \sqrt{281}}{16}, x_4 = \frac{5 - \sqrt{281}}{16}$

b) $m \leq \frac{-487}{32}$.

3. Phương trình bậc bốn hồi quy :

Dạng tổng quát : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, ($a \neq 0$) trong đó $ad^2 = eb^2$ (*)

q Nếu $b = 0$ thì $d = 0$ phương trình trở thành phương trình trùng phương :
 $ax^4 + cx^2 + e = 0$ và ta giải quyết được theo phương pháp 1.

q Nếu $b \neq 0$ thì $d \neq 0$, điều kiện **đ** $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$

Đặt $\frac{d}{b} = t$ thì $e = at^2$ và $d = bt$ thì phương trình (*) trở thành:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + btx + at^2 = 0. \quad (**)$$

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (**) nên ta chia 2 vế phương trình (**) cho $x^2 \neq 0$ ta được $ax^2 + bx + c + \frac{bt}{x} + \frac{at^2}{x^2} = 0$

$$\text{đ} \quad a\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{t}{x}\right) + c = 0 \quad (***)$$

Đặt $x + \frac{t}{x} = y$ (điều kiện : $y^2 \geq 4t$) $\Rightarrow x^2 + \frac{t^2}{x^2} + 2t = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{t^2}{x^2} = y^2 - 2t$.

Phương trình (***) trở thành : $ay^2 + by + c - 2at = 0$ là phương trình bậc hai theo y , ta sẽ tìm được nghiệm $y \Rightarrow$ tìm được x .

Thí dụ : giải phương trình $2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0$.

Hướng dẫn: Đặt $x - \frac{5}{x} = y$ ta thu được phương trình : $2y^2 - 21y + 54 = 0$ có nghiệm

$$y_1 = 6, y_2 = \frac{9}{2}$$

o Với $y_1 = 6$ thì ta thu được các nghiệm : $x_1 = 3 + \sqrt{14}, x_2 = 3 - \sqrt{14}$.

o Với $y_2 = \frac{9}{2}$ thì ta thu được : $x_3 = \frac{9 + \sqrt{161}}{4}, x_4 = \frac{9 - \sqrt{161}}{4}$.

4. Phương trình bậc bốn dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c, (c > 0)$: (3d)

Phương pháp giải phương trình loại này là đặt $x = y - \frac{a+b}{2}$. Khi đó phương trình (3d) trở thành:

$$\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \text{ Đặt } a = \frac{a-b}{2} \text{ để được phương trình gọn hơn:}$$

$$(y+a)^4 + (y-a)^4 = c \Leftrightarrow [(y+a)^2 + (y-a)^2]^2 - 2(y+a)^2(y-a)^2 = c$$

$$\Leftrightarrow (2y^2 + 2a^2)^2 - 2(y^2 - a^2)^2 = c$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2a^2 + 2a^4 - c = 0 \quad (*)$$

(*) là phương trình trùng phương theo y.

Ta giải quyết tiếp bài toán theo phương pháp 1.

Thí dụ : Giải phương trình $(x-2004)^4 + (x-2006)^4 = 2$

Đáp số: $x = 2005$

5. Phương pháp hệ phương trình đối xứng

Khi ta gặp các phương trình dạng $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x \quad (a \neq 0)$ (4e)

thì ta chuyển về hệ phương trình bằng cách đặt $y = ax^2 + bx + c$. Lúc đó ta có hệ đối xứng

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = x \end{cases} \quad \text{Ta trừ vế theo vế hai phương trình của hệ và thu được}$$

$$a(x-y)(x+y) + b(x-y) = y-x \Leftrightarrow (x-y)(ax+ay+b+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x+y = \frac{-(b+1)}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax^2 + bx + c \\ x+ax^2 + bx + c = \frac{-(b+1)}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + (b-1)x + c = 0 \\ ax^2 + (b+1)x + \frac{b+ac+1}{a} = 0 \end{cases}$$

Giải 2 phương trình bậc hai này ta thu được nghiệm của phương trình

Thí dụ. Giải phương trình $(x^2 + x - 2)^2 + x^2 = 4$

Giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)^2 + (x^2 + x - 2) - 2 = x$$

$$\text{Đặt } y = x^2 + x - 2 \text{ thì ta có hệ: } \begin{cases} x^2 + x - 2 = y \\ y^2 + y - 2 = x \end{cases}$$

$$\text{Trừ vế theo vế ta được } (x-y)(x+y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x+y+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 + x - 2 \\ x+x^2 + x - 2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \vee x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x \in \{-2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

6. Phương trình bậc bốn dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m \quad (a+b+c+d = b)$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (x^2 + bx + ab)(x^2 + bx + cd) = m$$

Đặt $x^2 + bx = y$ thì ta được phương trình $(y + ab)(y + cd) = m$

$$\Leftrightarrow y^2 + (ab + cd)y + abcd - m = 0$$

Giải ra ta tìm được y rồi thay vào phương trình ban đầu để tìm x

Thí dụ. Giải phương trình $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297$

Giải

Để ý thấy $(-1) + 5 = (-3) + 7$ cho nên ta biến đổi lại như sau:

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (x-1)(x+5)(x-3)(x+7) = 297$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = 297$$

$$\Leftrightarrow (y - 5)(y - 21) = 297 \quad (y = x^2 + 4x)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 26y - 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 32, \quad y_2 = -6$$

7. Phương trình bậc bốn dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = mx^2$ ($ad = bc = b$)

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (x+a)(x+d)(x+b)(x+c) = mx^2$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (a+d)x + b][x^2 + (b+c)x + b] = mx^2$$

Ta chỉ quan tâm đến trường hợp $b \neq 0$. Khi đó $x = 0$ không là nghiệm phương trình trên

Chia 2 vế phương trình trên cho $x^2 \neq 0$ ta được

$$\left(x + \frac{b}{x} + a + b\right)\left(x + \frac{b}{x} + c + d\right) = m$$

Đặt $y = x + \frac{b}{x}$ ta thu được phương trình

$$(y + a + b)(y + c + d) = m \Leftrightarrow y^2 + (a + b + c + d)y + (a + b)(c + d) - m = 0$$

Giải phương trình trên ta thu được y từ đó tìm được x

Thí dụ. Giải phương trình $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2$

Hướng dẫn.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) = 168$$

$$\Leftrightarrow (y + 7)(y + 5) = 168 \quad \left(y = x + \frac{6}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 12y - 133 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = -19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x} = 7 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 6 \\ x + \frac{6}{x} = -19 \Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{337}}{2} \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x \in \left\{1, 6, \frac{-19 + \sqrt{337}}{2}, \frac{-19 - \sqrt{337}}{2}\right\}$

B. CÁC PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

Trong phần này tôi xin giới thiệu cùng bạn đọc một số phương trình thường gặp trong các kì thi như : phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối , phương trình vô tỷ, phương trình chứa ẩn ở mẫu.

I. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối :

Một số tính chất của $|A|$: $|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases} \quad \forall A \in \mathbb{R}$

1) $|A+B| \leq |A|+|B|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AB \geq 0$.

Chứng minh : Bình phương 2 vế : $A^2 + 2AB + B^2 \leq A^2 + 2|AB| + B^2$ **ó** $AB \leq |AB|$: luôn đúng.

2) $|A-B| \geq |A|-|B|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow B(A-B) \geq 0$

Chứng minh: Áp dụng tính chất 1 ta có : $|A| = |(A-B)+B| \leq |A-B| + |B|$

$\Leftrightarrow |A-B| \geq |A|-|B|$: đpcm.

Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A|$

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} = 1$

Giải: phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = 1$

$\Leftrightarrow |x-1| + |2-x| = 1$. (Đổi ý $|x-2| = |2-x|$)

Áp dụng tính chất 1 ta có $|x-1| + |2-x| \geq |(x-1)+(2-x)|$

$\Leftrightarrow |x-1| + |2-x| \geq 1$. Dấu “=” $\Leftrightarrow (x-1)(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

v Một số dạng thường gặp:

1. Phương trình dạng $|A| = |B|$ (5a)

Phương trình (5a) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$

2. Phương trình dạng $|A| = B$ (5b)

Phương trình (5b) $\Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$ hoặc

Phương trình (5b) $\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hay $\begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$

3. Phương trình chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối :

Phương pháp thường dùng là xét nghiệm của phương trình trên từng khoảng giá trị của TXĐ.

Thí dụ : giải phương trình $|3x+3| + |x-5| = |2x-4|$ (5c).

Giải: Nghiệm của các phương trình $(3x+3)$, $(x-5)$, $(2x-4)$ lần lượt là -1 , 5 , 2 .

o Khi $x \geq 5$ thì phương trình (5c) trở thành : $(3x+3) + (x-5) = (2x-4) \Leftrightarrow x = -1$ (loại do không thuộc khoảng đang xét)

o Khi $2 \leq x < 5$ thì phương trình (5c) trở thành $(3x+3) + (5-x) = (2x-4) \Rightarrow$ vô nghiệm .

o Khi $-1 \leq x < 2$ thì phương trình (5c) trở thành $(3x + 3) + (5 - x) = (4 - 2x) \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa)

o Khi $x < -1$ thì phương trình (5c) trở thành $(-3x - 3) + (5 - x) = (4 - 2x) \Leftrightarrow x = -1$ (loại do không thuộc khoảng đang xét)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất : $x = -1$

2. Phương trình vô tỷ:

Đây là phần quan trọng nhất trong các loại phương trình vì nó rất đa dạng và phức tạp. Phương trình vô tỷ thường xuất hiện nhiều trong các kỳ thi, đặc biệt là kỳ thi học sinh giỏi, thi vào các trường chuyên ... Trong mục này chúng ta chỉ chú trọng đến phương trình chứa căn bậc hai và ba và các phương pháp giải chúng.

V Một số tính chất cơ bản:

- $\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$
- $\sqrt[n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^{n+1}$
- $[f(x)]^{2n} = [g(x)]^{2n} \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)|$
- $[f(x)]^{2n+1} = [g(x)]^{2n+1} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Lưu ý: Phép nâng lũy thừa với số mũ chẵn là phép biến đổi tương đương khi 2 vế cùng dấu.

V Một số dạng phương trình vô tỷ thường gặp và phương pháp giải:

1. Phương pháp giản ước:

Khi ta chia 2 vế của phương trình cho $\sqrt{f(x)}$ thì phải chú ý điều kiện $f(x) \geq 0$

Thí dụ: giải phương trình $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$ (6a).

Giải: Điều kiện : $x \geq 5$ hoặc $x \leq -3$.

Xét $x \geq 5$: khi đó ta chia 2 vế phương trình (6a) cho $\sqrt{x} > 0$ thì thu được :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} &= \sqrt{x+3} \text{ . Bình phương 2 vế không âm cho ta phương trình :} \\ 2x - 7 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x-5} &= x+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}\sqrt{x-5} = 10 - x. \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x \geq 0 \\ 4(x-2)(x-5) = (10-x)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10 \geq x \\ 3x^2 - 8x - 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 6 \text{ (thỏa)}, x_2 = \frac{-10}{3} \text{ (loại)} \end{aligned}$$

Xét $x \leq -3 \Rightarrow -x > 0$: phương trình (6a) $\Leftrightarrow \sqrt{(-x)(2-x)} + \sqrt{(-x)(5-x)} = \sqrt{(-x)(-x-3)}$ (6a1)

Chia 2 vế phương trình (6a1) cho $\sqrt{(-x)}$ ta được : $\sqrt{2-x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{-3-x}$.

Rõ ràng VT > VP $\Rightarrow$ vô nghiệm .

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất : $x = 6$.

2. Phương pháp trị tuyệt đối hóa:

Trong một vài trường hợp ta có thể đưa biểu thức chứa ẩn dưới căn thức về được dạng bình phương.

Khi đó ta được biểu thức chứa trong dấu giá trị tuyệt đối nhờ tính chất : $\sqrt{A^2} = |A|$

Thí dụ: giải phương trình $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} - 6\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1}$ (6b)

Hướng dẫn: (6b) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{(x+1)-6\sqrt{x+1}+9} = 2\sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-3)^2} = 2\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x+1}+1| + |\sqrt{x+1}-3| = 2|\sqrt{x+1}-1|$$

Đặt $\sqrt{x+1} = y$ thì ta được phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối quen thuộc:
 $|y+1| + |y-3| = 2|y-1|$

3. Phương pháp hữu tỷ hoá:

Đây là phương pháp chuyển phương trình chứa căn thức về dạng phương trình hữu tỷ (có bậc nguyên) bằng cách đặt ẩn phụ.

Thí dụ 1) giải phương trình : $x^2 + 8x + 12 - 2\sqrt{x^2 + 8x + 8} = 3$ (6c1)

Giải: Đặt $\sqrt{x^2 + 8x + 8} = y$ ($y > 0$) thì $x^2 + 8x + 12 = (x^2 + 8x + 8) + 4 = y^2 + 4$. Phương trình (6c1) trở thành: $y^2 + 4 - 2y = 3 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa điều kiện). $\Rightarrow x^2 + 8x + 8 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = -7$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = -7$.

Thí dụ 2) Giải phương trình $\sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{2}$ (6c2)

Giải:

Điều kiện : $1 \leq x \leq 5$.

Ta đặt $\sqrt[4]{x-1} = y + m$ (m là hằng số) $\Rightarrow x = (y + m)^4 + 1$.

Do $1 \leq x \leq 5$ nên $-m \leq y \leq -m + \sqrt{2}$.

Khi đó $\sqrt[4]{5-x} = \sqrt[4]{4-(y+m)^4}$, phương trình (6c2) trở thành:

$$y + m + \sqrt[4]{4-(y+m)^4} = \sqrt{2} \quad (6c3) \Leftrightarrow \sqrt[4]{4-(y+m)^4} = \sqrt{2} - y - m.$$

Do $y \leq -m + \sqrt{2}$ nên $\sqrt{2} - y - m \geq 0$.

$$\text{Phương trình (6c3)} \Leftrightarrow 4 - (y + m)^4 = (\sqrt{2} - y - m)^4.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - y - m)^4 + (y + m)^4 = 4$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt{2} - y - m)^2 + (y + m)^2]^2 - 2(\sqrt{2} - y - m)^2 (y + m)^2 = 4. \quad (6c4).$$

Đến đây ta chọn m tốt nhất sao cho phương trình (6c4) trở thành phương trình bậc bốn trùng phương, nghĩa là $\sqrt{2} - y - m$ và $y + m$ phải là 2 lượng liên hợp

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - m = m \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Phương trình (6c4) trở thành

$$[(\frac{\sqrt{2}}{2} - y)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + y)^2]^2 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - y)^2 (\frac{\sqrt{2}}{2} + y)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2y^2)^2 - 2(\frac{1}{2} - y^2)^2 = 4 \Leftrightarrow 2y^4 + 6y^2 - \frac{7}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

• $y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $x_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})^4 + 1 = 1$

• $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $x_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 1 = 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm : $x_1 = 5, x_2 = 1$.

Điều cần lưu ý ở các bài toán dạng này là chọn m thích hợp để làm bài toán gọn hơn, đơn giản hơn.

✗ Một số dạng phương trình thường gặp :

i) $\sqrt{a+cx} + \sqrt{b-cx} + d\sqrt{(a+cx)(b-cx)} = n \quad (c > 0, d \neq 0) \quad (6c)$

Phương pháp giải:

Điều kiện : $a+cx \geq 0$ và $b-cx \geq 0 \Rightarrow \frac{-a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}$ và $a+b \geq 0$.

Đặt $y = \sqrt{a+cx} + \sqrt{b-cx}$ thì $y \geq 0$ và $y^2 \leq 2(a+b)$ (bạn đọc tự chứng minh !)
 $\Rightarrow 2\sqrt{(a+cx)(b-cx)} = y^2 - a - b \quad (6c1) \Rightarrow y^2 \geq a+b$.

Phương trình (6c) trở thành

$2y + d(y^2 - a - b) = n \quad \text{đ} \quad dy^2 + 2y - (a+b+n) = 0 \quad (6c2).$

Điều kiện của y là: $\sqrt{a+b} \leq y \leq 2\sqrt{a+b}$.

Giải phương trình (6c2) ta có y, thay y vào phương trình (6c1) rồi bình phương 2 vế ta tìm được x.

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt{x+4} + \sqrt{1-x} - \sqrt{(x+4)(1-x)} = 1$

Đáp số: $x = 0$

ii) $\sqrt{x+a^2-b+2a\sqrt{x-b}} + \sqrt{x+c^2-b+2c\sqrt{x-b}} = dx+m \quad (a \neq 0) \quad (6d)$

Phương pháp giải:

Điều kiện : $x \geq b$.

Phương trình (6d) $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-b}+a)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-b}+c)^2} = dx+m$
 $\Leftrightarrow |\sqrt{x-b}+a| + |\sqrt{x-b}+c| = dx+m$

Đặt $\sqrt{x-b} = y \quad (y \geq 0)$ rồi giải phương trình chứa a dấu giá trị tuyệt đối theo y.

Từ đó suy ra x.

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 2x-1$

Đáp số : $x = 2$

4. Phương pháp hệ phương trình hóa:

Trong phần này tôi xin trình bày cách chuyển một phương trình vô tỷ về hệ phương trình hữu tỷ cũng bằng cách đặt ẩn phụ.

i) Phương trình bậc hai chứa căn :

Dạng tổng quát : $\sqrt{ax+b} = r(ux+v)^2 + dx + e \quad (a, u, r \neq 0) \quad (6e)$

Phương pháp giải:

Điều kiện : $ax+b \geq 0$.

Đặt $\sqrt{ax+b} = uy+v \quad (uy+v \geq 0) \quad \text{đ} \quad ax+b = (uy+v)^2 \quad (6e1)$

Phương trình (6e) trở thành

$$r(ux + v)^2 = uy + v - dx - e \quad (6e2)$$

Nếu $\begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$ thì từ (6e1) và (6e2) ta có hệ sau $\begin{cases} r(uy + v)^2 = arx + br \\ r(ux + v)^2 = uy + (ar - u)x + br \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$$\begin{aligned} & r(uy+v)^2 - r(ux+v)^2 = ux - uy \\ \Leftrightarrow & u(y-x)(ruy + rux + 2rv + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ uy = -ux - 2v - \frac{1}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ux + v = uy + v \\ \sqrt{ax+b} - v = -ux - 2v - \frac{1}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ux+v)^2 = ax+b \\ \sqrt{ax+b} = -\left(ux+v + \frac{1}{r}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải 2 phương trình trên ta tìm được nghiệm phương trình .

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt{2x+5} = 32x^2 + 32x$. (6e3)

Giải :

Điều kiện : $x \geq \frac{-5}{2}$

Phương trình (6e3) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = 2(4x+2)^2 - 8$.

Đặt $\sqrt{2x+5} = 4y+2$ ($y \geq \frac{-5}{2}$) thì ta có hệ $\begin{cases} (4y+2)^2 = 2x+5 \\ (4x+2)^2 = 2y+5 \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta được

$$2(y-x)(4y+4x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 4y = -4x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5} = 4x+2 & (6e4) \\ \sqrt{2x+5} - 2 = -4x-5 & (6e5) \end{cases}$$

o Giải (6e4) : phương trình (6e4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x+5 = 16x^2 + 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{65}}{16}$

o Giải (6e5) : phương trình (6e5) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{3}{4} \\ 2x+5 = (4x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-11 - \sqrt{57}}{16}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là : $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{65}}{16}$, $x_2 = \frac{-11 - \sqrt{57}}{16}$

Lưu ý.

Cách giải hoàn toàn tương tự khi ta xét phương trình bậc ba có chứa căn bậc ba :

$\sqrt[3]{ax+b} = r(ux+v)^3 + dx + e$ với điều kiện $\begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$ (Xin giành cho bạn đọc !)

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$.

Hướng dẫn : Biến đổi phương trình thành $\sqrt[3]{3x-5} = (2x-3)^3 - x + 2$ và giải.

ii) Phương trình dạng $\sqrt{a-f(x)} + \sqrt{b+f(x)} = c$.

Trong đó $f(x)$ là một hàm số chứa biến x , $f(x)$ thường bằng kx , kx^2 , $k\sqrt{x-d}$

Cách giải phương trình loại này là đặt ẩn phụ và đừng quên tìm điều kiện để căn có nghĩa !

Ta đặt
$$\begin{cases} u = \sqrt{a - f(x)} \\ v = \sqrt{b + f(x)} \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = c \\ u^2 + v^2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = c \\ uv = \frac{c^2 - a - b}{2} \end{cases}.$$

Theo định lý Viet đảo ta có u, v là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 - cX + \frac{c^2 - a - b}{2} = 0.$$

Giải ra ta tìm được $u, v \Rightarrow$ tìm được $f(x) \Rightarrow$ tìm được x .

Lưu ý: $f(x)$ là nghiệm chung của hệ (I).

✖ Các dạng thường gặp của loại phương trình này là:

- $\sqrt{a + f(x)} - \sqrt{b - f(x)} = c$
- $\sqrt[3]{a + f(x)} \pm \sqrt[3]{b - f(x)} = c$
- $\sqrt[4]{a + f(x)} \pm \sqrt[4]{b - f(x)} = c$
- $\sqrt[5]{a + f(x)} \pm \sqrt[5]{b - f(x)} = c$

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt[3]{-1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{x}} = 2$

Đáp số : $x = 4$

Ngoài ra còn có dạng sau: $\sqrt[m]{a - f(x)} + \sqrt[n]{b + f(x)} = c$ ($m \neq n, \max\{m, n\} = 4$)

Sau khi đặt ẩn phụ ta thu được phương trình có bậc nhỏ hơn 5 .

5. Phương pháp lượng liên hợp:

Việc nhân một lượng liên hợp vào một biểu thức làm cho việc giải phương trình trở nên dễ dàng hơn. Phương pháp này được sử dụng trong nhiều mục đích khác nhau, ở đây tôi xin đưa ra 3 lợi ích khi sử dụng phương pháp này :

▼ Nhằm tạo ra một nhân tử chung với vế còn lại.

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2} = x+3$ (7a)

Giải:

Điều kiện : $x \geq 2$

Để ý thấy $(2x + 1) - (x - 2) = x + 3 = VP$. Do đó ta nhân lượng liên hợp vào 2 vế của phương trình :

$$(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2}) (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2}) = (x+3)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow x+3 = (x+3)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm}$$

▼ Nhằm tạo ra ở mỗi vế một nhân tử chung.

Thí dụ : giải phương trình $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$ (7b)

Giải :

Điều kiện : $x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x \geq \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

$$(7b) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2+2x+3} = \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-3x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2+2x+3})(\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3})}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-3x-2})(\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2})}{\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(2x+4)}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}} = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy phương trình có duy nhất 1 nghiệm : $x = -2$

v Nhằm chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất.

Thí dụ : giải phương trình $\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}}{2} = x + \sqrt{x^2-9} - 9 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (7c)

Giải :

Điều kiện : $x \geq 3$.

$$\text{Phương trình (7c)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{2}}{2} = (x-5) + (\sqrt{x^2-9} - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2})}{2(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x-3} - \sqrt{2})(\sqrt{x-3} + \sqrt{2})}{2(\sqrt{x-3} + \sqrt{2})}$$

$$= (x-5) + \frac{\sqrt{x^2-9} - 4)(\sqrt{x^2-9} + 4)}{\sqrt{x^2-9} + 4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{2(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2})} + \frac{x-5}{2(\sqrt{x-3} + \sqrt{2})} = (x-5) + \frac{(x-5)(x+5)}{\sqrt{x^2-9} + 4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ \frac{1}{2(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2})} + \frac{1}{2(\sqrt{x-3} + \sqrt{2})} = 1 + \frac{x+5}{\sqrt{x^2-9} + 4} \end{cases} \quad (7c1)$$

Xét phương trình (7c1). Ta có VT $< \frac{1}{2(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1 < VP$ suy ra (7c1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất : $x = 5$.

III. Phương trình chứa ẩn ở mẫu :

Đối với phương trình loại này chúng ta cần lưu ý tìm điều kiện của x để mẫu khác 0
Sau đây là một số phương pháp giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp khử phân thức

Mục đích của phương pháp là dùng để triệt tiêu và rút gọn các phân thức của mẫu để làm bài toán trở nên đơn giản hơn

Thí dụ

$$\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Giải

Điều kiện $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -5, -6, -7\}$

Phương trình trên tương đương

$$\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7}\right) = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -13 \end{cases}$$

2. Phương pháp nhân tử hóa

Phương pháp này được dùng để biến đổi các phân thức của phương trình sao cho mỗi phân thức có chứa nhân tử chung bằng cách thêm bớt các lượng thích hợp

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\frac{x-305}{1700} + \frac{x-307}{1698} + \frac{x-309}{1696} + \frac{x-401}{1694} = 4$$

Giải

Phương trình trên tương đương

$$\left(\frac{x-305}{1700} - 1\right) + \left(\frac{x-307}{1698} - 1\right) + \left(\frac{x-309}{1696} - 1\right) + \left(\frac{x-401}{1694} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2005}{1700} + \frac{x-2005}{1698} + \frac{x-2005}{1696} + \frac{x-2005}{1694} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2005$$

Thí dụ 2.

$$\frac{4x^2+18}{x^2+7} - \frac{5}{x^2+2} = \frac{7}{x^2+4} + \frac{9}{x^2+6}$$

Giải

Phương trình trên tương đương

$$\left(\frac{4x^2+18}{x^2+7} - 3\right) = \left(\frac{5}{x^2+2} - 1\right) + \left(\frac{7}{x^2+4} - 1\right) + \left(\frac{9}{x^2+6} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x^2+7} = \frac{3-x^2}{x^2+2} + \frac{3-x^2}{x^2+4} + \frac{3-x^2}{x^2+6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

3. Phương pháp lượng liên hợp

Phương pháp này đã được đề cập đến khá kĩ ở phần phương trình vô tỉ. Ở đây tôi chỉ ra một ứng dụng khác của phương pháp lượng liên hợp đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu

Thí dụ

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1$$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình trên tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})} \\ & + \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 1 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) + (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+3}-\sqrt{x} = 1 \\ \Leftrightarrow & x = 1 \end{aligned}$$

4. Phương pháp chia xuống

Ý tưởng của phương pháp là áp dụng tính chất của việc chia cả tử và mẫu cho một lượng khác không thì không đổi.

Thí dụ:

Giải phương trình:

$$\frac{x}{x^2+3x+1} + \frac{2x}{3x^2+5x+3} = -1$$

Giải:

Điều kiện

$$\begin{cases} x^2+3x+1 \neq 0 \\ 3x^2+5x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Ta chia cả tử và mẫu của các phân

thức $\frac{x}{x^2+3x+1}, \frac{2x}{3x^2+5x+3}$ cho $x \neq 0$ thì phương trình trên trở thành :

$$\frac{1}{x+3+\frac{1}{x}} + \frac{2}{3x+5+\frac{3}{x}} = -1$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ ($|y| \geq 2$), ta thu được:

$$\frac{1}{y+3} + \frac{2}{3y+5} = -1$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 19y + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases}$$

Với $y = -2$ thì $x = -1$.

Với $y = -\frac{13}{3}$ thì $x = \frac{-13 \pm \sqrt{133}}{6}$.

Các nghiệm trên đều thỏa điều kiện của phương trình.

5. Phương pháp đánh giá.

Đây là một phương pháp hay và thường đưa tới lời giải đẹp ngắn gọn. Phương pháp này sử dụng các bất đẳng thức và cách đánh giá như sau.

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) = a$$

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$$

Giải:

Phương trình trên tương đương với:

$$\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2$$

Nhận xét :

$$\begin{cases} \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} \geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \\ 5 - (x+1)^2 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Ngoài ra ta còn có thể biến đổi phương trình thành dạng tổng các bình phương:

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) = 0$$

Khi đó $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$

Nghiệm của phương trình là nghiệm chung của $f_i(x) = 0, i = \overline{1, n}$.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$x^4 - x^2 + 3x + 5 - 2\sqrt{x+2} = 0$$

Giải:

Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^4 - 2x^2 + 1) + (x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x^2 - 1)^2 + (\sqrt{x+2} - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

Thật quá đẹp phải không các bạn **J**

Phương trình sử dụng phương pháp này thường chỉ có 1 nghiệm x_0 và nghiệm này thường dễ đoán.

Cách đánh giá dựa trên việc xét $x > x_0$ và $x < x_0$ để suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sqrt{5 - x^6} - \sqrt[3]{3x^4 - 2} = 1$$

Giải:

Điều kiện: $-\sqrt[6]{5} \leq x \leq \sqrt[6]{5}$.

Phương trình tương đương với $\sqrt{5 - x^6} = \sqrt[3]{3x^4 - 2} + 1$

Ta dễ thấy phương trình có nghiệm $|x| = 1$, nghĩa là $x = \pm 1$.

Khi $|x| > 1$

$$\begin{cases} \sqrt{5 - x^6} < \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{3x^4 - 2} + 1 > \sqrt[3]{1} + 1 = 2 \end{cases} \text{ . Suy ra phương trình vô nghiệm.}$$

Khi $|x| > 1$

$$\begin{cases} \sqrt{5-x^6} > \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{3x^4-2} + 1 < \sqrt[3]{1} + 1 = 2 \end{cases} \text{ . Suy ra phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình chỉ có nghiệm $x = \pm 1$.

Một số tính chất cơ bản thường dùng

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$1 \leq x \Rightarrow x^n \geq x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Thí dụ: Giải phương trình.

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[6]{1-x} = 1$$

Giải:

Điều kiện đơn giản, các bạn có thể dễ dàng xác định.

Đặt $a = \sqrt{1-x^2}, b = \sqrt[4]{x^2+x-1}, c = \sqrt[6]{1-x}$ thì ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \\ a, b, c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq a \\ b^4 \leq b \\ c^6 \leq c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = a^2 + b^4 + c^6 \leq a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b^4 = b \\ c^6 = c \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài tập tổng hợp

Bài 1: Giải phương trình:

$$(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$$

Bài 2: Giải phương trình:

$$\frac{8}{x^2+4} + \frac{20}{x^2+16} = 3 - \frac{14}{x^2+10}$$

Bài 3: Giải phương trình:

$$x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

Bài 4: Giải phương trình:

$$(x-1)(x-5)(x-3)(x-7) = 20$$

Bài 5: Giải phương trình:

$$\frac{2x^2-1}{x} + \frac{5x}{2x^2-x-1} = \frac{20}{3}$$

Bài 6: Giải phương trình:

$$(x-1)^8 + (x-2)^{10} = 1$$

Bài 7: Giải phương trình:

$$||x-8|-2| = 4$$

Bài 8: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}} = 6$$

Bài 9: Giải phương trình:

$$x^2 - \sqrt{x+5} = 5$$

Bài 10: Giải phương trình:

$$8x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

Bài 11: Giải phương trình:

$$x^4 = 4x^2 - 3$$

Bài 12: Giải phương trình:

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$$

Bài 13: Giải phương trình:

$$(x+3)^4 + (x+5)^4 = 4$$

Bài 14: Giải phương trình:

$$\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}$$

Bài 15: Giải phương trình:

$$x^2 + 3x + 3 = \sqrt{2x+3}$$

Bài 16: Giải phương trình:

$$\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Các hệ phương trình cơ bản

A. Hệ phương trình đối xứng :

Dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$
 mà ở đó vai trò của x, y như nhau.

Tức là
$$\begin{cases} f(x, y) = f(y, x). \\ g(x, y) = g(y, x). \end{cases}$$

Cách giải:

- Thông thường người ta đặt ẩn phụ:

$$S = x + y \quad \text{hay} \quad S = x - y$$

$$P = xy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(S, P) = 0 \\ g(S, P) = 0 \end{cases}$$
 sau đó tìm được S, P và tìm được các nghiệm (x, y)

Ví dụ: Giải hệ

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

Như đã nói ở trên, ta hãy đặt $S = x + y; P = xy$ và hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} SP = 6 \\ S + P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

Từ đây ta dễ dàng tìm được các nghiệm (x, y) sau:

$$(x, y) = (1, 2); (2, 1)$$

- Nhưng để phương pháp trên áp dụng hữu hiệu thì ta nên biến đổi một chút các ẩn số để sau khi đặt ẩn phụ, ta được những phương trình nhẹ nhàng hơn

Ví dụ 1:
$$\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 35 \end{cases}$$

Đặt $S = (x+1) + (y+1)$; $P = (x+1)(y+1)$ ta sẽ có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} P = 6 \\ S(S^2 - 3P) = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 2:
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$$

Ở đây theo thông lệ chúng ta hãy thử đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, ta thu được hệ sau:

$$\begin{cases} S^2 + S - 2P = 8 \\ P(P + S + 1) = 12 \end{cases}$$

Rõ ràng mọi chuyện không đơn giản chút nào. Tuy nhiên có lẽ các bạn cũng sẽ nhận ra sự tinh tế trong bài toán, đó là ở bậc của mỗi phương trình. Phương trình đầu tiên bậc 2 có lẽ chứa P. Thế nhưng nó không ở một dạng tích thuận tiện nào, trong khi phương trình thứ hai lại ở dạng tích và bậc 4, gấp đôi bậc 2. Nếu các bạn nhìn trong biểu thức S và P, bậc của P gấp đôi bậc của S, như vậy phải chăng phương trình thứ nhất là S, thứ hai là P. Nếu vậy thì các giá trị x và y trong P là gì. Quan sát phương trình thứ hai các bạn có thể dễ dàng nhận ra sự tinh tế này, đó là $x(x+1)$ và $y(y+1)$.

Từ ý tưởng này ta đặt:

$$a = x(x+1)$$

$$b = y(y+1)$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$$

Như vậy (x, y) là nghiệm của các phương trình sau:

$$i) t^2 + t = 2 \Rightarrow t_1 = 1 \vee t_2 = -2$$

$$ii) t^2 + t = 6 \Rightarrow t_3 = 2 \vee t_4 = -3$$

Tóm lại nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x, y) = (1, -2); (-2, 1); (2, -3); (-3, 2)$$

B. Phương trình đối xứng loại 2:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0. \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x, y) = 0. \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

Đối với dạng hệ phương trình này, ta có thể đưa về một dạng hệ tương đương sau:

$$\begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) + f(y, x) = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình mới mà các bạn thu được là một hệ đối xứng hay nửa đối xứng mà ta đã xét ở phần trên. Thật vậy nếu đặt $\begin{cases} h(x, y) = f(x, y) - f(y, x) \\ g(x, y) = f(x, y) + f(y, x) \end{cases}$. Ta sẽ đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \text{ Ở đó } \begin{cases} h(x, y) = -h(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x) \end{cases}$$

Có thể các bạn thấy rằng $h(x, y)$ không đối xứng hoàn toàn (nửa đối xứng). Tuy nhiên ở đây có thể chấp nhận được bởi lẽ hệ ta ở dạng $h(x, y) = 0$. (Nếu các bạn vẫn thấy ray rút vì điều này thì các bạn hãy viết dưới dạng $h^2(x, y) = 0$, chẳng phải $h^2(x, y)$ đối xứng đó sao. Chú ý thêm là tác giả chỉ muốn các bạn nắm bắt mối quan hệ của sự đối xứng và nửa đối xứng một cách rõ ràng hơn, chứ trong lúc giải bài tập các bạn chớ bình phương lên nhé. **J**)

C. Phương trình đẳng cấp.

$$\begin{cases} f(x, y) = a(1) \\ g(x, y) = b(2) \end{cases} \text{ mà ở đó : } \begin{cases} f(tx, ty) = t^k f(x, y) \\ g(tx, ty) = t^k g(x, y) \end{cases}$$

Ở đây điều kiện thứ hai các bạn có thể hiểu một cách đơn giản là các đơn thức trong các hàm f và g là đồng bậc (bậc của đơn thức hai biến x, y là tổng các bậc của x và y). Nhận xét này sẽ giúp cho các bạn nhận biết được phương trình đẳng cấp một cách dễ dàng hơn. Cách giải tổng quát ở đây là đưa về phương trình:

$$bf(x, y) - ag(x, y) = 0, \text{ ở đó } a, b \text{ không đồng thời bằng } 0.$$

Nếu a, b đồng thời bằng 0. Ta giải riêng các phương trình $f(x, y) = 0; g(x, y) = 0$ và so sánh nghiệm.

Cách giải tương tự như phương trình $bf(x, y) - ag(x, y) = 0$ nên các bạn có thể tham khảo bên dưới.

Ta xét 2 trường hợp.

i) $x = 0$ là nghiệm của hệ phương trình. Điều này thì các bạn chỉ cần thế $x = 0$ và giải phương trình một biến theo y .

Trường hợp này ta thu được nghiệm $(x, y) = (0, y_1) \dots$

ii) Trường hợp này ta sẽ tìm các nghiệm khác $(0, y_1) \dots$. Chia hai vế cho x^k trong đó k là bậc của f . Đặt $t = \frac{y}{x}$. Ta đưa về phương trình theo ẩn t . Giải phương trình này ta tìm

được tỉ số $\frac{y}{x}$. Sau đó thay x thành ty trong (1). Giải phương trình này theo ẩn y , ta sẽ rút

ra được các nghiệm của bài toán (ty_0, y_0) .

Ví dụ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7 \\ x^2 + 6xy - 3y^2 = -8 \end{cases}$$

Giải:

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 24x^2 - 16xy + 16y^2 = 56 \\ 7x^2 + 42xy - 21y^2 = -56 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x^2 - 16xy + 16y^2 = 56 \\ 31x^2 + 26xy - 5y^2 = 0(*) \end{cases}$$

Ta giải (*).

$$31x^2 + 26xy - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (31x - 5y)(x + y) = 0(**)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 31x - 5y = 0(1) \\ x + y = 0(2) \end{cases}$$

Từ đây ta có thể dễ dàng giải được bằng cách thế vào hệ phương trình ban đầu

II. Các phương pháp giải hệ không mẫu mực:

A. Dùng bất đẳng thức :

Dấu hiệu cho phép ta sử dụng phương pháp này là ta sẽ thấy số phương trình trong hệ ít hơn số ẩn .

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình nghiệm dương :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3 \end{cases}$$

Giải:

$$VT = 1 + x + y + z + (xy + yz + zx) + xyz \geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + xyz = \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3$$

Suy ra dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

Giải: Đk: $x \geq -1; y \geq 5$

Giả sử

$$x > y - 6 \Rightarrow VT > VP$$

$$x < y - 6 \Rightarrow VT < VP$$

Suy ra $x = y - 6$

Đến đây bạn đọc có thể tự giải

Ví dụ 3: Giải hệ :

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 \\ 8^9 \cdot x^3 y^4 z^2 = 1 \end{cases}$$

Giải:

-Bài toán này có số ẩn nhiều hơn số phương trình vì vậy ta sẽ sử dụng bất đẳng thức

-Nhận xét : bậc của x,y,z khác nhau nên ta sử dụng Cauchy sao cho xuất hiện bậc giống hệ

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1}$$

Áp dụng Cauchy 8 số:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^2 y^4 z^2}{(x+1)^2 (y+1)^4 (z+1)^2}}$$

Hoàn toàn tương tự :

$$\frac{1}{y+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^3 z^2}{(x+1)^3 (y+1)^3 (z+1)^2}}$$

$$\frac{1}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^4 z^1}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)^1}}$$

Từ các bất đẳng thức thu được ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^3} \frac{1}{(1+y)^4} \frac{1}{(1+z)^2} \geq 8^9 \sqrt[8]{\frac{x^{24} y^{32} z^{16}}{(1+x)^{24} (1+y)^{32} (1+z)^{16}}}$$

$$\Rightarrow 8^9 x^3 y^4 z^2 \leq 1$$

$$\text{dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{8}$$

Ví dụ 4: giải hệ:
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

-Ví dụ này chúng tôi muốn giới thiệu công cụ xác định miền giá trị của x,y nhờ điều kiện có nghiệm của tam thức bậc hai

-Xét phương trình bậc hai theo x:

$$x^2 + x(y-3) + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$= (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y-7) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

Tương tự xét phương trình bậc hai theo y thì ta có $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$

$$\text{Suy ra: } x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{697}{81}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ và } y = \frac{7}{3}. \text{ Tuy nhiên thế vào hệ thì bộ nghiệm này không thỏa}$$

Vì vậy hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 5: Giải hệ:

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

Ý tưởng của bài toán này là ta phải đoán nghiệm của hệ là $x = y = z = 1$, sau đó chứng minh là $x > 1$ hay $x < 1$ đều vô nghiệm

$$\text{Nếu } x > 1 \Rightarrow 2 = z^5 - z^4 + 2z^2x > z^5 - z^4 + 2z^2 \Rightarrow 0 > (z-1)(z^4 + 2z + 2)$$

Do $z^4 + 2z + 2$ luôn dương nên $1 > z$

Tương tự $\Rightarrow y > 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow$ Vô lí

Tương tự $x < 1 \Rightarrow$ vô lí. Vậy $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 1$

Bài tập luyện tập

Giải các hệ:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} & 2) \begin{cases} x^2 = (y-1)(z+2) \\ y^2 = (z-1)(x+2) \\ z^2 = (x-1)(y+2) \end{cases} & 3) \begin{cases} 21\frac{y}{x^2} + 6y = 1988 \\ 21\frac{z}{y^2} + 6z = 1988 \\ 21\frac{x}{z^2} + 6x = 1988 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \frac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \frac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases} & 5) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = 9 \end{cases} & \end{array}$$

B. Đặt ẩn phụ:

Đôi khi bài toán sẽ phức tạp nếu ta giải hệ với ẩn $(x, y, z, \dots)$ nhưng chỉ sau một phép đặt $a = f(x), b = f(y), c = f(z), \dots$

Ví dụ 1: Giải hệ

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{36}{13} \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$.

Ví dụ 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(x+z)^2 = (4y^2+y+1)x^2z^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

Nếu $x=0$ dễ dàng suy ra được: $y=z=0$. Như vậy $(x,y,z)=(0,0,0)$ là một nghiệm của hệ.

Ta tìm các nghiệm khác $(0,0,0)$

Chia hai vế cho $x^2y^2z^2$ ta thu được hệ tương đương:

$$\begin{cases} \left(\frac{y+z}{yz}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{x+z}{xz}\right)^2 = 4 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = 5 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Ta lại đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$ ta nhận được:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = c^2 + c + 5(1) \\ (b+c)^2 = a^2 + a + 3(2) \\ (a+c)^2 = b^2 + b + 4(3) \end{cases}$$

Lấy $(2)-(3) \Rightarrow (a-b)(2(a+b+c)+1)=1$

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow (b-c)(2(a+b+c)+1)=1$

Từ đây suy ra $a-b=b-c \Rightarrow a+c=2b$

Thay vào (2) ta được $3b^2-b+4=0$.

Từ đây các bạn có thể dễ dàng giải tiếp bài toán.

Ví dụ 3: Giải hệ

$$\begin{cases} x^3(6+21y)=1 \\ x(y^3-6)=21 \end{cases}$$

Nếu giải hệ với ẩn (x,y) thì ở đây ta thật khó để thấy được hướng giải.

Nhưng mọi chuyện sẽ rõ ràng khi ta đặt $x = \frac{1}{z}$.

$$\begin{cases} z^3 = 21y + 6 \\ y^3 = 21z + 6 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng mà ta có thể dễ dàng tìm ra được hướng giải. **J**

Sau đây là bài tập áp dụng dành cho bạn đọc:

Bài tập luyện tập.

Bài 1: Giải hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + y^2 + 2 = 6 \\ xy(xy + x + y + 1) = 4 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} (x+y+z)^3 = 12t^3 \\ (y+z+t)^3 = 12x^3 \\ (z+t+x)^3 = 12y^3 \\ (t+x+y)^3 = 12z^3 \end{cases}$$

C. Tính các đại lượng chung

Ý tưởng của phương pháp này là tính các đại lượng trong đó.

Ví dụ 1: Giải hệ:

$$\begin{cases} xy + y + 2x + 2 = 4 \\ yz + 2z + 3y = 6 \quad (*) \\ xz + z + 3x = 5 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+2) = 6 \\ (y+2)(z+3) = 12 \Rightarrow (x+1)(y+2)(z+3) = \pm 24 \\ (z+3)(x+1) = 8 \end{cases}$$

Từ đây các bạn có thể có thể giải tiếp một cách dễ dàng.

Ví dụ 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} u + v = 2(1) \\ ux + vy = 3(2) \\ ux^2 + vy^2 = 5(3) \\ ux^3 + vy^3 = 9(4) \end{cases}$$

Giải:

Nhân $x + y$ vào (3)

$$\Rightarrow ux^3 + vy^3 + ux^2y + vxy^2 = 5(x + y)$$

$$\Rightarrow 9 + 3xy = 5(x + y)$$

Nhân $x + y$ vào (2)

$$\Rightarrow uy + vx = 2(x + y) - 3$$

Nhân $x^2 + y^2$ vào (2)

$$3(x^2 + y^2) = 9 + xy(uy + vx) = 9 + xy[2(x + y) - 3]$$

Đặt $a = x + y; b = xy$.

Đến đây các bạn có thể dễ dàng giải tiếp **J**.

Bài tập luyện tập

Bài 1: Giải hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \\ xz = yt \\ x - y + z + t = 0. \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ

$$\begin{cases} y^2 - xz = b \\ z^2 - xy = c \\ x^2 - yz = a \end{cases} \quad (a, b, c \text{ là những hằng số})$$

Bài 3: Giải hệ

$$\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2 \end{cases} \quad (a, b, c \text{ là những hằng số})$$

Bài 4: Giải hệ.

$$\begin{cases} x^3 + x(y - z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z - x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x - y)^2 = 16 \end{cases}$$

D. Nhân liên hợp.

Phương pháp này chủ yếu bỏ dấu căn thức để dễ tính toán hay để xuất hiện những đại lượng có thể đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: Giải hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{x} + \sqrt{y+5} + \sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{x+5} - \sqrt{x} + \sqrt{y+5} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+5} + \sqrt{y} + \sqrt{y+5} = 13 \\ \frac{5}{\sqrt{x} + \sqrt{x+5}} + \frac{5}{\sqrt{y+5} + \sqrt{y}} = 2 \end{cases}$$

Đặt

$$u = \sqrt{x} + \sqrt{x+5}$$

$$v = \sqrt{y} + \sqrt{y+5}$$

Ta suy ra:

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = 10 \\ uv = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = v = 5 \Rightarrow x = y = 2.$$

Ví dụ 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} \left(3 - \frac{5}{y + 42x}\right)\sqrt{2y} = 4 \\ \left(3 + \frac{5}{y + 42x}\right)\sqrt{x} = 2 \end{cases}$$

Giải:

Từ hệ ta suy ra điều kiện:

$$x, y > 0$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2y}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 6 \\ \frac{10}{y+42x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{2y}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{y+42x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow 15xy = (y-2x)(y+42x)$$

$$\Rightarrow y^2 + 25xy - 84x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x-y)(y+28x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = y \\ y + 28x = 0 \end{cases}$$

Trường hợp thứ hai ta loại do không thỏa điều kiện $x, y > 0$.
Thay vào hệ ban đầu ta thu được nghiệm sau:

$$(x, y) = \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{27}, \frac{5+2\sqrt{6}}{9} \right)$$

Bài tập luyện tập

Bài 1: Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+6} = 5 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ

$$\begin{cases} -\sqrt{x+y} + \sqrt{xy+1} = 5 - \sqrt{2} \\ (x-1)(y-1) = 1 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{y+1} + \sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y + x + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 0 \end{cases}$$

Kết thúc bài viết là phần bài tập tổng hợp các mục về hệ phương trình mà ta đã xem xét:

III) Bài tập tổng hợp.

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} x^2y + xy^2 = 6. \\ xy + x + y = 5. \end{cases} \\ \text{b)} & \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ x(x+1) + y(y+1) = 12 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + |y| + x^3 + 2x^2|y| + 2xy^2 + |y^3| = 0 \\ x|y| = -2. \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ 2xy + 1 = 2a \end{cases}$$